This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06661860 8

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND TILDEN FOUNDATIONS

608638

DIE ERDKUNDE.

EINE DARSTELLUNG IHRER WISSENSGEBIETE, IHRER HILFSWISSENSCHAFTEN UND DER METHODE IHRES UNTERRICHTES.

Herausgegeben von

MAXIMILIAN KLAR,

Professor an der Landes-Oberrealschule und Königl. Gewerbeschule in Wiener-Neustadt.

XXIII. Teil.

GEODÄSIE

EINE DARSTELLUNG DER METHODEN
FÜR DIE
TERRAINAUFNAHME, LANDESVERMESSUNG UND ERDMESSUNG.

MIT EINEM ANHANGE:
ANLEITUNG ZU ASTRONOMISCHEN, GEODÄTISCHEN UND KARTOGRAPHISCHEN ARBEITEN AUF FORSCHUNGSREISEN.

VON
Dr. NORBERT HERZ,
PROFESSOR AN DER K. K. FRANZ JOSEPH-STAATSREALSCHULE,
PRIVATDOZENT FÜR ASTRONOMIE UND GEODÄSIE AN DER K. K. UNIVERSITÄT WIEN.

MIT 2 STEINDRUCKTAFELN UND 280 FIGUREN IM TEXTE.

LEIPZIG UND WIEN
FRANZ DEUTICKE
1905.

Preis für Abnehmer des ganzen Werkes M. 12·— = K 14·40,
Preis für den Einzelverkauf . . . . M. 14·— = K 16·80.

KAT

PROSPEKT.

Seit Jahrzehnten besteht das Bestreben, den erdkundlichen Unterricht an Mittelschulen intensiver zu gestalten. Die Vorkämpfer dieser Bewegung haben in zahlreichen Schriften und Versammlungen, insbesondere bei den deutschen Geographentagen, unablässig das Wort erhoben für die Ausgestaltung der erdkundlichen Unterrichtsverfassung und Unterrichtslehre.

Es ist nicht zu leugnen, daß die Erdkunde mit ihren vielen Disziplinen, Hilfswissenschaften und methodischen Neuerungen hohe Anforderungen an den Lehrer stellt. Für ihn gilt es, nicht nur an der Hochschule umfassende Kenntnisse in den einzelnen Gebieten der Erdkunde zu erwerben, um sie späterhin im praktischen Schulunterrichte in didaktisch richtiger, dem Zwecke und Ziele der Mittelschule und dem Geiste der lernenden Jugend angepaßter Weise darzubieten, sondern auch dem Studium einer Reihe von Hilfswissenschaften obzuliegen, die entweder direkte Anwendung im Unterrichte finden oder doch auf ihn einen merklichen Einfluß haben.

Aber der Mittelschulunterricht verlangt von dem Lehrer noch ein Weiteres; er nötigt ihn, der fortschreitenden Entwicklung der erdkundlichen Wissenschaften und ihrer Methodik mit steter Aufmerksamkeit zu folgen und auch die Schule an diesen Fortschritten im Rahmen des Lehrplanes teilnehmen zu lassen; eine Aufgabe, die um so schwieriger ist, je weniger die meist umfangreichen Fachwerke auf die Bedürfnisse des Mittelschulunterrichtes Rücksicht nehmen.

Darum ist zu wiederholten Malen bei fachlichen Versammlungen, bei den deutsch-österreichischen Mittelschultagen die Forderung gestellt worden, die Erdkunde und ihre Hilfswissenschaften dem Lehrer in der Form bequemer Handbücher zu bieten, die bei aller Knappheit und Kürze ihm einen raschen, sicheren und gleichwohl tiefen Blick in das ganze Gebiet gestatten, auf die Literatur der bezüglichen Disziplin verweisen und ihm die Quellen erschließen.

Um diesem allseits anerkannten Bedürfnisse zu entsprechen, haben sich eine Reihe von erprobten Schulmännern geeint zur Schaffung eines Werkes über das ganze Wissensgebiet der Erdkunde, ihrer Hilfswissenschaften und der Methodik des Unterrichtes. Männer der Wissenschaft haben sich ihnen bereitwilligst zur Seite gestellt und dem Unternehmen ihre volle Kraft geliehen.

Das Werk ist demnach als die Frucht gemeinsamer Arbeit von Vertretern der Hoch- und Mittelschule anzusehen.

Wie weit es nun geglückt ist, einen einheitlichen Aufbau zu schaffen, wie weit eine harmonische Gestaltung der vielfach individuell dastehenden Gebiete bei dieser ersten Bearbeitung zustande gekommen, wird der gütigen Beurteilung jener überlassen, in deren Dienst sich das Werk stellen will.

Möge das Werk zur Erweiterung des erdkundlichen Wissens das Seine beitragen und für den Unterricht reiche Frucht bringen, damit nach der allseits angestrebten Ausgestaltung der Lehrverfassungen des erdkundlichen Unterrichtes die Klage eines Meisters der Schulerdkunde verstumme: „Der frisch sprudelnde Quell, ja die zum mächtigen Bergstrom angeschwollene Wissenschaft vertrocknet, versiegt fast, sobald sie in das ebene Land des Mittelschulunterrichtes gelangt, statt den Boden dauernd zu durchfeuchten und zu befruchten.“ —

Die Erdkunde hat aber auch unter den gebildeten Laien einen weiten Freundeskreis gefunden, der mit regem Interesse den neuen Entdeckungen, den Forschungen und der wissenschaftlichen Beurteilung der Erscheinungen folgt. Im vorliegenden Werke wird auch dieser Kreis allseitige Förderung für seine Privatstudien finden.

Das Werk wird einen Gesamtumfang von etwa 1000 Bogen haben und, im Subskriptionswege bezogen, etwa 120 *M.* = 150 *K* kosten. Die Ausgabe der einzelnen Teile wird sich auf 3—4 Jahre erstrecken und die Anschaffung des Werkes deshalb leicht sein. Vorbehaltlich eventueller Abänderungen ist folgende Einteilung beabsichtigt:

I. Geschichte der Erdkunde.

Von Dr. Siegmund Günther, o. ö. Professor an der königl. technischen Hochschule in München.

* Subskriptionspreis *K* 12·— = *M.* 10·—, geb. *K* 13·20 = *M.* 11·—.
Einzelpreis *K* 14·— = *M.* 11·60, geb. *K* 15·20 = *M.* 12·60.

II. Geschichte des geographischen Unterrichtes.

Von Julius Bonsé, Professor an der niederösterreichischen Landes-Real- und höheren Gewerbeschule in Wiener-Neustadt.

---

* Der beigesetzte Preis zeigt an, daß der betreffende Band bereits zur Ausgabe gelangt ist.

(Fortsetzung siehe auf der dritten Umschlagseite.)

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
608638
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1915 L

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

DIE ERDKUNDE.

EINE DARSTELLUNG
IHRER WISSENSGEBIETE, IHRER HILFSWISSENSCHAFTEN
UND DER METHODE IHRES UNTERRICHTES.

In Verbindung mit

Prof. Dr. **Ant. Becker** (Wien), Prof. **Jul. Beneš** (Wiener-Neustadt), a. o. Prof. Dr. **Cyr. Bodenstein** (Wien), Regierungsrat **E. Gelcich** (Wien), Prof. Dr. **Wilh. Götz** (München), o. ö. Prof. Dr. **Siegm. Günther** (München), Vorstand I. Klasse im k. u. k. mil.-geogr. Institut **Vinz. Haardt v. Hartenthurn** (Wien), Prof. Dr. **Norbert Herz** (Wien), a. ö. Prof. Dr. **R. F. Kaindl** (Czernowitz), o. ö. Prof. Dr. **A. Kirchhoff** (Halle a. d. S.), Prof. **H. Lanner** (Wien), o. ö. Prof. Dr. **Ferd. Löwl** (Czernowitz), Dozent Dr. **Wilh. Meinardus** (Berlin), Prof. Dr. **Jul. Mayer** (Wien), Dozent Dr. **Joh. Wilib. Nagl** (Wien), Prof. Dr. **K. Preißler** (Graz), Direktor Dr. **Fr. Rimmer** (Wiener-Neustadt), Schulrat Prof. Dr. **Wilh. Schmidt** (Wien), Dozent Dr. **W. Schram**, Leiter des österr. Gradmessungsbureaus (Wien), Dr. **Heinr. Schurtz** (Bremen), o. ö. Prof. Dr. **Wilh. Trabert** (Innsbruck), Prof. **Arth. Vital** (Triest), Dr. **H. Walser** (Bern)

herausgegeben von

MAXIMILIAN KLAR,

Professor an der Landes-Real- und höheren Gewerbeschule in Wiener-Neustadt.

XXIII. TEIL.

GEODÄSIE.

Von Professor Dr. **Norbert Herz.**

NICHT AUSLEIHBAR

LEIPZIG UND WIEN
FRANZ DEUTICKE
1905.

GEODÄSIE

EINE DARSTELLUNG DER METHODEN
FÜR DIE
TERRAINAUFNAHME, LANDESVERMESSUNG UND ERDMESSUNG.

MIT EINEM ANHANGE:

ANLEITUNG ZU ASTRONOMISCHEN, GEODÄTISCHEN UND KARTOGRAPHISCHEN ARBEITEN AUF FORSCHUNGSREISEN.

VON

Dr. NORBERT HERZ,

PROFESSOR AN DER K. K. FRANZ JOSEPH-STAATSREALSCHULE,
PRIVATDOZENT FÜR ASTRONOMIE UND GEODÄSIE AN DER K. K. UNIVERSITÄT WIEN.

MIT 3 STEINDRUCKTAFELN UND 220 FIGUREN IM TEXTE.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

LEIPZIG UND WIEN
FRANZ DEUTICKE
1905.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
608638
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1915 L

Verlags-Nr. 1021.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Druck von Rudolf M. Rohrer in Brünn.

Vorwort.

Verfasser hatte die Bearbeitung des vorliegenden Bandes nach dem Tode des Universitätsprofessors, k. u. k. Obersten des Ruhestandes Dr. Heinrich Hartl übernommen. Durch langjährige Beschäftigungen mit dem Gegenstande und zahlreiche praktische und wichtige theoretische Arbeiten war Professor Hartl mehr als irgend ein anderer zum Verfasser des vorliegenden Bandes berufen. Andauernde Kränklichkeit verhinderte denselben jedoch an der Ausführung des Werkes und konnten von den reichen Erfahrungen des Verstorbenen nur dessen bereits veröffentlichte Arbeiten zu Rate gezogen werden. Ob es dem Verfasser geglückt ist, in dem vorliegenden Bande ein Hilfsbuch zu geben, welches die durch den Tod Hartls entstandene Lücke auszufüllen vermag, muß Verfasser den Fachkollegen und Praktikern zu entscheiden überlassen.

Das Werk, in erster Linie für den Geographen bestimmt, gibt in gedrängter Kürze das Wichtigste aus der niederen und höheren Geodäsie, wobei der Natur der Sache nach aus den mathematischen Entwicklungen die Infinitesimalrechnung vollständig ausgeschlossen bleiben mußte. Um auch jene Sätze, deren Anführung nicht wohl unterbleiben konnte, deren Begründung aber nur durch höhere Rechnung zu geben ist, nicht ohne Beweis, gleichsam dogmatisch hinzustellen, sind die Beweise in Anmerkungen gegeben, welche daher von dem Geographen überschlagen werden können. Ohne den Umfang des Buches um mehr als etwa 8 bis 10 Seiten zu vermehren, konnte diesen Anmerkungen auch eine derartige Erweiterung gegeben werden, daß auch der Ingenieur das für ihn Wissenswerte aus der niederen und höheren Geodäsie in einem für die meisten Fälle vollständig ausreichenden Umfange zusammengestellt finden wird.

Die Ausgleichungsrechnung wurde hier ganz übergangen, da sie einen Band für sich füllen würde und für den vorliegenden Zweck entbehrlich ist; die Aufstellung der Bedingungsgleichungen jedoch glaubte Verfasser aufnehmen zu müssen, da man aus denselben erkennen kann, in welcher Art

sich der Einfluß der Netzbedingungsgleichungen auf die Beobachtungen äußert. Über die Prinzipien und die Ausführung der Ausgleichung kann eines der folgenden Werke nachgesehen werden:

C. M. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, II. Bd., Stuttgart, 1890, (Anwendungen bei den verschiedenen Aufgaben angeschlossen).

Ph. Fischer, Lehrbuch der höheren Geodäsie, I. Abschnitt, Gießen s. a.

F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I. Bd., Leipzig, 1880. 11., 12. und 13. Kap.; II. Bd., Leipzig, 1884, 7. Kap.

J. P. Herr, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Wien, 1887, Einleitung.

N. Herz, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, Leipzig, 1900, 6. Kap.

Publikationen des königl. preuß. geodätischen Institutes: Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Zentralbureaus der europäischen Gradmessung, I. bis III. Heft; von J. J. Baeyer, C. Bremiker und J. Weingarten; als Manuskript gedruckt, Berlin, 1869.

Weitere Literaturangaben zu den einzelnen Kapiteln finden sich in den Fußnoten und kann daher von denselben hier abgesehen werden.

Wien, Oktober 1904.

N. Herz.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Abteilung. Die Instrumentenkunde	11
A. Instrumententeile	11
I. Die Schraube	11
Klemmung und Feinbewegung	13
Die Mikrometerschraube	17
II. Dreifuß und Stativ	18
III. Achsen	23
IV. Visiervorrichtungen	25
Diopter	25
Die Lupe	31
Das Mikroskop	32
Das Fernrohr	33
V. Kreislesungen	42
Nonien	45
Schraubenmikroskop	46
VI. Spiegel und Prismen	50
B. Instrumente	54
a) Zum Vertikal- und Horizontalstellen und zur Messung von Neigungen	54
Die Libelle	61
b) Signalisierung	69
Der Heliotrop	73
c) Messung von Längen	76
Basisapparate mit Endmaßen	78
Basisapparate mit Strichmaßen	82
Distanzmesser ohne Latte	85
Distanzmesser mit Latte	87
d) Ausstecken und Messen von Winkeln	93
Gnomon und Kompaß	95
Spiegelinstrumente	97
Prismeninstrumente	100
Spiegelsextant und Prismenkreis	102
Theodolit und Universalinstrument	108
Durchgangsinstrument	119
Nivellierinstrumente	122
Die Latten	134
e) Höhenmessung mit dem Barometer	136
Siedethermometer oder Thermobarometer	139
f) Die Tachymetrie	141
g) Instrumente zum Einzeichnen der Aufnahmen	148
Der Rolltransporteur	148
Der Meßtisch	150
Das Perspektivlineal	154
h) Instrumente zum Übertragen von Zeichnungen	159
Pantograph	159
i) Flächenmessung, Planimeter	161
k) Die Photogrammetrie	164
Der Phototheodolit	171
l) Instrumente für Wassermessungen	175
m) Pendel und Uhren	179
II. Abteilung. Niedere Geodäsie	184
A. Skizzieren	184
B. Vorbereitende Arbeiten für die Detailvermessung	191
a) Auspflocken	191
b) Abstecken von geraden Linien	192
c) Ausstecken von Winkeln	193
C. Meßtischarbeiten	195

Seite

a) Aufstellen und Orientieren des Meßtisches 195
b) Visieren und Messen 196
c) Visieren und Schneiden . . 198
d) Seitwärtsabschneiden . . . 199
e) Rückwärtseinschneiden . . . 200
f) Das Hansensche Problem . . 207
g) Doppeltes Rückwärtseinschneiden 209
h) Problem der sechs Punkte . 210
i) Aufnahmsmethoden 212
k) Ausgleichung von Fehlern . 214
l) Das Zeichnen der Schichtenlinien 216
m) Das Ausfertigen der Pläne . 217
n) Die Benutzung der Pläne . . 220
p) Die Photogrammetrie . . . 221

D. Vermessungen 224
a) Längenmessungen 224
b) Winkelmessungen 225
Die Teilungsfehler der Kreise 226
Die Exzentrizität der Kreise 228
Die Aufstellungsfehler des Instrumentes 232
Exzentrisches Fernrohr . . . 237
Beobachtungen mit dem Sextanten 239
Repetitions- und Satzbeobachtungen 240
Zentrieren der Horizontalwinkel 244
Messung der Vertikalwinkel 246
Die terrestrische Refraktion 247
Konvergenz der Lotlinien . 248
Zentrieren der Vertikalwinkel 251
Die astronomische Refraktion 256
Das Nivellieren 257
Distanzmessung und Nivellieren mit der Tangentenschraube 258
Barometrisches Höhenmessen 261

E. Die Berechnungen 266
Additions- und Subtraktionslogarithmen 266
Die Triangulation 268
Das Rückwärtseinschneiden . . . 269
Das Problem der vier Punkte . . 270
Das Problem der sechs Punkte . 274
Das Problem der acht Punkte . 275
Koordinatenberechnungen . . . 278

Seite

Genäherte Ausgleichung eines Polygonzuges 280
Abstecken von Kreisbögen . . . 282
Aus den Koordinaten zweier Punkte deren Distanz und das Azimut der Verbindungslinie zu bestimmen 284

III. Abteilung. Höhere Geodäsie . . 285
Die Basismessung 285
Winkel- und Seitengleichungen . 289
Sphärischer Exzeß 294
Berechnung der Dreiecksseiten auf der Kugel 296
Legendresches Theorem 299
Additamentenmethode u. Sehnendreieck 302
Die geographischen Koordinaten auf der Erdkugel und ihre Beziehung zum Fixsternhimmel . 304
Bestimmung der geographischen Koordinaten 308
Bestimmung des Azimutes . . . 311
Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Koordinaten . . . 318
Bestimmung der Distanz und der Richtungswinkel aus den rechtwinkligen Koordinaten 322
Bestimmung der geographischen Koordinaten aus den rechtwinkligen 325
Die geodätische Übertragung der geographischen Koordinaten . . 326
Gradmessungen; das Erdellipsoid 329
Theoretische Untersuchungen über die Figur der Erde 332
Die Erde als Ellipsoid; Beziehungen zwischen geographischer, geozentrischer und reduzierter Breite 334
Länge des Meridiangrades und des Grades im Parallel 339
Bestimmung der Erddimensionen aus zwei Gradmessungen . . . 342
Die Berechnungen auf der ellipsoidischen Erdoberfläche . . . 344
Geodätisches Dreieck und sphärisches Hilfsdreieck . 345
Geodätische Übertragung der geographischen Koordinaten . . . 355

	Seite
Bestimmung der Distanz und des Azimutes aus den geographischen Positionen zweier Punkte	358
Der Vertikalschnitt	362
Lotabweichungen; das Geoid . .	367
Einfluß der Lotabweichungen auf Breiten, Längen und Azimute .	373
Die Größe der Schwerkraft . . .	376
Das Präzisionsnivellement . . .	379
Polhöhenschwankungen	381

	Seite
Anhang. Anleitung zu astronomischen, geodätischen und kartographischen Arbeiten auf Forschungsreisen . .	383
A. Die Ausrüstung	383
B. Die Beobachtungen	385
C. Die Reduktionen	390
Hilfstafeln	395

Einleitung.

1. Gegenstand der Geodäsie, das Wort in seinem weitesten, jetzt gebräuchlichen Sinne genommen, ist Vermessung der Erde. Ursprünglich allerdings wurde der Name nicht in diesem weiten Umfange gebraucht; Geodäsie, von $\gamma\tilde{\eta}$ = die Erde und $\delta a\acute{\iota}\varepsilon\iota\nu$ = teilen, umfaßte anfänglich jedenfalls nur die für die Zwecke der Länderteilung und Verteilung dienenden Operationen niedriger Ordnung, welche kleine Gebiete umfaßten und daher auf der als eben gedachten Erdoberfläche durchzuführen waren. Mit der Erweiterung der Kenntnisse über weitere Ländergebiete, mit der richtigeren Erkenntnis von der wahren Figur der Erde, wurde auch der Begriff der Geodäsie ausgedehnt, und die analytischen Operationen, welche zur Bestimmung der Größe und Gestalt der Erde dienen, einbezogen. So ist denn das Gebiet der Geodäsie heute ein ziemlich umfassendes geworden und man unterscheidet jetzt:

1. Die geometrischen und analytischen Operationen, welche sich auf kleine Gebiete der Erdoberfläche erstrecken, bei denen man von der Krümmung der Erdoberfläche absehen kann und welche den Gegenstand der niederen Geodäsie, praktischen Geometrie oder Feldmeßkunst bilden und

2. solche, welche sich über ausgedehnte Ländergebiete erstrecken, bei denen daher nicht nur auf die Krümmung der Erde an sich, sondern auch auf die Veränderlichkeit derselben Rücksicht genommen werden muß und welche den Gegenstand der höheren Geodäsie, Landesvermessung und Gradmessung bilden.

Der Unterschied zwischen der niederen und höheren Geodäsie liegt keineswegs in den Operationen, sondern in dem Bereiche der Aufnahme und daher der Methode der Reduktionen. Daß für eine relativ gleich große Genauigkeit der Resultate bei einem größeren Bereiche auch an die Genauigkeit der Beobachtungen wesentlich höhere Anforderungen gestellt werden müssen, ist selbstverständlich; allein wesentlich verschieden werden die Reduktionsmethoden. Während man sich in der niederen Geodäsie mit graphischen Darstellungen (Meßtischaufnahmen) begnügen und für die Rechnung die ebene Trigonometrie anwenden kann, wird für die höhere Geodäsie eine

graphische Darstellung untunlich und für die Rechnung hat man zu beachten, daß man es nicht mit geraden Linien, sondern auf der Kugel mit Kreisen zumeist größten Kreisen, auf der als abgeplattetes Rotationsellipsoid gedachten Erdoberfläche mit noch weit komplizierteren Linien zu tun hat.

In allen Fällen hat man noch weiters zu beachten, daß nicht alle beobachteten Punkte sich in derselben Höhe befinden. Allein die Messungen und Darstellungen müssen sich in der niederen Geodäsie alle auf eine Ebene, und zwar auf die Horizontalebene des Aufnahmsbereiches beziehen; in der höheren Geodäsie muß man analog eine geometrische, streng definierte Fläche zugrunde legen, als welche man eine Niveaufläche, die Oberfläche des ruhenden Wasserspiegels annimmt.* Denn eine graphische Darstellung, eine Wiedergabe des Gemessenen in einer Ebene ist nur möglich, wenn man sämtliche Punkte der Natur auf eine einzige Ebene projiziert. Seien z. B. in dieser Ebene drei Punkte A, B, C gegen einander festgelegt und ein vierter D zwischen ihnen oberhalb dieser Ebene, so wird eine Einzeichnung dieses Punktes unmöglich, wenn man die wahren Distanzen AD, BD, CD gemessen hat und von A, B, C aus auftragen will; sie werden eben sämtlich zu lang erscheinen, da sie eine Pyramide bilden, deren Grundfläche ABC, deren Spitze D ist. Aus demselben Grunde werden, wenn die drei Winkel ADB, BDC, CDA gemessen wurden, dieselben nicht in einer Ebene aufgetragen werden können, da ihre Summe nicht, wie es für die Ebene sein sollte, 360° ist.

Man ist daher gezwungen, den Punkt D auf dieselbe Ebene, und man nimmt als Grundebene stets eine horizontale Ebene, durch eine auf diese Ebene gefällte Senkrechte zu projizieren, und man mißt die Entfernungen der so erhaltenen Projektion D' von den drei Punkten und die Horizontalwinkel um den Punkt D'. Da jetzt alle vier Punkte in einer Ebene liegen, so müssen die gemessenen Entfernungen (oft auch kurtierte Distanzen genannt) und die gemessenen Winkel, die Horizontalwinkel allen jenen Bedingungen entsprechen, um eine richtige Wiedergabe in einer Ebene (allerdings im verkleinerten Maßstabe) zu gestatten. Derartige Darstellungen nennt man Pläne.

2. Pläne können verschiedenen Zwecken dienen; sie können einfach topographische oder aber militärische, ökonomische, forstliche, hydrotechnische Pläne sein; in den meisten Fällen, vorzugsweise aber für ökonomische Zwecke, wird eine richtige Wiedergabe des Areals, des Flächeninhalts der aufgenommenen Gebiete verlangt. Diese Forderung scheint aber mit der Art der Aufnahme: Projektion auf eine Horizontalebene, unvereinbar. Allein der Wert eines Grundstückes hängt doch nur von der Größe seiner Horizontalprojektion ab; der Pflanzen- und Baumwuchs ist ja vertikal und eine geneigte Fläche vermag nicht mehr Ertrag zu liefern als deren Horizontalprojektion; die Grundfläche eines Hauses ist wegen der vertikalen Aufführung der Mauern genau gleich der Horizontalprojektion des Terrains usw.

---

* Näheres hierüber s. Nr. 54 und 109.

Es kommt daher für die Zwecke der Wertbemessung, Besteuerung usw. doch stets nur die Horizontalprojektion in Betracht.

Für andere Zwecke hingegen ist die Höhenlage der Orte nicht gleichgültig. Für die Anlage von Eisenbahnen, Straßen, Wasserläufen usw. ist eine sogar sehr genaue Kenntnis der Terrainformation, der Erhebungen und Vertiefungen unerläßlich. Diese zu ermitteln, bedarf es der Bestimmung der Höhe der einzelnen Punkte über der als Grundebene angenommenen Horizontalebene, der Höhenmessung (s. Nr. 53).

In den Plänen wird die verschiedene Höhenlage der dargestellten Objekte dadurch zum Ausdrucke gebracht, daß man Punkte, welche in gleicher Höhe liegen, durch Linien verbindet, welche Isohypsen oder Schichtenlinien genannt werden. Um eine Vorstellung von denselben zu erhalten, denke man sich z. B. einen Hügel durch parallele, horizontale Ebenen von etwa 10 *m* Abstand, d. h. in 10, 20, 30 *m* Höhe durchschnitten. Hierdurch wird der Berg in lauter gleich dicke Platten zerschnitten, die aber nach oben zu immer kleiner werden. Projiziert man dann die Begrenzungen der einzelnen Platten auf die Grundebene, so entstehen eine Reihe ineinander liegender krummer Linien (Fig. 1). So liegen die Punkte *A*, *B*, *C* sämtlich in der Höhe 20 *m* über der Grundfläche; erhebt man die Linie I um 10 *m*, II um 20 *m*, III um 30 *m*, IV um 40 *m* (im verjüngten Maßstabe), ohne sie zu verschieben, und überzieht das so entstehende Gerippe mit einem Mantel, so erhält man ein treues Bild der Erhebung.

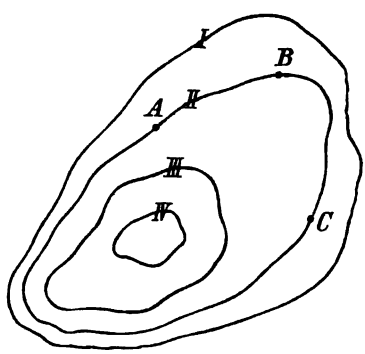


Fig. 1.

Der Plan wird dadurch eine getreue verkleinerte Wiedergabe der aufgenommenen Objekte. Handelt es sich dabei um die Aufnahme kleiner Gebiete, so werden die Pläne in verhältnismäßig großem Maßstabe gezeichnet. Ist 1 *cm* des Planes das Bild einer Strecke von *n* Metern (d. i. $100n$ *cm*) der Natur, so sagt man, das Verjüngungsverhältnis ist $\frac{1}{100n}$ oder $1 : 100n$. Abgesehen von Detailplänen (Bau- und Konstruktionspläne usw.), für welche selbst 1 *cm* des Planes = 1 *m* der Natur (Verjüngungsverhältnis $\frac{1}{100}$) ist, wählt man für die Situationspläne, wie sie bei den Meßtischaufnahmen auftreten, 1 : 2500 bis 1 : 25000, so daß 1 *cm* des Planes gleich 25 bis 250 *m* der Natur ist. Bis zu diesen Grenzen können Gebiete von etwa 12 bis 15 *km* Ausdehnung auf Blättern von den Dimensionen 50×60 *cm* dargestellt werden, wobei auf die Erdkrümmung nicht Rücksicht genommen zu werden braucht.

3. Die Darstellung von noch größeren Ländergebieten in noch kleinerem Maßstabe 1 : 75000 und darunter — selbst schon die Darstellung von ausgedehnteren Gebieten im Maßstabe 1 : 25000 kann eine Rücksichtnahme auf die Erdkrümmung erfordern. Da sich aber eine Kugel beziehungsweise ein Sphäroid, wie es die Erde in Wirklichkeit ist, nicht völlig getreu auf einer

Ebene abbilden läßt, so wird bei diesen Abbildungen, den Karten oder Landkarten, die Aufgabe zu lösen sein, die Erdoberfläche so auf eine Ebene abzubilden, daß diese Abbildung dem Originale möglichst entspricht. Der Unterschied zwischen Plan und Karte ist daher von derselben Art, wie er oben für die niedere und höhere Geodäsie festgestellt wurde und fällt das Planzeichnen in das Gebiet der niederen, das Kartenzeichnen in das Gebiet der höheren Geodäsie. Während aber das Planzeichnen mit jener zusammen behandelt wird, wird gewöhnlich die Lehre vom Zeichnen der Landkarten, die Chorographie besonders behandelt und kann hier davon vollständig abgesehen werden, um so mehr, als in der vorliegenden Sammlung hierüber ein eigener Band erschienen ist.*

Pläne von verschiedenen angrenzenden Gebieten müssen, so lange dabei noch die Erdkrümmung nicht von Belang ist, direkt zusammenstoßen und auch bei größeren Komplexen dürfen sich, unter Berücksichtigung der Erdkrümmung, in den Grenzgebieten keine Widersprüche ergeben. Erweitert man jedoch die Operationen von dem Zentrum der Aufnahme nach außen, so werden mit wachsenden Entfernungen die Darstellungen immer unzuverlässiger: kleine Fehler in den Richtungen werden natürlich gegen den Rand zu zu bedeutenden Verschiebungen führen können und wiederholte kleine Fehler bei den aufeinander folgenden Operationen würden sich summieren. Als erster Grundsatz gilt daher, entfernte Hauptpunkte gegeneinander festzulegen und die anderen dazwischen einzuschalten: „Vom Großen ins Kleine arbeiten". Als Grundlage für die Spezialvermessungen müssen daher die Aufnahmen im Großen, die Landesvermessungen dienen; an diese werden die Operationen für die Detailvermessung angeschlossen. Dieselben Operationen der höheren Geodäsie, die in ihren Verbindungen im Großen für die Erdmessung dienen, liefern gleichzeitig die Grundlagen, an denen die niedere Geodäsie ihre Arbeiten anknüpft. Folgerichtig sollte die höhere Geodäsie mit ihren Resultaten vorangeschickt werden. Dieser Vorgang empfiehlt sich aber aus dem Grunde nicht, weil die wesentlich schwierigeren Methoden der höheren Geodäsie besser erst nach den bedeutend einfacheren Methoden der niederen Geodäsie abgehandelt werden. Doch muß vorausgesetzt werden, daß die gegenseitige Lage einer Reihe von Punkten, an welche die Detailvermessung sich anschließt, bereits durch die Operationen der höheren Geodäsie bekannt ist. Derartige Punkte werden als Fixpunkte bezeichnet und man unterscheidet dieselben als Fixpunkte erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung, deren Gesamtheit beziehungsweise als Netz erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung.

4. Unter allen Umständen ist nämlich das Messen von Längen gegenüber demjenigen von Winkeln sehr zeitraubend und auch kostspielig. Allerdings wurden in früheren Zeiten Messungen von Längen bis zu 100 *km* und

* Die Kartenentwurfslehre, bearbeitet von Artur Vital, dieser Sammlung XXVI. Teil. Für eingehendere Studien vgl. M. A. Tissot, Mémoire sur la réprésentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Paris 1881. M. Fiorini, Le projezioni delle carte geografiche, Bologna 1881, und N. Herz, Lehrbuch der Landkartenprojektionen, Leipzig 1885.

auch mehr mit der Meßkette oder mit dem Meßrad direkt ausgeführt. Allein Messungen mit Instrumenten, welche den heute geforderten Grad der Genauigkeit zu erreichen gestatten, sind nicht mit jenen vergleichbar. Seit Snellius werden daher nur einige wenige Längenmessungen mit Meßstangen ausgeführt, und im übrigen wird über den ganzen zu vermessenden Bereich ein Netz von Punkten ausgewählt, die miteinander verbunden ein Dreiecksnetz geben, dessen einzelne Dreiecke aber nicht durch die Messung der Seiten, sondern durch Messung der Winkel bestimmt werden. Jede gemessene Strecke, welche dabei eine Grundlage für die aus den gemessenen Winkeln zu berechnenden übrigen Stücke gibt, wird als eine Basis bezeichnet, gleichgültig, ob es sich dabei um eine Basis von 50—100 *m* handelt, an welche eine Detailvermessung angeschlossen werden soll oder ob es sich um eine Basis von 3—10 *km* oder mehr handelt, welche als Grundlage für eine Landesvermessung zu dienen hat. Die Operationen (Winkelmessungen) zur gegenseitigen Festlegung aller Punkte, der sogenannten Dreieckspunkte, bilden die Triangulation und man kann eine Haupttriangulation für die Landesvermessung und eine Detailtriangulation für die Detailvermessung unterscheiden. Schließt man aber die Detailvermessung an die bereits vorausgegangene Landesvermessung an, so kann man aus dieser irgend eine Strecke als Basis der Detailvermessung erhalten, ohne eine neuerliche Längenmessung für die erwähnten Zwecke ausführen zu müssen; dazu ist nur notwendig, daß zwei der Detailvermessung angehörige Punkte in dem allgemeinen Netze enthalten sind oder in dasselbe einbezogen werden. Allein die Dreiecksseiten für die Landesvermessung sind ungleich größer, die Zahl der Dreieckspunkte, welche der Landestriangulation angehören, nicht ausreichend, um alle für die verschiedenen Detailvermessungen nötigen Punkte zu erhalten und man ist gezwungen, die großen Dreiecke durch Einschalten von Zwischenpunkten in kleinere Dreiecke zu zerfällen. Man unterscheidet daher

1. eine Triangulation erster Ordnung; die Punkte derselben, Triangulationspunkte erster Ordnung genannt, bilden das Triangulationsnetz erster Ordnung; die Entfernung dieser Punkte kann 20 bis 60 *km* und mehr betragen. Die Länge der Seiten dieser Dreiecke ist natürlich verschieden und hängt von der Bodengestaltung des aufzunehmenden Gebietes ab. Die Zugänglichkeit der Punkte, die gegenseitige Sichtbarkeit derselben, mehr oder weniger große Schwierigkeiten, welche sich der Aufnahme z. B. in Küstengebieten entgegenstellen, fordern häufig ein Herabgehen auf besonders kurze Seiten. In ebenem Terrain wird man hingegen mit langen Seiten sein Auskommen finden können; Verbindung von weit entfernten Küstenstationen erfordert manchmal ebenfalls außerordentlich lange Seiten. So traten bei der Erweiterung des spanischen Dreiecksnetzes auf die Nordküste von Afrika die Verbindungen der spanischen Punkte Mulhacen und Tetica mit den algerischen Mont Sabina und Filhaucen als Seiten von der Länge von 270 *km* auf. So ist auch bei der Triangulation im Kaukasus die Linie Ararat—Godarebi 202 *km*. Im österreichischen Dreiecksnetze erster Ordnung ist die Seitenlänge im Durchschnitte etwa 40 *km*. Die längsten Seiten finden sich bei der Verbindung der dalmatinischen Küste mit Italien und vorzugsweise

im westlichen Teile der ungarischen Tiefebene; in anderen Teilen des Netzes nur vereinzelt. Sie sind (nach der Größe geordnet):*

304	(Monte Hum)	— 311	(Giovannichio)	133·3 *km*
308	(St. Giorgio)	— 311	(Giovannichio)	125·4 *km*
304	(Monte Hum)	— 310	(Tremiti**)	112·5 *km*
94	(Rosalienkapelle)	— 104	(Magos-hegy)	102·5 *km*
99	(Geschriebenstein)	— 220	(Gurgo-hegy)	98·6 *km*
11	(Spieglitzer Schneeberg)	— 13	(Schneekoppe***)	98·2 *km*
99	(Geschriebenstein)	— 104	(Magos-hegy)	95·8 *km*
104	(Magos-hegy)	— 110	(Zobor)	91·8 *km*
100	(Hundsheimer)	— 110	(Zobor)	90·1 *km*

Anderseits sind die kürzesten Seiten, mit Ausnahme der Basisentwicklungsnetze,† im westlichen Teile der Monarchie,†† im dalmatinischen Küstennetze und in den Alpen; sie sind ebenfalls nach der Größe geordnet (mit Ausnahme der von österreichischen Offizieren gemessenen albanischen und griechischen Dreiecke†††).

321	(Sniježnica)	— 322	(Ilin vrh)	8·8 *km*
285	(Tmor)	— 314	(Rogo)	9·9 *km*
316	(St. Andrea)	— 319	(Ragusa)	12·5 *km*
316	(St. Andrea)	— 317	(Ostra glavica)	13·3 *km*
314	(Rogo)	— 316	(St. Andrea)	13·7 *km*
284	(Siljevać)	— 314	(Rogo)	14·8 *km*
320	(Orjen)	— 322	(Ilin vrh)	15·2 *km*
320	(Orjen)	— 321	(Sniježnica)	15·8 *km*
314	(Rogo)	— 317	(Ostra glavica)	16·1 *km*
284	(Siljevać)	— 285	(Tmor)	16·2 *km*
312	(S. Iván)	— 313	(Velki Grad)	16·9 *km*
164	(Košuta)	— 167	(Grintouc)	17·2 *km*
75	(Bösenstein)	— 77	(Hohe Trett)	17·2 *km*
6	(Dobrošov)	— 8	(Großkoppe)	18·2 *km*

In das Dreiecksnetz erster Ordnung sind auch Sternwarten einbezogen, sowie auch auf einer größeren Zahl anderer dieser Punkte astronomische Beobachtungen zur Bestimmung der geographischen Koordination derselben angestellt werden, weshalb man dieses Netz auch das astronomisch-

---

* Entnommen aus: Die Ergebnisse der Triangulierungen des k. u. k. militärgeographischen Instituts, Bd. I, Wien 1901, und Bd. II, Wien 1902.

** Italienischer Punkt.

*** Preußischer Punkt.

† S. Basismessung.

†† Noch kürzere Seiten finden sich mitunter in größerer Zahl in der galizischen Triangulierung; doch sind im östlichen Teile der Monarchie teilweise nur Dreiecksketten gemessen.

††† Die bereits in das Triangulierungsnetz einbezogene Seite 200 (Alie)—201 (Dubica) 7·2 *km* lang, gehört noch dem Basisentwicklungsnetze bei Dubica an.

trigonometrische Netz nennt. In Tafel I sind die Punkte erster Ordnung, welche in dem Teile der österreichisch-ungarischen Monarchie zwischen 45° und 49° nördlicher Breite und zwischen 29° 30′ und 36° östlicher Länge liegen, eingetragen. Es sind Punkte auf den höchsten Bergspitzen in sehr beträchtlicher Zahl und es erforderte einen außerordentlichen Aufwand an Zeit und Arbeit, um an allen diesen Punkten (das österreichische Netz erster Ordnung umfaßt 706 Punkte) Winkelmessungen, an vielen auch astronomische Beobachtungen auszuführen, sodann die kleinen Beobachtungsfehler so auszugleichen, daß alle Netzbedingungen erfüllt werden, z. B. die Winkelsumme in jedem Dreiecke den theoretischen Wert (180° + sphärischem Exzeß) habe.

Man ersieht aber hieraus, daß man an ein derartiges Dreiecksnetz Spezialvermessungen nicht anschließen kann; so z. B. umfaßt das Viereck Großwand (am Dachstein, Punkt 155), Großer Priel (71), Bösenstein (75), Hochgolling (156), welches aus zwei Dreiecken mittlerer Größe gebildet wird, dessen Seiten

$$(155) - (156) = 33{\cdot}0\ km \qquad (71) - (155) = 47{\cdot}7\ km$$
$$(71) - (75) = 39{\cdot}7\ km \qquad (75) - (156) = 52{\cdot}4\ km$$
$$(71) - (156) = 55{\cdot}1\ km$$

betragen, ein Areal von 1751 km^2, ein für eine Detailvermessung viel zu ausgedehntes Gebiet. Wollte man aber durch Triangulation hieran ein dieser Detailvermessung dienendes Netz anschließen, so würde man so viele Punkte einschalten müssen, daß eine Ausgleichung der Beobachtungen in dem oben erwähnten Sinne fast unmöglich wäre. Denn man muß stets darauf bedacht sein, mehr Beobachtungen als unbedingt nötig sind zu machen, wodurch man nicht nur gegen grobe Fehler gesichert wird, sondern auch Mittel zur Beurteilung der Genauigkeit der Beobachtungen erhält. Dann sind aber, da sämtliche Beobachtungen infolge der Unvollkommenheit der Sinne und der Instrumente mit kleinen Fehlern behaftet sind, stets kleine Widersprüche vorhanden, die ausgeglichen werden müssen. Die Arbeit der Ausgleichung wächst aber nicht im einfachen, sondern fast im quadratischen Verhältnisse mit der Zahl der Punkte: dreimal so viel Punkte erfordern die neunfache Arbeit. Man schaltet daher zunächst

2. ein Netz zweiter Ordnung (Triangulierungspunkte zweiter Ordnung) ein, welches ebenfalls noch mit möglichst großer Sicherheit festgelegt, durch zahlreiche überzählige Beobachtungen bestimmt und an das bereits ausgeglichene Netz erster Ordnung angeschlossen, ausgeglichen werden muß. Die Entfernung der Punkte kann 8—15 *km* betragen und an dieses Netz wird dann

3. ein Triangulierungsnetz dritter Ordnung angeschlossen, dessen Punkte in Entfernungen von 4—9 *km* liegen. Von denselben sollen mindestens drei auf ein Areal fallen, welches der Detailvermessung zugrunde gelegt wird und welches eine „Triangulierungssektion" genannt wird; für dieselbe wurde früher 1 Quadratmeile = 57 km^2, d. i. ein Quadrat von 7·5 *km* Seitenlänge angenommen; die Darstellung fand in dem Maßstabe 1 Zoll = 200 Klafter,

d. i. 1 : 14400 statt, und zwar auf einem Quadrat von 20 Zoll Seitenlänge. Die ungefähre Größe einer solchen Sektion ist auf Tafel II, Fig. 1 zu ersehen. Für die Spezialkarte der österreichisch-ungarischen Monarchie wird diese in von Nord nach Süd laufenden „Kolonnen" von $\frac{1}{2}°$ Breite und in von West nach Ost laufenden „Zonen" von $\frac{1}{4}°$ Höhe geteilt. Die Kolonnen werden von West nach Ost mit römischen Ziffern, die Zonen von Nord nach Süd mit arabischen Ziffern numeriert. Ein „Gradkartenblatt" von $\frac{1}{2}°$ Breite von West nach Ost und von $\frac{1}{4}°$ Höhe von Nord nach Süd gehört dann immer einer Zone und einer Kolonne an; auf Tafel II ist das Gradkartenblatt Kolonne IX, Zone 15 (Ischl und Hallstadt) mit dem Dreieckspunkte erster Ordnung „Großwand" dargestellt, während die dem Blatte zunächst gelegenen Dreieckspunkte Schafberg und Traunstein schon in andere Blätter fallen. In dem südlich gelegenen Kartenblatte (Zone 16, Kolonne IX) ist nun links eine alte Triangulierungssektion eingezeichnet; auf ein Kartenblatt würden ungefähr 6 dieser Triangulierungssektionen entfallen. Nach Einführung des metrischen Systems wurde eine Triangulierungssektion auf 80 km^2 festgesetzt, und zwar als ein Rechteck, dessen Seite von Ost nach West 8 *km*, von Nord nach Süd 10 *km* Länge hat; die Fläche des Gradkartenblattes ist etwa $3\frac{1}{2}$mal so groß wie diejenige der Triangulierungssektion; die Begrenzungen der letzteren fallen aber nicht mit den Grenzen der Kartenblätter zusammen; vielmehr werden von dem mittleren Meridian eines Landes oder Länderkomplexes Streifen von 8 *km* nach West und Ost beziehungsweise von 10 *km* nach Nord und Süd abgegrenzt. Für Niederösterreich, Mähren und Schlesien z. B. gilt der Stephansturm, für Steiermark der Triangulierungspunkt Schökl als Ausgangspunkt usw.

Die Zahl der Triangulierungspunkte dritter Ordnung in einer Triangulierungssektion soll mindestens drei sein, beträgt aber meist mehr; in Tafel II sind im Kartenblatte „Ischl und Hallstadt" die Triangulierungspunkte zweiter und dritter Ordnung, deren Zahl hier 28 beträgt, eingetragen.

An dieses Netz, welches wohl auch als graphisches Hauptnetz bezeichnet wird, wird

4. das Triangulierungsnetz vierter Ordnung angeschlossen, welches eine hinreichende Anzahl von Punkten enthalten muß, damit daran die Detailvermessung anknüpfen kann. Die Entfernung der Punkte soll nicht größer als 400—600 *m*, höchstens 1 *km* sein. Für diese Triangulierung wurde früher die (alte) Triangulierungssektion in 20 Rechtecke geteilt (vgl. Tafel II), und zwar in der Richtung von Nord nach Süd in fünf Reihen, von Ost nach West in vier Kolonnen, so daß jedes Rechteck von Ost nach West 1000°, d. i. etwa 2 *km*, von Nord nach Süd 800°, also etwa 1·6 *km* hatte; die Darstellung fand im Verhältnisse 1″ = 40°,* d. i. 1 : 2880 auf Blättern von 25″ × 20″ Größe statt. Jedes dieser Rechtecke bildete dann eine „Aufnahmssektion" und mußte mit mindestens drei Punkten des Netzes vierter Ordnung dotiert sein, so daß auf jede Triangulierungssektion mindestens 60, auf jedes Kartenblatt zirka 350 Punkte entfallen mußten. Nach der gegenwärtigen Vorschrift zerfällt jede Triangulierungssektion (von 80 km^2 Fläche) in vierzig

* 1° (Klafter) = 6′ (Fuß), 1′ = 12″ (Zoll), 1″ = 12‴ (Linien).

Rechtecke, indem sie von Ost nach West in fünf Kolonnen, von Nord nach Süd in acht Reihen geteilt wird; jede Aufnahmssektion mißt demnach gegenwärtig 1·6 *km* von Ost nach West und 1·25 *km* von Nord nach Süd * und soll ebenfalls mindestens drei Netzpunkte vierter Ordnung enthalten, woraus sich die Zahl der Netzpunkte vierter Ordnung in einem Gradkartenblatte auf ungefähr 400 ergibt. Daß bei diesen eine strenge Ausgleichung, wie dieselbe bei dem Netze erster oder zweiter Ordnung notwendig ist, zur Unmöglichkeit wird, ist hiernach leicht zu sehen; es genügt aber hier, jeden dieser Netzpunkte durch Kontrollschnitte sicherzustellen, d. h. dadurch, daß man denselben nicht nur von zwei Punkten, sondern von drei oder vier Punkten des Netzes dritter Ordnung aus bestimmt. Da an dieses Netz nun die graphische Triangulierung, d. i. die Detailvermessung mit dem Meßtisch angeschlossen wird, so nennt man dasselbe auch das graphische Sekundärnetz oder kurz das graphische Netz, auch wohl das geometrische oder Gemeindenetz.

Die Anzahl der mit dem Meßtisch aufgenommenen Punkte in einer Aufnahmssektion ist sehr wechselnd und schwankt zwischen 500—2000.

Um den Vorgang bei der Festlegung der einzelnen Punkte zu demonstrieren, sei auf Tafel II, Fig. 2 *MNPQ* eine Triangulierungssektion und *mnpq* eine Aufnahmssektion (und zwar Kolonne 4, Zone 5 der Triangulierungssektion). Seien *ABC* drei Punkte des Dreiecksnetzes erster Ordnung; *a*, *b*, *c*, *d* . . . Punkte des Netzes zweiter Ordnung. *b* ist beispielsweise bestimmt, sobald *AB* durch Berechnung des Dreiecksnetzes erster Ordnung bekannt wurde und die Winkel *BAb*, *ABb* beobachtet wurden. Desgleichen ist *a* durch die Richtung der beiden Visuren *Aa* und *Ca* bestimmt. Sind aber noch die Winkel *bAa*, *bCa* und überdies durch die Aufstellung in *a* und *b* die Winkel *Aab*, *baC* und ebenso *Aba*, *abc*, *cbC*, *CbB* usw. gemessen, so werden infolge der Beobachtungsfehler nicht alle Winkel den geometrischen Bedingungen genügen, und ebenso wie dies schon bei dem Dreiecksnetze erster Ordnung nötig war, auch jetzt für das Netz zweiter Ordnung ausgeglichen werden müssen. An dieses (ausgeglichene) Dreiecksnetz zweiter Ordnung werden durch die vorangegangenen Winkelmessungen die Punkte α, β, γ, δ, ε, ζ . . ., von denen mindestens drei in einer Aufnahmssektion liegen müssen, angeschlossen. Aus der Figur ist aber ersichtlich, daß die Zahl der

---

* Eine andere, sehr praktische Einteilung wurde von Oberst Hartl (vgl. „Die Landesvermessung in Griechenland", 4. Bericht; Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, Bd. XIII, 1894) gewählt. Ein „topographisches Blatt" ist ein Trapez von 6 Breiten- und 6 Längenminuten (daher 25 derselben in zwei Gradkartenblättern), so daß dessen Grenzen mit den 30′ Grenzen der Gradkartenblätter zusammenfallen würden. Es zerfällt bei der Aufnahme 1 : 10000 in 4 „Blattabteilungen", jede von diesen bei der Aufnahme 1 : 5000 in 4 Katastersektionen, welche selbst für die Aufnahme 1 : 2500 in 4 „Katastersektionsviertel" geteilt werden, wobei in allen diesen Darstellungen das Zeichenblatt rund 55 *cm* von Nord nach Süd und rund 44 *cm* von Ost nach West erhält.

Ähnlich ist die Einteilung für die neue Militärmappierung in Österreich-Ungarn. Ein „Aufnahmsblatt" ist für dieselbe $3\frac{3}{4}$ Breitenminuten hoch, $7\frac{1}{2}$ Längenminuten lang, so daß die Grenzen mit den Begrenzungen der Gradkartenblätter zusammenfallen (vgl. Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, Bd. XXI, S. 100).

Punkte zweiter Ordnung, wie sie hier gewählt wurde, zu groß ist, um gemeinschaftlich ausgeglichen zu werden und dennoch zu gering, um eine genügend sichere Bestimmung aller Punkte der Aufnahmssektionen zu erhalten; so werden z. B. ζ und ε aus den an a und c gemessenen Winkeln bestimmt, aber durch geringe Fehler in diesen könnte die Lage der Punkte ζ und ε wesentlich gegeneinander verschoben und damit die ganze Aufnahme in der Sektion verfälscht werden. Es wird daher nötig, die Zahl der Zwischenpunkte zu vermehren, aber die Ausgleichung in zwei Teile zu zerfällen: eine Triangulation zweiter Ordnung mit strenger Ausgleichung nach Art derjenigen im Netze der ersten Ordnung und eine Triangulation dritter Ordnung, die durch Kontrollvisuren sichergestellt wird.

5. Nach dem hier Gesagten sind die in den beiden Abteilungen der niederen und höheren Geodäsie verwendeten Instrumente im Prinzipe nicht wesentlich verschieden und unterscheiden sich nur in Details, die nach dem angestrebten Zwecke im einen oder andern Falle hinzugefügt werden. Es sollen daher hier die in der Geodäsie überhaupt verwendeten Instrumente gemeinschaftlich behandelt werden; über ihre Verwendung wird dann in den späteren Kapiteln gesprochen. Somit zerfällt das Werk in die folgenden drei Abteilungen:

I. Die Instrumentenkunde.
II. Die niedere Geodäsie.
III. Die höhere Geodäsie.

I. ABTEILUNG.

Die Instrumentenkunde.

A. Instrumententeile.

Gewisse Instrumententeile sind allen Instrumenten gemein und da ihre Verwendung, Zweck und Behandlung überall dieselbe ist, kann von denselben vorerst gemeinschaftlich gesprochen werden.

I. Die Schraube.

6. Die Schraube findet bei Instrumenten eine mannigfache Anwendung. Als erste derselben ist diejenige zur Verbindung von Instrumententeilen zu erwähnen; der Kopf derselben ist zylindrisch und ragt dann über der Oberfläche des oberen Metallteiles hervor (Fig. 2 *a*) oder er ist nach abwärts konisch verschmälert und dann in der oberen Platte versenkt (Fig. 2 *b*).

a *b*

Fig. 2.

Man kommt mitunter in die Lage, ein Instrument behufs Reinigung auseinandernehmen zu müssen, um es dann wieder selbst zusammenzusetzen. Die zum Anziehen (d. i. Festschrauben) beziehungsweise Lüften (d. i. Lockern) und Herausnehmen der Schrauben verwendeten Schraubenzieher sollen so gewählt werden, daß die Breite ihrer Schneide genau gleich dem Durchmesser des Kopfes ist: sind die Schraubenzieher zu schmal, so gleiten sie leicht ab und verderben den Einschnitt des Schraubenkopfes; sind sie zu breit, so ruinieren sie den Metallteil in welchem die Schraube versenkt wird. Findet man die ausgehobene Schraube stark verschmutzt, so wird dieselbe mit einem weichen Lappen, wenn nötig mit einem weichen, nicht splitternden

Holze, am besten Lindenholz, gereinigt. Auch die Bohrungen für die Schraube, die Muttergewinde, sind in derselben Weise, eventuell mit einem zugespitzten Lindenholze, welches eingeschraubt wird, so daß das Muttergewinde eine Schraube in das Holz schneidet, zu reinigen.

Sind zwei Instrumentenbestandteile durch mehrere Schrauben verbunden, so sind meist alle nach demselben Gewinde geschnitten und gleich lang. Mitunter erfordern aber darunter liegende Teile, daß eine oder einige Schrauben etwas kürzer sind. Dem Geübten werden bei der neuerlichen Zusammensetzung hieraus keine Schwierigkeiten entstehen; der Anfänger wird es sich am besten stets zur Regel machen, die Schrauben neben dem betreffenden Instrumententeile in der richtigen Reihenfolge anzuordnen. Beim Einschrauben ist strenge darauf zu sehen, daß die Schraube nicht schief eingeschraubt wird, da sonst Stahlschrauben in Messingstücken leicht neue Gewinde schneiden und die alten verdorben werden. Man dreht dabei praktisch immer zuerst die Schraube $\frac{1}{2}$—$\frac{3}{4}$ Gänge zurück (entgegengesetzt dem Zeiger einer Uhr) und wird dann fühlen, wie das Gewinde der Schraube in das Muttergewinde einfällt. Ferner hat man zu beachten, daß man stets erst die die beiden Teile verbindenden Schrauben einzusetzen hat, ohne sie festzuziehen, und dieselben erst dann, wenn sämtliche Schrauben ohne Verspannung in ihren bezüglichen Versenkungen eingesetzt sind, so fest als möglich anzieht.

7. Die zweite Form der Schrauben sind die Korrektionsschrauben, auch Berichtigungs-, Rektifizier- oder Justierschrauben genannt. Während die Befestigungsschrauben nach der Zusammenstellung des Instruments nicht berührt werden, werden die Korrektionsschrauben von Zeit zu Zeit verwendet, um die gegenseitige Lage von Instrumententeilen zu berichtigen. Diese Schrauben haben kleine zylindrische Köpfe, an welchen nebst dem für die Benutzung eines Schraubenziehers dienenden Einschnitte noch zwei aufeinander senkrecht stehende Bohrungen bei *a* und *b* Fig. 3 sind, in welche behufs Drehung der Schraube ein Stift, „Dorn" genannt, eingesteckt wird. Meist wird nämlich die volle Umdrehung durch die Anordnung des Instruments gehindert; man steckt dann den Dorn in die eine Bohrung *a*, dreht um 90°, zieht den Stift heraus und wiederholt das Verfahren, indem der Dorn in die zweite Bohrung *b* gesteckt wird.

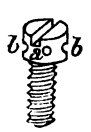


Fig. 3.

Die Schrauben können auf Zug und Druck wirken; in Fig. 4 wird der obere Teil rechts gehoben, wenn das Schräubchen 4 gelüftet und 2 angezogen wird, hingegen gesenkt, wenn 2 gelüftet und 4 angezogen wird. In Fig. 5 wird die Hebung des Oberteiles rechts durch Lüften von 3 und Anziehen von 1, das Senken durch Lüften von 1 und Anziehen von 3 bewirkt. Ähnlich wirken die beiden Schrauben *r* und *r'* in Fig. 6. In Fig. 4 können beide Seiten des Oberteiles gehoben und gesenkt werden, in Fig. 5 nur die rechte Seite, während links die beiden Teile vereinigt sind und bei der Korrektion durch die Schräubchen am rechten Ende etwas federn. Man hat strenge darauf zu achten, stets vor dem Anziehen der einen Schraube die andere zu lüften, da sonst schädliche Spannungen entstehen und selbst die Gewinde verdorben werden können.

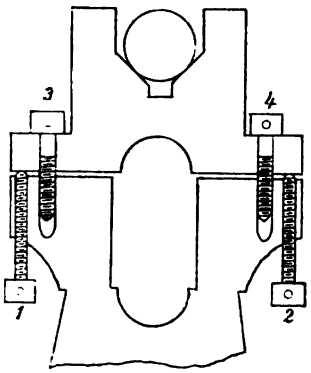


Fig. 4.

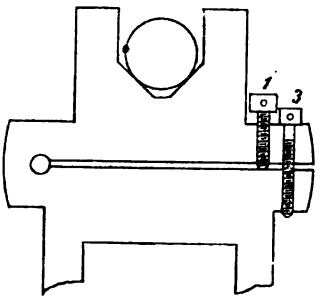


Fig. 5.

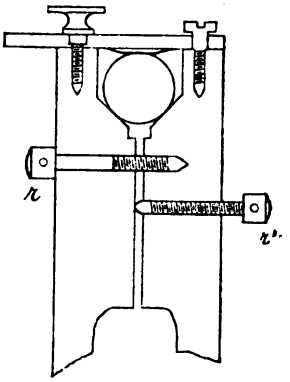


Fig. 6.

Eine andere Form der Korrektionsschrauben sind die einander entgegenwirkenden Fig. 7, wobei eine derselben auch durch eine entgegenwirkende Feder ersetzt werden kann (Fig. 7 *c*), welche den zwischen ihr

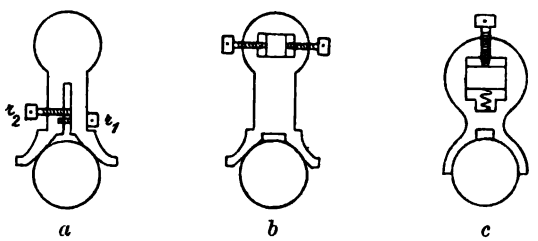


Fig. 7.

und der Schraube liegenden Ansatz, die sogenannte „Nase" an die Spitze der gegenüberliegenden Schraube andrückt; durch Lüften der Schraube wird dieses Ende durch den Druck der Feder gehoben, durch Anziehen der Schraube wird das Ende gesenkt, wobei die Feder etwas mehr gespannt wird. In vielen Fällen wird die Feder (vgl. Fig. 64 *a*) um die Rektifizierschraube herumgelegt; ist sie etwas länger, so wird sie in einem eigenen zylindrischen Gehäuse, dem sogenannten Federgehäuse (vgl. die Fig. 11, 18 und 19) untergebracht.

8. Klemmung und Feinbewegung. Schrauben, welche jederzeit zur gegenseitigen Lageänderung von Instrumententeilen dienen sollen, werden nicht mit dem Schraubenzieher oder Dorn bewegt, sondern erhalten große, gesägte, sogenannte „geränderte" oder „ränderierte" Köpfe. Da dieselben aber nur eine langsame Bewegung gestatten, so muß noch für eine zweite, raschere Bewegung gesorgt sein. Man nennt diese die grobe, jene die Feinbewegung. Soll die grobe Bewegung möglich sein, so muß die Feinbewegung ausgeschaltet werden, soll diese benutzt werden, so muß die grobe Bewegung aufgehoben werden. Die Verbindung beider kann auf verschiedene Weise erzielt werden und sollen die Haupttypen hier vorgeführt werden.

α) Die geradlinige Schlittenführung: Der zu bewegende Teil P liegt zwischen zwei Platten a, a' (Fig. 8), welche seine seitliche Verschiebung

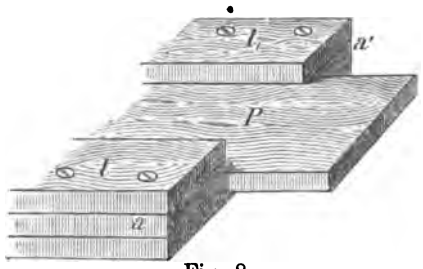


Fig. 8.

hindern; die Hebung oder Senkung wird durch je ein auf a, a' aufgeschraubtes Plättchen l, l' verhindert, das über a, a' etwas vorragt.

Hierher gehört auch die sogenannte Schwalbenschwanzführung, bei welcher der Querschnitt des zu führenden Teiles P (Fig. 9) ein flaches, gleichschenkliges Trapez ist und die seitlich mit versenkten Schrauben aufgesetzten Führungsleisten l, l' die Parallelführung ohne Abhebung ermöglichen.

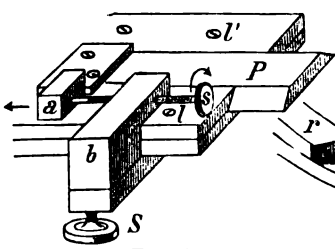


Fig. 9.

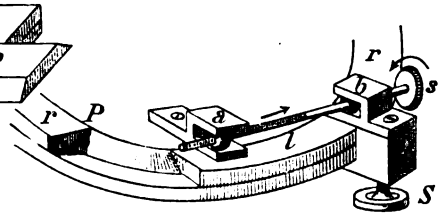


Fig. 10.

β) Beide Einrichtungen können auch für die Drehung einer kreisförmigen Platte um ihr Zentrum verwendet werden. In Fig. 10 bildet die Leiste l einen Ring r, der innen nach demselben Kegelmantel abgedreht ist wie die innere kreisförmige Scheibe P an ihrer Außenseite, so daß sich diese sicher, ohne zu schlottern, in der entstehenden Nut drehen kann. Beim Anschrauben des Ringes r, namentlich aber der Backen l, l' (Fig. 8 und 9) hat man jedoch darauf zu achten, daß man den zu führenden Plättchen P nicht zu viel Spielraum läßt, daß man sie aber nicht zu fest klemmt. Man wird daher die anzuschraubenden Teile erst lose anlegen, die Schräubchen einsetzen, ohne sie festzuziehen, dann dieselben mit gleichmäßigem Druck der Hand, und zwar von allen Seiten gleichmäßig an die Platte P andrücken und jetzt erst die sämtlichen Fixierschrauben fest anziehen. Wird die Bewegung zu streng, was namentlich bei sehr genau gearbeiteter Schwalbenschwanzführung der Kreise (Fig. 10) vorkommen kann, so genügt ein ganz schwaches Lüften der Fixierschrauben, um ruhige, gleichmäßige Drehung zu erzielen.

Um die grobe Bewegung mit der Feinbewegung zu verbinden, hat die Platte P (Fig. 9) einen Arm a, der mittels einer Schraube s mit der „Klemme“ b verbunden ist. b besteht aus zwei Platten, von denen die eine einen genügenden Ausschnitt hat, um die Lagerplatten von P zu fassen. Durch die

Schraube S sind dieselben miteinander verbunden und durch Anziehen von S wird der Arm b mit der Schraube s und der mit dieser verbundene Arm a, folglich auch P an dem Lager befestigt. Wird S gelüftet, so kann sich b der Länge nach verschieben und nimmt mittels des Armes a die Platte P mit (grobe Bewegung); wird S geklemmt, so ist diese freie Bewegung gehemmt, hingegen kann a gegen b, somit auch P gegen die Lagerung l noch mittels der Feinbewegungsschraube s um mäßige Beträge verstellt werden. Die Einrichtung für die Kreisbewegung ist ähnlich, erfordert aber einige Änderungen. Einerseits wird die Führung etwas einfacher, da eine einzige Führungsleiste l (Fig. 10) genügt, anderseits aber findet bei der Bewegung der Kerne a, b gegeneinander eine Drehung der Bohrungen für die Schraube s statt; um daher Spannungen zu verhindern, sind daselbst Kugeln eingelagert, welche sich um Achsen drehen, die auf der Ebene von P senkrecht stehen, so daß die beiden Bohrungen in a, b bei jeder beliebigen Entfernung derselben in eine gerade Linie fallen können.

Ist die Schraube in a fest gelagert und enthält b die Mutter für die Schraube (Fig. 9), so wird, wenn S geklemmt wurde, beim Einschrauben von s (Drehen im Sinne des Uhrzeigers, Rechtsdrehung) der Kern a nach links geschoben; ist aber die Schraube s in b unverschieblich (die Kugel in b ist dann fest an der Schraube s befestigt und in zwei kleinen kugelförmigen Höhlungen der oberen und unteren Platte von b gelagert) und enthält die Kugel a das Muttergewinde für die Schraube s (Fig. 10), so wird beim Rechtsdrehen der Schraube s der Kern a und damit die Platte P nach rechts gerückt.

γ) Eine andere Art der Klemmung und Feinbewegung, welche bei Bewegungen von Instrumenten um Achsen angewendet wird, ist die folgende: An dem zu drehenden Instrumententeile ist ein Arm a oder ein ganzer Kreisring entweder durch starke Reibung oder durch eine Druckschraube K (Fig. 11) angebracht; im ersten Falle wird die Verstellung des Armes oder Kreises dadurch erzielt, daß der Instrumententeil, an dem dieselben aufsitzen, festgehalten und der Kreis unter Anwendung mäßiger Kraft vorsichtig gedreht wird. Im zweiten Falle kann eine gegenseitige Verstellung bewirkt werden, wenn die Druckschraube gelüftet wird; zur Verbindung wird diese angezogen. Um aber einen nachteiligen Druck auf einen Punkt zu vermeiden, wirkt die Druckschraube nicht auf die Achse selbst, sondern auf ein Plättchen m; oder aber, der Arm B (Fig. 12) ist an dem Ringe R befestigt, in der Mitte geschlitzt, so daß durch Anziehen der Schraube S die beiden federnden Teile von B soweit genähert werden, daß der Arm auf der Achse A festsitzt. Meist

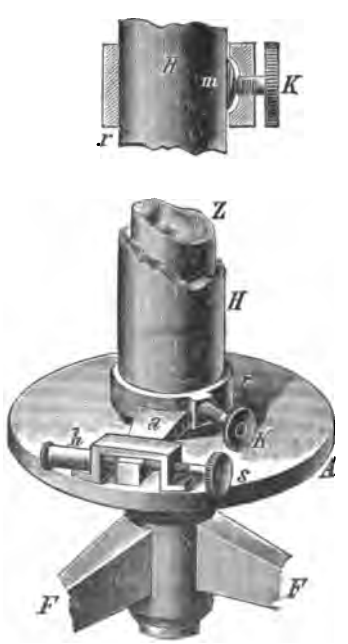


Fig. 11.

ist aber der Arm B ungeschlitzt und der Kreisring ist auf der entgegengesetzten Seite geschlitzt, mit kurzen Ansätzen versehen, welche, einen zweiten Arm B' bildend, die Klemmschraube S tragen (vgl. die Fig. 180). In allen Fällen ist ein zu starkes Anziehen der Schraube S unnötig; es genügt, dieselbe soweit anzuziehen, daß eine starke Reibung zwischen der Achse A und dem Führungsringe des Armes B entsteht.

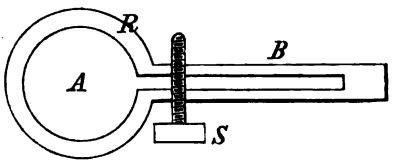


Fig. 12.

Die Parallelführung und Sicherung gegen ein Verschieben in der Richtung der Achse nach auf- oder abwärts wird durch zwei sogenannte Flanschringe erzielt, welche oberhalb und unterhalb des Ringes r an der Achse angeschraubt sind.

Für die Feinbewegung ist dann das äußere Ende des Armes B zwischen zwei an dem Achsenlager befestigten Feinbewegungsschrauben (s, Fig. 11) gelagert, von denen die eine wieder durch eine meist in einem Federgehäuse h befindliche Feder ersetzt wird, die den zu bewegenden Arm an die gegenüberliegende Feinbewegungsschraube andrückt.

δ) Für die Feinbewegung von Kreisen wird mitunter, wo es sich nicht um die äußerste Feinheit handelt, auch die Schraube ohne Ende verwendet. Der Kreis K (Fig. 13) ist längs seines ganzen Umfanges nach derselben

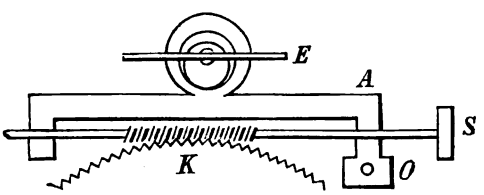


Fig. 13.

Gewindehöhe geschnitten wie die Schraube S, welche sich an ihn anlegt und durch deren Drehung der Kreis K gegen die Bodenplatte, auf welcher S befestigt ist, gedreht wird. Behufs freier Bewegung des Kreises muß aber die Schraube S vom Kreise K entfernt werden können, was durch Drehung der Exzenters E um 180° bewirkt wird, wodurch der die Schraube S tragende Arm A um O hinreichend weit zurückgeschlagen wird, damit das Kranzgewinde von K frei an der Schraube vorübergehen kann. Für größere Präzision ist aber diese Einrichtung nicht brauchbar, da sich der tote Gang der Schraube (s. Nr. 25) hier mehr wie in allen anderen Konstruktionen fühlbar macht.

9. Die Mikrometerschraube. In feinster Ausführung dient die Schraube zur Messung von Verschiebungen als Meßschraube oder Mikrometerschraube. Hat das Schraubengewinde der sonst in derselben Weise wie bisher gelagerten Schraube (vgl. Fig. 14) die Schraubenganghöhe

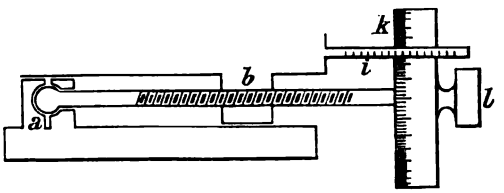


Fig. 14.

von a *mm*, so entspricht einer vollen Umdrehung der Schraube eine Verschiebung des einen Lagers gegen das andere um a *mm*. Bei feinen Schrauben wählt man Schraubenganghöhen von $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{5}$ *mm*. Aber selbst Unterabteilungen dieser Verschiebung kann man messen, wenn der Schraubenkopf, der zu diesem Zwecke größer ausgeführt wird, die sogenannte Trommel k (Fig. 14), geteilt wird. Wird die bei a fest gelagerte Schraube rechts gedreht, so wird b nach rechts verschoben; die Größe der Drehung wird an dem Index i gelesen, dessen Teilungsstriche in Entfernungen gleich der Schraubenganghöhe angebracht sind, so daß man die Zahl der ganzen Schraubengänge unmittelbar ersieht, während man die Bruchteile der ganzen „Revolutionen", d. i. Umdrehungen, an der Teilung des Kopfes abliest. Diese Teilung kann an der Platte des Kopfes angebracht sein (vgl. Fig. 69) oder auch wie in Fig. 14 auf dem Mantel der Trommel, eine sogenannte Stirnteilung.

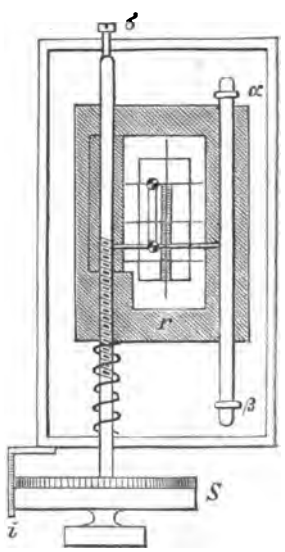


Fig. 15.

Die Ausführung zeigt Fig. 15. Der Rahmen r wird durch einen in einer zylindrischen Bohrung laufenden, bei α uud β gelagerten Stift geführt, durch die Schraube S bewegt und durch eine um diese geschlungene Feder an die Spitze des gegenüberstehenden Schräubchens σ gedrückt. Die Größe der Verschiebung wird an dem Kopfe S und dem Index i abgelesen.

Bei einer anderen häufig angewandten Form der Meßschrauben enthält deren Kopf k (Fig. 16) das Muttergewinde, so daß beim Rechtsdrehen des Kopfes die Schraube und mit derselben der an derselben angelagerte Instrumententeil (Rahmen) r nach rechts gezogen wird. Die Parallelführung von r wird dadurch bewirkt, daß der Rahmen zu beiden Seiten der ganzen Länge nach parallel durchbohrt wird und an zwei zylindrischen Stangen, welche bei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ an der Bodenplatte eines flachen Kästchens P befestigt sind, geführt wird. Damit der Schraubenkopf k mit dem Rahmen nicht ohne Drehung der Schraube sich nach rechts verschiebt, muß k stets an

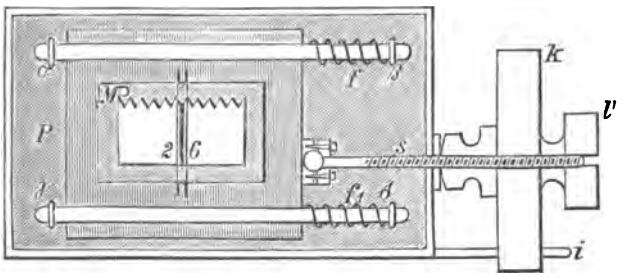


Fig. 16.

das Kästchen angepreßt werden, was durch die beiden Federn f, f^1, die den Rahmen stets nach links drücken, bewirkt wird.*

Alles, was früher über die Behandlung der Schraube gesagt wurde, gilt in noch erhöhtem Maße für die Meßschraube; ein besonderes Augenmerk muß auf die ruhige und gleichmäßige Bewegung gelegt werden, was durch schwaches Einfetten mit Öl erreicht wird. Man verwendet dazu das feinste, vollständig säurefreie Knochenöl, von welchem mittels eines Stiftes ein kleines Tröpfchen auf die Schraube gebracht wird, worauf dieselbe einigemale hin- und hergedreht wird, damit sich die Schraube ihrer ganzen Länge nach einölt. Man bringe nie zu viel Öl auf die Schraube, da ein Überschuß stets nur dem Ankleben von Staub Vorschub leistet.

Die Teilungen der Kopfschraube, welche meist auf versilbertem Grunde angebracht sind (Silberteilungen), sollen sowie Teilungen überhaupt nie angefaßt werden; zum Anfassen dienen die kleinen, nicht geteilten, sondern geränderten Köpfchen l (Fig. 16).

II. Dreifuß und Stativ.

10. Der Dreifuß. Um Instrumente sicher aufzustellen, dürfen dieselben nicht mit einer Fläche, wenn dieselbe auch noch so eben poliert wäre, auf einer Unterlage aufliegen, sondern sie werden an drei Punkten unterstützt (über die Unterstützung auf vier Punkten s. unten). Das Instrument wird zu diesem Zwecke mit drei vom Zentrum unter Winkeln von 120° ausgehenden Armen A_1, A_2, A_3 versehen und behufs richtiger Aufstellung (Horizontalstellung von Kreisen, Vertikalstellung von Achsen) sind an den Enden dieser Arme die Muttergewinde für drei „Stellschrauben" S_1, S_2, S_3 geschnitten (Fig. 17). Meist sind diejenigen Teile der Arme, in welchen sich die Stellschrauben bewegen, durchsägt, so daß dieselben etwas federn und daher an die etwas stärkeren Schrauben sanft angepreßt werden. Ist die richtige Stellung des Dreifußes erzielt, so können die beiden federnden Teile durch

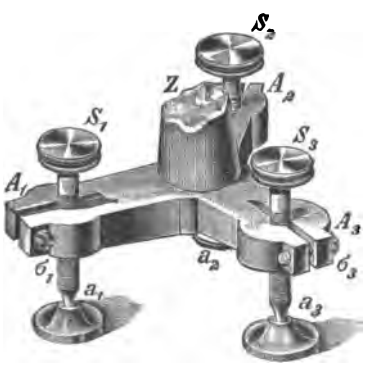


Fig. 17.

* Vgl. auch Nr. 21 und 26.

seitliche Versicherungsschrauben σ angezogen werden, wodurch die Reibung der Stellschrauben in den Muttergewinden soweit vergrößert wird, daß dieselben durch bloßes unvorsichtiges Anstreifen nicht mehr bewegt werden können.

Die unteren Spitzen a der Stellschrauben ruhen auf eisernen Fußplatten welche mitunter (s. Fig. 180) in radialer Richtung geschlitzt sind, damit nicht bei höherer oder niederer Temperatur durch Längenänderungen der Arme des Dreifußes Verspannungen entstehen. Mitunter ist die eine Fußschraube des Dreifußes als Mikrometerschraube mit geteiltem Kopfe eingerichtet und gestattet so nicht nur die Verstellung, sondern auch die Messung der dadurch bewirkten Neigungsänderung (vgl. Fig. 69).

Statt des Dreifußes wird bei nicht zu schweren Instrumenten die Unterstützung auf vier Punkten gewählt, wobei jedoch meist nur zwei Schrauben vorhanden sind, während ihnen gegenüber starke Federn wirken. Die Verbindung ist dann durch ein Nußgelenk hergestellt. Dieses besteht aus

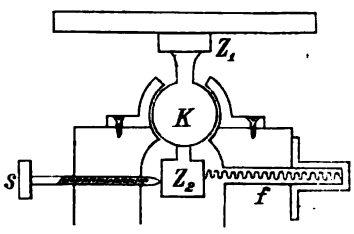


Fig. 18.

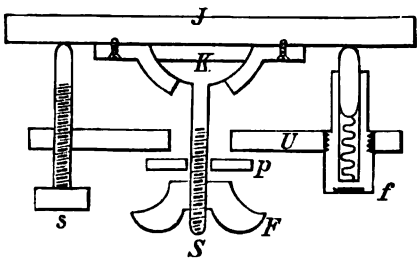


Fig. 19.

einer Kugel oder einem Kugelabschnitt K, welcher in einer nach demselben Radius ausgedrehten kugelförmigen Höhlung eingelegt ist. Die Kugel K (Fig. 18) trägt auf der einen Seite mittels eines Zapfens z_1 das Instrument, während ein zweiter Zapfen z_2 durch zwei Stellschrauben s und zwei Gegenfedern f,* in zwei aufeinander senkrechten Richtungen angebracht, die Rektifikation des Instrumentes gestattet. Bei anderen Instrumenten (Fig. 19) ist das Kugelsegment K fest und der Oberteil J mittels der Schrauben s und Gegenfedern f wieder in zwei aufeinander senkrechten Richtungen drehbar. Für größere Drehungen ist es aber praktisch, die Nuß K ebenfalls nicht an dem Untersatze U zu befestigen, sondern an derselben einen starken, unten in eine Schraube S, die sogenannte Herzschraube oder Zentralschraube endenden Stift anzubringen, so daß nach vollzogener Richtigstellung durch Anziehen der Flügelmutter F die Nuß K und damit der ganze Oberteil mittels der Platte p an den Untersatz U angepreßt wird.

Der Dreifuß gestattet aber nur mäßige Verstellungen des Instrumentes behufs Richtigstellung und ist ausreichend bei stabiler Aufstellung, wenn die Unterlage, auf welcher der Dreifuß aufgesetzt wird, genügend und bleibend horizontal gestellt ist. Im freien Felde, wo diese Bedingung oft nicht

* Doch findet man auch zwei Paare gegeneinander wirkende Schrauben (also statt der Feder f ebenfalls eine Schraube).

zu erfüllen ist, bedient man sich als Untersatz, auf welchem die Instrumente mittels des Dreifußes aufgestellt werden, der

11. Stative. *a*) Das einfachste Stativ ist das Stockstativ. Auf einem festen Stocke, der mit einem eisernen Schuh versehen ist, mittels dessen er entsprechend tief in die Erde gerammt werden kann, befindet sich ein Zapfen, auf welchen das auf einer Hülse montierte Instrument (ebenso wie in Fig. 20) aufgesetzt werden kann. Stockstative sind aber nur bei sehr leichten Instrumenten (kleinen Taschennivellierinstrumenten, Skizzenbrettchen usw.) verwendbar.

b) Bei dem Zapfenstativ (Fig. 20) wird das auf einer Hülse H festsitzende Instrument auf den zylindrischen oder schwach konischen Zapfen Z des Stativs gesteckt und daselbst mittels der Druckschraube S festgeklemmt. Der Zapfen Z ist mittels einer kleinen Kopfplatte P in fester

Fig. 20.

Fig. 21.

Verbindung mit einem zweiten nach abwärts gehenden prismatischen Zapfen Z_1, an dessen drei Seitenflächen Schraubenbolzen befestigt sind, um welche die drei Füße F_1, F_2, F_3 drehbar sind (der Fuß F_3 ist in der Figur abgenommen). Die Füße müssen in die richtige Lage gebracht werden, so daß der Zapfen Z möglichst vertikal, daher Horizontalkreise des Kreises schon hierdurch sehr nahe horizontal werden. Zum Fixieren der Füße in den ihnen gegebenen Stellungen dienen die Flügelmuttern *f*.

c) Für größere Instrumente werden fast ausschließlich die Scheibenstative verwendet, welche eine größere Festigkeit der Aufstellung gewähren. Der Dreifuß des Instrumentes wird auf die hölzerne Kopfplatte P aufgestellt, welche wieder von drei langen Füßen getragen wird. Die Verbindung dieser mit der Kopfplatte ist in sehr verschiedener Weise ausgeführt. Bei der in Fig. 21 dargestellten Form enden die Füße F_1, F_2, F_3 (F_3 ist wieder getrennt gezeichnet) oben in kreisrunde Bolzen *a*, welche in der Mitte etwas vertieft und von Metallringen *m* umgeben sind, welche Zapfen *z* tragen, die durch die Bohrungen *b* der Kopfplatte gehen und oben mittels der Schrauben *s* fixiert sind. Die Bolzen *a* sind daher die Achsen, um welche

sich die Füße F in den Lagern m drehen; sind dieselben in die richtige Lage gebracht, so werden durch kräftiges Anziehen der Schrauben s die Bolzen a an die Kopfplatte fest angedrückt und die Füße dadurch fixiert.

Die Schraubenmuttern s sind bei manchen Instrumenten derart eingerichtet, daß sie gleichzeitig als Fußplatten für den darauf zu stellenden Instrumentendreifuß dienen können (vgl. Fig. 24). Bei manchen Stativen ist die Kopfplatte durch ein eisernes Gerippe ersetzt, welches die drei für die Zapfen z durchbohrten Zylinder C_1, C_2, C_3 (Fig. 22) verbindet, in welchem Falle dann auch die Schraubenmuttern s als Fußplatten für den Dreifuß dienen.

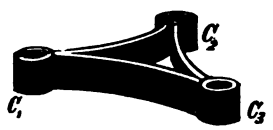


Fig. 22.

Fig. 23.

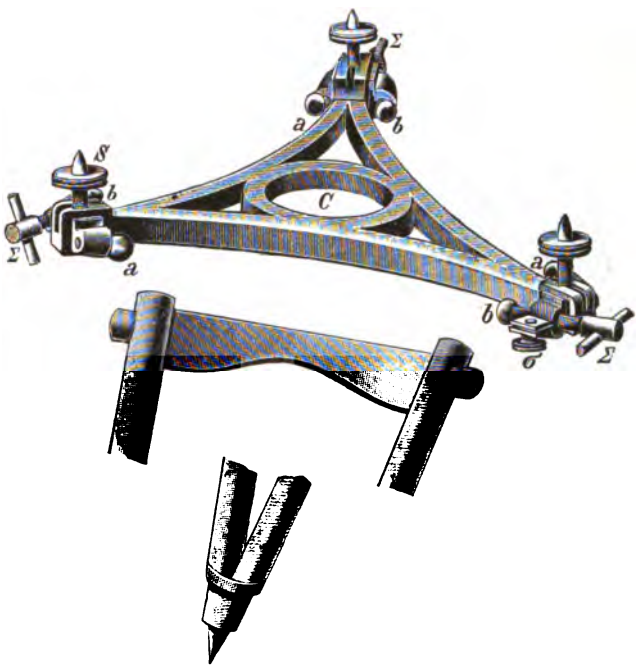


Fig. 24.

Bei dem folgenden Stative (Fig. 23), bei welchem die Kopfplatte ebenfalls eine hölzerne Scheibe oder aber ein eisernes durchbrochenes Gerippe sein kann, besteht jeder der drei Füße im oberen Teile aus zwei parallelen, im unteren Teile nach abwärts konvergenten Schienen, welche durch eine eiserne, in eine Schraube endende Spindel s an die Kerne k der Kopfplatte befestigt und um die Spindel als Horizontalachse gedreht werden können; die Fixierung geschieht mittels der Flügelmuttern m, welche an die Schraube der Spindel s angeschraubt werden, wobei durch den an der einen Seite befindlichen Kopf s und die an der entgegengesetzten Seite befindliche Mutter m die beiden Schienen fest an die Kerne k gepreßt werden.

Je breiter der Abstand der beiden Schienen eines Fußes ist, desto sicherer ruht die Kopfplatte auf ihren Füßen. Bei dem Stative Fig. 24 findet die Verbindung zwischen den Füßen und dem Stativ durch die Kugeln ab statt, von denen a an einem Ende fest, b durch Schrauben Σ verstellt wird, so daß die Distanz ab geändert werden kann. Ist dieselbe soweit verkleinert

daß die Kugeln in den entsprechenden Pfannen der Verbindungsstücke der Füße ruhen, so werden die Versicherungsschrauben σ angezogen und dadurch eine unbeabsichtigte Drehung der Schrauben Σ verhindert. Dieses Stativ wurde von G. Starke für seinen Meßtisch gewählt, wobei die Tischplatte auf den Schrauben S aufliegt.

Auf geneigtem Terrain wird die genäherte Horizontalstellung der Kopfplatte durch verschiedene Neigung der Füße erzielt. Ist jedoch das Terrain sehr stark geneigt, so würde diese Einrichtung nicht genügen und es sind dann zu diesem Zwecke die Füße (bei manchen Instrumenten nur ein Fuß) zum Verlängern eingerichtet, indem sich zwischen den beiden Schienen eine dritte hinauf- und herabschieben und durch eine Druckschraube feststellen läßt. Derartige Stative sind aber weniger fest.

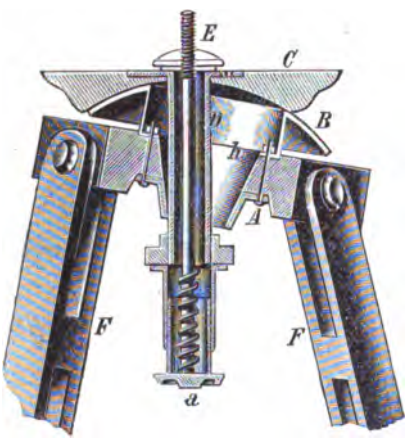


Fig. 25.

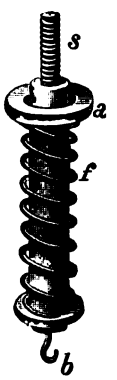


Fig. 26.

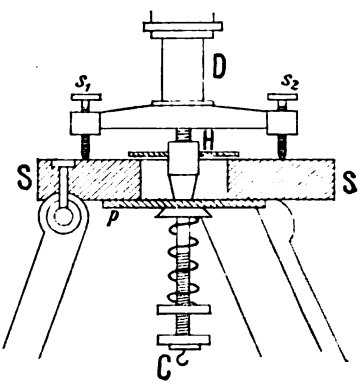


Fig. 27.

Eine besondere Einrichtung findet sich bei den Stativen, die z. B. beim „Nivellement général“ und „Service géographique“ in Frankreich verwendet werden.* Eine perspektivische Ansicht desselben ist bei den Nivellierinstrumenten Nr. 54 (Fig. 158) gegeben, welche gleichzeitig die Aufstellung eines Instrumentes auf dem Stative zeigt. In der vertikalen Projektion (Aufriß) stellt sich dieses Stativ nach Fig. 25 dar. Die mit einer weiten Öffnung versehene Kopfplatte hat in dieser ein unten konisch, oben zylindrisch geformtes, hohles Metallstück A angeschraubt, an welches oben eine an der Außenseite polierte Kugelkalotte B angegossen ist, auf welcher eine zweite Kopfplatte C mit ihrer unten nach dem gleichen Halbmesser wie B kugelförmig abgedrehten Fläche aufliegt. Die Platte C trägt unten einen langen schmalen Zylinder D für die Herzschraube, doch wird infolge der Einrichtung der Höhlung A die allseitige freie Beweglichkeit von C durch diese

* Vgl. den „Bericht über das Präzisions-Nivellement in Europa, vorgelegt der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung bei der Versammlung in Genf 1893 von A. Ritter v. Kalmár, Neufchatel 1894“, Tafel 13 und 14. Dieses Stativ wurde übrigens schon 1825, wenn auch nicht in dieser Vollkommenheit, für den Meßtisch vorgeschlagen; vgl. A. Laussedat, „Recherches sur les instruments, les methodes et le dessin topographiques“, Tome I, aperçu historique, Paris 1898, pag. 154.

nicht behindert, so daß C bei selbst stark geneigter Kopfplatte A noch horizontal gestellt werden kann. Selbstverständlich erfordert es die Stabilität der Aufstellung in diesem Falle, daß stets einer der drei Füße gegen den tiefsten Punkt zum Schutze gegen das Vornüberfallen gerichtet wird.

Die einfache Aufstellung des Instruments mittels seines Dreifußes auf dem Scheibenstative würde eine erhebliche Unsicherheit in der Stellung zur Folge haben. Deshalb hat die Scheibe des Statives eine Durchbohrung, durch welche entweder ein in eine Schraube endigender Zapfen des Instruments (die Zentralschraube, vgl. Fig. 19) herabreicht, an welche eine Schraubenmutter von unten angeschraubt wird; oder aber es kann durch die Bohrung der Kopfplatte von unten ein Zapfen (Fig. 26) gesteckt werden, der in die Säule des Dreifußes von unten eingeschraubt wird. Durch eine starke Feder f, welche um diese Herzschraube geschlungen ist und welche sich einerseits gegen die Scheibe des Statives, anderseits gegen eine unten befindliche Platte stützt, wird diese und damit das Instrument nach abwärts, daher fest an das Stativ gedrückt. An einem unten angebrachten Haken b kann ein Lot angehängt und damit das Instrument zentrisch über einen gewissen Punkt des Feldes gestellt werden. Die Verbindung des Stativs mit dem Dreifuße ist aus Fig. 27 ersichtlich.

III. Achsen.

12. Bei Winkelmeßinstrumenten hat man stets die Aufgabe zu lösen, den Unterschied der Richtungen nach zwei verschiedenen Objekten zu bestimmen. Dieses geschieht durch Drehung der Visierlinie aus der einen in die andere Richtung, zu welchem Zwecke die Visiervorrichtung (Diopter, Fernrohr, s. diese) um Achsen drehbar eingerichtet sein muß. Handelt es sich um die Messung von Horizontalwinkeln, so muß die Visiervorrichtung um eine vertikale Achse, bei der Messung von Vertikalwinkeln hingegen um eine horizontale Achse gedreht werden können. Eine Einrichtung zur Verbindung beider zeigt die schematische Fig. 28. Die zylindrische oder schwach konische vertikale Achse V ist in einer Büchse D gelagert. Damit nicht das volle Gewicht des Instrumentenoberteils auf dem Untersatz aufruht, was sowohl eine Erschwerung der Drehung als auch eine vorzeitige Abnutzung von Achse und Achsenlager zur Folge haben würde, ruht in den meisten Fällen die Achse unten mittels einer Schraube σ (Fig. 29) auf einer starken, federnden Platte P; die Schraube σ wird so lange verstellt, bis die Achse sicher, aber ohne zu großen Druck in ihrer Büchse liegt. Zur Verminderung der Reibung ist übrigens die vertikale Umdrehungsachse nur an den beiden Enden in voller Stärke, der Büchse anliegend, während sie in der Mitte ausgedreht ist, so daß sich zwischen ihr und dem Lager ein Zwischenraum befindet.

Die genaue Vertikalstellung wird erreicht durch die entsprechende Benutzung der Fußschrauben S (Fig. 28) des Dreifußes D.

An der Vertikalachse V sind die Träger t befestigt, welche oben die Lager für die horizontale Umdrehungsachse HH' haben. Auch diese Achse ruht nur mit den äußersten Enden, den sogenannten „Zapfen“, die aus

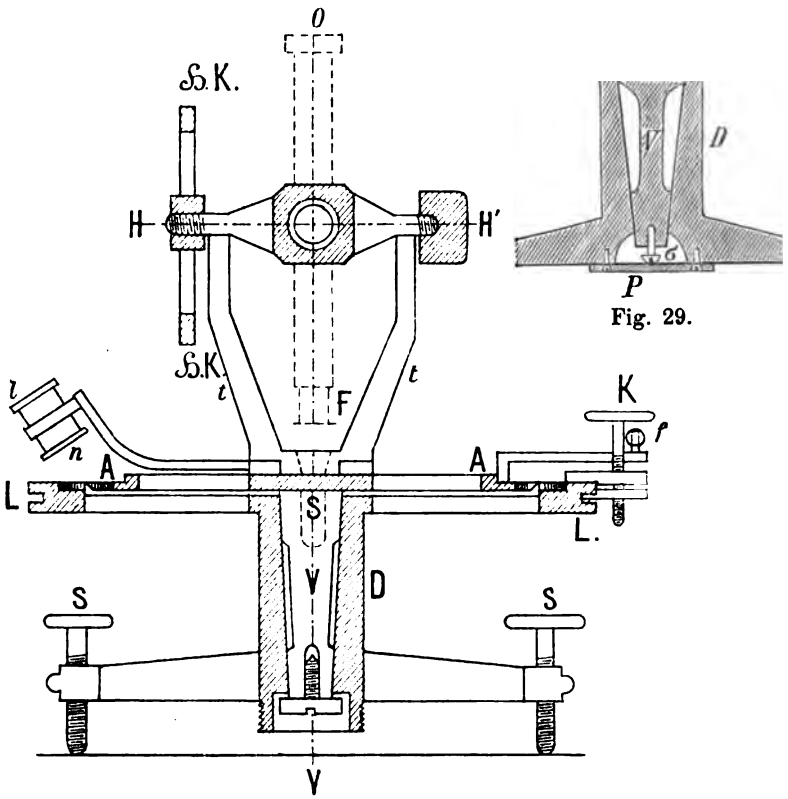


Fig. 29.

Fig. 28.

hartem Stahl gearbeitet und genau zylindrisch abgedreht sind, auf den meist aus Rotguß* verfertigten Zapfenlagern, die zumeist V-förmig oder ⌣-förmig, nur bei manchen Instrumenten ringförmig sind.** Behufs genauer Horizontalstellung sind beide oder doch wenigstens eines der beiden Lager auf den Trägern *t* zu heben und zu senken, was auf eine der in Fig. 4, 5 oder 6 angedeuteten Art erzielt werden kann. Bei großen Instrumenten (Meridiankreisen, Universalinstrumenten) ist übrigens auch dafür gesorgt, daß das Instrument nicht mit dem ganzen Gewichte auf den Lagern ruht, sondern teilweise getragen wird.*** Die Zapfen und Zapfenlager müssen sorgfältig vor Rost geschützt werden. Sind dieselben verschmutzt, so werden sie mit weichen Läppchen, die nötigenfalls mit etwas Petroleum befeuchtet werden, um eingetrocknetes Öl zu entfernen, gereinigt; dann mit möglichst

* Ertel verwendet hierzu eine neue Metallegierung „Silbronit, die sich selbst bei stärkstem Gebrauche kaum abnutzt, die Farbe und Härte des Stahls besitzt, weder anläuft noch rostet und die früher aus Phosphorbronze oder Rotmetall hergestellten Fernrohrringe an Dauerhaftigkeit weit übertrifft."

** Breithaupt verwendet bei seinen Präzisions-Nivellierinstrumenten die eine Lagerung des Fernrohres und der Libelle mittels ebener Basisfläche auf kugelförmig abgedrehtem Schraubenkopf, der auch zur Justierung dient (vgl. *p'* Fig. 157).

*** Vgl. Nr. 50.

wenig Knochenöl eingefettet, so daß sich eben noch ein dünner Überzug findet, der als Schutz gegen Feuchtigkeit dient, aber nicht die Ablagerung von Staub fördert.

IV. Visiervorrichtungen.

13. Diopter. Die verwendeten Visiervorrichtungen sollen einen doppelten Zweck erfüllen: sie sollen erstens ermöglichen, eine bestimmte Richtung, die „Visur" genauer zu fixieren und zweitens das Sehen mit freiem Auge, welches für sehr entfernte oder zu kleine Gegenstände unsicher wird, zu unterstützen.

Um bestimmte Richtungen festzulegen, hatte man schon seit alten Zeiten die Diopter. Auch heute werden dieselben noch bei Instrumenten niedrigerer Ordnung verwendet. Fig. 30 zeigt ein mit Dioptern versehenes Lineal. Bei AS befindet sich ein Okulardiopter, dem Auge zugekehrt, ein in einen Rahmen geschnittener Längsschlitz, bei FB ein Objektivdiopter,

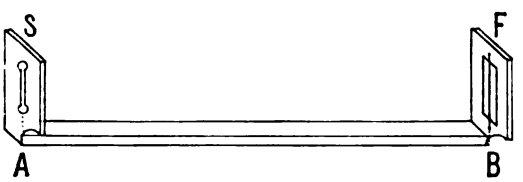


Fig. 30.

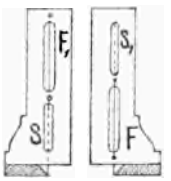


Fig. 31.

dem Objekte zugekehrt, bei welchem in einem breiteren rechteckigen Spalt ein Roßhaar oder ein feiner Draht aufgezogen ist. Bei der Beobachtung sieht man durch AS hinein, über den Faden in BF nach dem anzuvisierenden Objekte hin. Fig. 31 zeigt zwei Diopter, welche zum Visieren nach beiden Richtungen eingerichtet sind; sind dieselben an den beiden Enden eines Armes (Lineales) befestigt, so kann man unten von S über F hin nach der einen Seite, oben von S_1 über F_1 hin nach der entgegengesetzten Seite visieren.

Das Okulardiopter kann auch ein einfacher Punkt sein, das Objektivdiopter ein in einem quadratischen oder kreisförmigen Ausschnitt befestigtes Fadenkreuz, d. h. zwei gegeneinander senkrecht gespannte Fäden oder Drähte. Die mit demselben erreichbare Genauigkeit ist aus dem Grunde eine beschränkte, weil das Auge gleichzeitig einen entfernten Gegenstand und die nahe befindlichen Fäden des Objektivdiopters deutlich sehen sollte, was aber nicht möglich ist.

14. Linsen. Eine weit größere Genauigkeit kann man durch Visieren mit dem Fernrohr erreichen, welches bei allen zu feineren Arbeiten verwendeten Instrumenten zur Anwendung kommt.

Die Linse ist ein von zwei Kugelflächen begrenzter Teil eines lichtbrechenden Mediums (Glas, Bergkristall, auch Flüssigkeiten). Die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte $O_1 O_2$ (Fig. 32) heißt die Achse der Linse.

Man unterscheidet zweierlei Linsen: 1. Sammellinsen oder Konvexlinsen,

und zwar bikonvexe, plankonvexe und konkav-konvexe Linsen und 2. Zerstreuungslinsen oder Konkavlinsen, und zwar bikonkave, plankonkave und konvex-konkave Linsen.

In jeder Linse gibt es zwei sogenannte Knotenpunkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Verbindungslinie des vorderen (dem Gegenstande zugekehrten) Knotenpunktes K_1 (Fig. 32) mit dem Gegenstande A und die Verbindungslinie des hinteren (dem Bilde zugehörigen) Knotenpunktes K_2 mit dem Bilde P parallel sind, d. h. daß der Strahl AK_1 ungebrochen und nur um das Stück K_1K_2 parallel mit sich selbst verschoben durch die Linse hindurchgeht. Strahlen, welche wie Aa_1 parallel auf die Vorderfläche der Linse auffallen, werden bei den Sammellinsen so gebrochen, daß sie sich in einem Punkte F_2 (Fig. 32a), dem zweiten Brennpunkte, vereinigen.

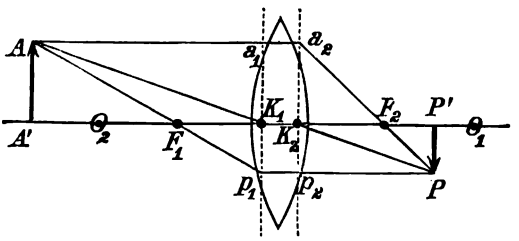


Fig. 32 a.

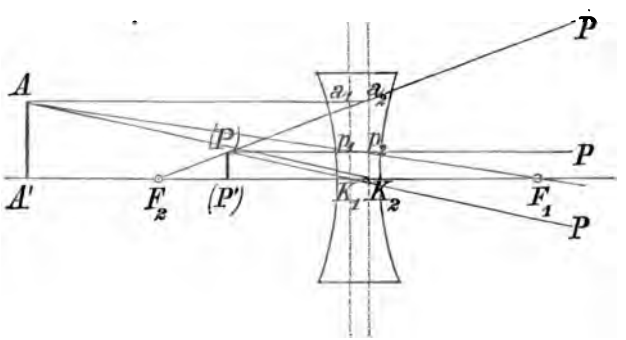


Fig. 32 b.

Strahlen, welche parallel austreten sollen (p_2P), müssen von einem Punkte F_1, dem ersten Brennpunkte, ausgehen. Bei den Zerstreuungslinsen treten die parallel auffallenden Strahlen Aa_1 (Fig. 32b) so aus, als ob sie von einem Punkte F_2 kämen, welcher daher kein wirklicher Brennpunkt ist, und ebenso werden Strahlen, die parallel austreten sollen (p_2P), gegen einen Punkt F_1 hin konvergieren müssen (Ap_1). Dabei findet in beiden Fällen die Brechung so statt, daß der auffallende Strahl bis zu der durch K_1 auf die Linsenachse senkrecht gelegten Ebene, die erste Hauptebene, reicht und der gebrochene Strahl von dem korrespondierenden* Punkte der zweiten Hauptebene ausgeht.

* Korrespondierende Punkte der beiden Hauptebenen sind solche, welche in einer Parallelen zur Linsenachse liegen. In älteren Werken und selbst noch in neueren Werken über niedere Geodäsie werden die über ein halbes Jahrhundert alten optischen Untersuchungen von Gauß noch immer ignoriert. Man findet noch den „optischen Mittelpunkt"

In der Figur sind drei Strahlen: 1. $AK_1—K_2P$, 2. $Aa_1—a_2F_2P$, 3. $AF_1p_1—p_2P$ gezogen, die sich für die Sammellinse in demselben Punkte P schneiden. Für die Zerstreuungslinse aber schneiden sich nicht diese Strahlen, sondern sie scheinen von einem Punkte (P) auszugehen, welcher das virtuelle oder geometrische Bild des Punktes A heißt.

Die Entfernungen der Brennpunkte von den Knotenpunkten sind, wenn auf beiden Seiten der Linse dasselbe Medium (Luft) sich befindet, gleich; und diese Entfernung $K_1F_1 = K_2F_2 = f$ heißt die Brennweite der Linse. Ist die Entfernung des Gegenstandes vom ersten Knotenpunkte $A'K_1 = G$ die Gegenstandsweite, die Entfernung des Bildes vom zweiten Knotenpunkte $P'K_2 = B$ die Bildweite, $A'A = g$ die Größe des Gegenstandes, $P'P = b$ die Größe des Bildes, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken $AA'K_1$ und $PP'K_2$ daß

$$\frac{G}{B} = \frac{g}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ist, und aus den Dreiecken F_1AA' und $F_1p_1K_1$:

a) für die Sammellinse

$$\frac{G-f}{g} = \frac{f}{b}$$

oder

$$\frac{G-f}{f} = \frac{g}{b} = \frac{G}{B}$$

und daraus

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{B} = \frac{1}{f}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\,a)$$

b) für die Zerstreuungslinse

$$\frac{G+f}{g} = \frac{f}{b}$$

oder

$$\frac{G+f}{f} = \frac{g}{b} = \frac{G}{B}$$

und daraus

$$\frac{1}{G} - \frac{1}{B} = -\frac{1}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\,b)$$

Beispiel: Sei für eine Sammellinse mit der Brennweite $f = 30$ *cm* ein

---

der Linse eingeführt, welcher derart definiert wird, daß die Verbindungslinie jedes Punktes des Objekts mit seinem Bilde durch denselben geht. Die Bildkonstruktion mit Hilfe der Knotenpunkte ist aber durchaus nicht schwieriger. Hingegen muß bemerkt werden, daß die Brennweiten im allgemeinsten Falle nicht von den Knotenpunkten, sondern von zwei anderen Punkten, den sogenannten Hauptpunkten, zu zählen sind, welche mit den Knotenpunkten nur dann zusammenfallen, wenn auf beiden Seiten der Linse dasselbe brechende Medium ist. Ist dieses nicht der Fall, wie z. B. bei Immersionssystemen, so werden die Beziehungen etwas andere und auch die beiden Brennweiten werden nicht gleich.

Gegenstand von $g = 10$ *cm* Größe in der Entfernung $G = 75$ *cm*, so folgt nach $(2a)$:

$$\frac{1}{75} + \frac{1}{B} = \frac{1}{30}, \text{ daher } \frac{1}{B} = \frac{1}{30} - \frac{1}{75} = \frac{45}{2250} = \frac{1}{50}$$

oder $B = 50$ *cm*, d. h. das Bild entsteht in der Entfernung von 50 *cm* vom zweiten Knotenpunkte. Für die Bildgröße b erhält man dann aus (1):

$$\frac{75}{50} = \frac{10}{b}, \text{ folglich } b = 6\tfrac{2}{3}\ cm$$

und ähnlich für die Zerstreuungslinse. Die Formel $(2b)$ geht übrigens aus $(2a)$ hervor, wenn man die Brennweite der Zerstreuungslinse negativ nimmt und allgemein die Bildweite positiv oder negativ, je nachdem das Bild auf der entgegengesetzten oder auf derselben Seite der positiven Objektweite, d. i. der einfallenden Strahlen liegt* und die Bildgröße positiv oder negativ, je nachdem das Bild verkehrt oder aufrecht ist.

Beispiel: Es sei für eine Linse $f = -30$ *cm*, d. h. es ist eine Zerstreuungslinse. Wegen des negativen Vorzeichens von f hat man jetzt aber Formel $(2a)$ anzuwenden. Ist $G = 70$ *cm*, $g = 10$ *cm*, so folgt zunächst $\frac{1}{70} + \frac{1}{B} = \frac{1}{-30}$; $\frac{1}{B} = -\frac{1}{30} - \frac{1}{70} = -\frac{100}{2100} = -\frac{1}{21}$; $B = -21$ *cm* und dann $\frac{10}{b} = \frac{70}{-21}$; $b = -3$ *cm*, das Bild ist daher auf Seite der einfallenden Strahlen und aufrecht.

Einfache Linsen sind aber mit Fehlern behaftet; die in der Mitte auffallenden Strahlen (Zentralstrahlen) und die am Rande auffallenden (Randstrahlen) vereinigen sich nicht im selben Punkte (sphärische Abweichung oder sphärische Aberration) und ebenso vereinigen sich vom selben Punkte ausgehende verschiedenfarbige Lichtstrahlen nicht in demselben Punkte (chromatische Abweichung). Weißes Licht wird dabei in seine Elementarfarben aufgelöst und die Bilder erscheinen mit farbigen Säumen. Man verwendet daher Kombinationen von zwei oder mehr Linsen, bei denen beide

* Objektweite und Objektgröße sind dabei positiv genommen; die erstere wird nur in dem einen Ausnahmefall negativ, wenn Lichtstrahlen konvergent auffallen, z. B. aus einer Sammellinse austreten und vor ihrer Vereinigung eine zweite Linse treffen. Man hat dann keinen wirklichen Gegenstand, aber man kann als Objekt für die zweite Linse das (nicht wirklich vorhandene) Bild der ersten Linse, aber mit negativem G, ansehen. Für diesen Fall wird es auch besser, für die Objektgröße positive und negative Zahlen zuzulassen. Die Objektgröße ist positiv, wenn das Objekt oberhalb der Linsenachse liegt, negativ, wenn es unterhalb derselben liegt; das umgekehrte aber gilt für das Bild. Für das erste Beispiel war $B = 50$ *cm*; fallen diese Strahlen auf eine Zerstreuungslinse von 30 *cm* Brennweite, die 10 *cm* hinter der ersten Linse steht, so ist für diese $G' = -40$ *cm*, $f' = -30$ *cm*, daher $\frac{1}{-40} + \frac{1}{B'} = \frac{1}{-30}$; $B' = -120$ *cm*, d. h. das Bild liegt 120 *cm* von der zweiten Linse auf der Seite der auffallenden Strahlen; weiter folgt $g' = -6\frac{2}{3}$ *cm* und daher $\frac{-40}{-120} = \frac{-6\frac{2}{3}}{b'}$, folglich $b' = -20$ *cm*, d. h. das Bild liegt oberhalb der Linsenachse (auf derselben Seite wie der ursprüngliche Gegenstand).

Arten von Fehlern weggeschafft werden können. Derartige Linsenkombinationen wirken dann genau so wie einfache Linsen: jedes solche System hat zwei Hauptebenen, zwei Knotenpunkte, zwei Brennpunkte und demnach eine Brennweite, welche die Äquivalentbrennweite des Systems heißt. Eine „achromatische Sammellinse" kann dabei nur aus Sammellinsen oder aus Sammel- und Zerstreuungslinsen kombiniert sein,* wirkt aber so wie eine einzige Sammellinse, d. h. sie hat eine positive Äquivalentbrennweite. Desgleichen hat eine „achromatische Zerstreuungslinse" eine negative Äquivalentbrennweite, wenn auch einzelne Linsen des Systems positive Brennweiten haben. Es wird allgemein für die Kombination von zwei Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 die Äquivalentbrennweite f bestimmt durch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

wenn die Linsendicken und deren Abstand so klein sind, daß sie gegenüber f_1 und f_2 vernachlässigt werden können. Sei z. B. $f_1 = 30$ *cm*, $f_2 = 18$ *cm*, so wird $\frac{1}{f} = \frac{1}{30} + \frac{1}{18}$ und daraus $f = 11\frac{1}{4}$ *cm*, d. h. zwei Sammellinsen mit den Brennweiten 30 und 18 *cm* sind im Effekte identisch mit einer einzigen Sammellinse von $11\frac{1}{4}$ *cm*; ebenso liefert eine Kombination von einer Sammellinsen von 24 *cm* und einer Zerstreuungslinse von 32 *cm* Brennweite wegen $f_1 = 24$, $f_2 = -32$ eine Äquivalentbrennweite von $f = +96$ *cm*, ist also noch eine Sammellinse.

Konstruiert man (mittels zweier Strahlen, z. B. mittels des Achsenstrahles AK_1K_2P und eines Strahles parallel zur Achse Aa_1a_2P) oder rechnet für die folgenden verschiedenen Lagen der Gegenstände gegenüber der Linse** deren Bilder, so findet man:

a) für die Sammellinsen: 1. Ein unendlich entferntes Objekt gibt ein Bild im Brennpunkte. 2. Rückt der Gegenstand näher, so wird das stets verkehrte Bild weiter wegrücken und wird dabei immer größer, bleibt aber kleiner als der Gegenstand, bis 3. der Gegenstand in die doppelte Brennweite rückt; dann ist das Bild ebenfalls in der doppelten Brennweite, verkehrt und mit dem Objekte gleich groß. 4. Rückt der Gegenstand noch näher, so wird das Bild weiter wegrücken, verkehrt und vergrößert sein, bis 5. von einem Gegenstande im Brennpunkte parallele Strahlen austreten,

* Ist nämlich die Zerstreuungslinse schwächer, so werden die Strahlen noch immer vereinigt, aber die Brennweite wird größer. Wenngleich chromatische und sphärische Abweichung weggeschafft sind, so wird dabei das Bild eines ebenen Gegenstandes nicht in einer Ebene liegen, sondern nach einer krummen Fläche, z. B. einer sehr flachen Kugelschale gekrümmt erscheinen; man nennt dieses die „Bildkrümmung". Ist dieser Fehler ebenfalls weggeschafft, so sagt man das Bild ist geebnet. Ein anderer Fehler ist der, daß bei schief einfallenden Strahlen der Vereinigungspunkt ein anderer für die in der Achsenebene und ein anderer für die dazu senkrechten Strahlen ist: Astigmatismus; ist dieser Fehler weggeschafft, so heißt das Linsensystem anastigmatisch. Fehlerfreie Linsensysteme werden durch Kombination von Linsen aus Flint- und Crownglas hergestellt; symmetrische Doppelobjektive heißen Aplanate.

** Wenn im folgenden von „Linsen" schlechtweg gesprochen wird, so sind darunter möglichst fehlerfreie (achromatische, anastigmatisch geebnete) Linsenkombinationen gedacht.

(also gleichsam ein unendlich großes Bild in unendlicher Entfernung geben). (Für alle diese Fälle gilt Fig. 32 *a*). 6. Rückt der Gegenstand noch näher, innerhalb der einfachen Brennweite, so wird ein virtuelles, aufrechtes, vergrößertes Bild auf derselben Seite des Objektes entstehen (Fig. 33).

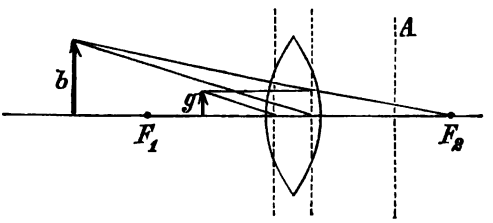


Fig. 33.

b) Zerstreuungslinsen. 1. Wo immer der Gegenstand sich befindet, entsteht stets ein verkehrtes, verkleinertes, virtuelles Bild auf derselben Seite des Gegenstandes (Fig. 32 *b*). 2. Würde der Gegenstand auf der andern Seite der einfallenden Strahlen innerhalb der einfachen Brennweite entstehen, d. h. fallen konvergente Strahlen so auf, daß sie sich innerhalb der einfachen Brennweite auf der andern Seite der Linse vereinigen würden, so entsteht ein reelles, aufrechtes, vergrößertes Bild auf der Seite der einfallenden Strahlen.

15. Beim Sehen mit freiem Auge wirkt dieses als einfache Sammellinse. Auf dem Augenhintergrunde entsteht ein verkleinertes, verkehrtes Bild und der Gegenstand wird nur dann scharf gesehen, wenn das Bild wirklich auf der Netzhaut (nicht vor oder hinter derselben) entsteht und eine gewisse Größe hat. Nähert oder entfernt sich der Gegenstand, so wird das Bild nur dann auf der Netzhaut bleiben, wenn sich die brechenden Medien des Auges entsprechend verändern. Bei einem normalsichtigen Auge fällt das Bild eines unendlich entfernten Gegenstandes ohne Veränderung des Auges auf die Netzhaut; für jede Annäherung des Gegenstandes ist eine Verstärkung der Krümmung der Linse und eine Annäherung derselben an die Hornhaut, eine „Akkommodation des Auges", erforderlich. Bis zu einer gewissen Entfernung kann dieses ohne Anstrengung geschehen; diese Entfernung beträgt für normalsichtige Augen etwa 20—25 *cm*, welche man die deutliche Sehweite nennt; kleinere Gegenstände erscheinen gerade in dieser Entfernung am deutlichsten, weil mit der Annäherung des Gegenstandes aus einer größeren Entfernung der Wert $\frac{g}{G}$, d. i. der Winkel, unter welchem der Gegenstand gesehen wird und welcher der Gesichtswinkel heißt, größer wird und infolgedessen auch die Bildgröße *b* auf der Netzhaut wächst. Bei noch stärkerer Annäherung des Gegenstandes muß aber das Auge viel stärker akkommodieren, was mit erheblicher Anstrengung verbunden und bei zu großer Annäherung überhaupt nicht mehr möglich ist; zu nahe Gegenstände können daher nicht mehr deutlich gesehen werden.

Für kurzsichtige Augen ist die deutliche Sehweite kleiner; die Gegen-

stände müssen näher gebracht werden, erscheinen aber dann unter größeren Sehwinkeln; das kurzsichtige Auge sieht daher schärfer, nimmt zarte Details deutlicher wahr.

Wenn die Gegenstände zu klein sind, so daß in der deutlichen Sehweite der Gesichtswinkel, unter welchem sie erscheinen, zu klein würde, so bedient man sich der Lupen und Mikroskope; sind die Gegenstände zwar groß, aber zu weit, so wird der Gesichtswinkel ebenfalls zu klein und man bedient sich zur Beobachtung derselben des Fernrohrs.

16. Die Lupe ist eine einfache Linse (oder eine Linsenkombination), durch welche ein Gegenstand g von einem auf der Seite von F_1 (Fig. 33) befindlichen Auge betrachtet wird. Da g innerhalb der einfachen Brennweite liegt, so entsteht ein aufrechtes, vergrößertes, virtuelles Bild b und man hat dafür zu sorgen, daß die Entfernung von b bis zum Auge, das etwa in A sich befinden möge, gleich der deutlichen Sehweite des Auges sei. Die Lupe wird zumeist in einer passenden Fassung in jener Entfernung von dem zu betrachtenden Gegenstande angebracht, daß das Bild in der deutlichen Sehweite entsteht, wobei der Ort des Auges durch eine an der richtigen Stelle angebrachte Blende, d. h. einen Ring, durch welchen man durchzusehen hat, fixiert wird. Ein kurzsichtiges Auge muß allerdings die Lupe nähern, ein weitsichtiges entfernen.

Unter Vergrößerung der Lupe versteht man die Vergrößerung des Gesichtswinkels, welche daraus resultiert, daß das Bild b an Stelle des Gegenstandes g in der deutlichen Sehweite betrachtet wird; es ist, wenn D die deutliche Sehweite ist:

der Gesichtswinkel für den Gegenstand in der deutlichen Sehweite $\alpha = \frac{g}{D}$

der Gesichtswinkel für das Bild in der deutlichen Sehweite . . . $\beta = \frac{b}{D}$,

daher die Vergrößerung

$$v = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{g} = \frac{B}{G}.*$$

Die Vergrößerung wächst, wenn die Brennweite f kleiner wird; stark vergrößernde Lupen sind daher solche mit kleinen Brennweiten, wofür man meist Kombinationen von zwei und drei Sammellinsen nimmt. Die gebräuchliche Form der Lupen, wie sie zum Ablesen von Teilungen usw. an den

---

* Eigentlich $v = -\frac{b}{g}$, weil b negativ ist; demnach auch $v = -\frac{B}{G}$. Dieser Ausdruck läßt sich noch anders schreiben; da nach (2 *a*) S. 27 $-\frac{B}{G} = -\frac{B}{f} + 1$ ist und $B = d - D$, wenn d die Entfernung des Auges von der Lupe ist, so wird

$$v = \frac{D-d}{f} + 1.$$

Ist z. B. die deutliche Sehweite des Auges 25 *cm* (D), der Abstand des Auges von der Lupe 3·5 *cm* (d) und die Brennweite der Lupe 6 *cm* (f), so wird $v = 4{\cdot}6$ gefunden. Für ein kurzsichtiges Auge mit $D = 15$ *cm* würde sich bei demselben Abstande des Auges von der Lupe $v = 3$ finden.

Fig. 34.

geodätischen Instrumenten verwendet werden, gibt Fig. 34, in welcher ein Sektor aus der Fassung herausgeschnitten ist, durch welchen man die innere Einrichtung derselben ersehen kann. Die Fassung ist mittels eines Armes drehbar angebracht, so daß sie nach Belieben über verschiedene Punkte der Teilung (dem ganzen Nonius entlang) verschoben werden kann.

17. Bei dem Mikroskop entsteht von einem Objekte auf T (einer Teilung, Fig. 47) ein reelles vergrößertes Bild in der Ebene E; das Bild wird um so größer, je näher man die dem Objekte zugekehrte Linse, das Objektiv, zu dem Gegenstande bringt, doch so, daß der Gegenstand sich stets außerhalb der einfachen Brennweite befindet. Das in der Ebene E entstehende Bild wird dann noch durch ein Okular, welches durch eine einfache Lupe dargestellt wird, betrachtet. Bezeichnet man die Länge des Mikroskops vom Objektiv bis zur Ebene E mit L (hier die Bildweite für das durch das Objektiv erzeugte Bild), die Entfernung des Objektivs vom Gegenstande mit e, so ist die Objektivvergrößerung wieder durch

$$v_1 = \frac{b'}{g}$$

gegeben, wenn b' die Größe des in E entstehenden Bildes ist; daraus folgt auch

$$v_1 = \frac{b'}{g} = \frac{L}{e}.$$

Für das Okular ist nun b' der Gegenstand, so daß die Okularvergrößerung $v = \frac{b}{b'}$ ist; da nun die Gesamtvergrößerung

$$V = \frac{b}{g}$$

ist (die Winkel, unter welchen verschiedene Objekte, hier das gegebene Objekt g und dessen erst durch das Objektiv und dann durch das Okular vergrößerte Bild in der deutlichen Sehweite, d. h. in derselben Entfernung gesehen werden, sind ja stets proportional den Objekten selbst), so folgt

$$V = \frac{b}{b'} \cdot \frac{b'}{g} = v \cdot v_1^*$$

Die Objektivvergrößerung wächst, wenn die Entfernung e abnimmt. Die Vergrößerung braucht nicht allzu stark genommen zu werden; eine fünffache Objektivvergrößerung, eine vierfache Okularvergrößerung reichen meist aus; bei zu starken Vergrößerungen treten die Unebenheiten der Teilungsfläche und die Unregelmäßigkeiten der Teilstriche ziemlich störend auf.

* oder gleich $V = \frac{L}{e}\left(\frac{D-d}{r} + 1\right)$, wenn die früheren Bezeichnungen (Nr. 16) beibehalten werden.

18. Beim **Fernrohr** gibt das Objektiv ein verkehrtes, allerdings verkleinertes Bild des Objektes, welches erst durch ein Okular, ebenfalls eine Lupe, vergrößert wird. Auch in diesem Falle handelt es sich nicht um das Verhältnis der wahren Größe des Objekts zur Größe des Bildes, sondern nur um die Verhältnisse der Gesichtswinkel. Der Gesichtswinkel α, unter welchem das Objekt gesehen wird,* ist aber hier derselbe wie der Winkel, unter dem das vom Objektiv erzeugte Bild b (Fig. 35) vom zweiten Knotenpunkte desselben erscheint, während der Winkel, unter welchem das Bild b' von n aus erscheint, derselbe ist wie derjenige, unter welchem b von n aus gesehen wird, wobei nur b' in der deutlichen Sehweite, b hingegen viel

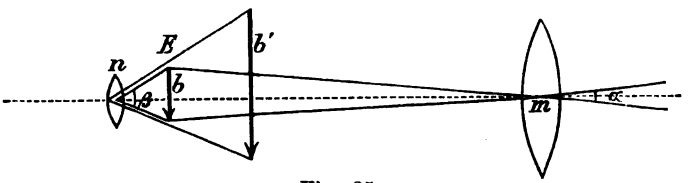


Fig. 35.

näher, also in einer für das Auge nicht brauchbaren Entfernung sich befindet. Ist nun das betrachtete Objekt sehr weit, so wird b nahe im Brennpunkte des Objektivs erscheinen, daher seine Entfernung vom Objektive gleich der Brennweite F des letzteren sein; anderseits wird die Okularvergrößerung um so größer, je näher b dem Brennpunkte des Okulars liegt und man wird die Entfernung des Bildes b vom Okular nahe gleich der Brennweite f des letzteren wählen, so daß

$$\beta = \frac{b}{f},\ \alpha = \frac{b}{F},\ \text{daher}\ v = \frac{F}{f}$$

ist. Die Vergrößerung wächst daher mit der Brennweite des Objektivs und wird vergrößert durch scharfe Okulare, d. h. solche mit kleiner Brennweite. Auch hier ist eine zu starke Vergrößerung unnötig und oft untunlich. Wird das vom Objektiv erzeugte Bild stark vergrößert, so werden auch Bewegungen desselben in demselben Maße vergrößert. Derartige Bewegungen treten aber infolge der Luftwallungen auf und können bei starken Okularvergrößerungen zur Undeutlichkeit und selbst bis zum völligen Verschwinden des Bildes führen. Mit 20—40fachen Vergrößerungen reicht man bei den meisten geodätischen Instrumenten aus.

Sind die Gegenstände in verschiedenen Entfernungen, so wird die Lage des Bildes nicht immer dieselbe sein und man muß daher die Entfernung der Bildebene E vom Objektiv verändern können. In der Ebene E muß ferner eine Marke angebracht werden, welche durch den Schnittpunkt zweier in dieser Ebene aufgespannten Spinnwebenfäden bestimmt ist. Oft ist ein ganzes Netz von Fäden, ein **Fadennetz** aufgespannt und es gilt der Kreuzungs-

* wobei wegen der großen Entfernung des Gegenstandes derselbe von m aus und von n aus unter fast demselben Winkel erscheinen.

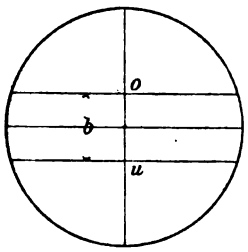


Fig. 36.

punkt der mittleren Fäden als Fixpunkt; ein solches Netz mit drei horizontalen und einem Vertikalfaden zeigt Fig. 36.*

Das Fernrohr muß so lange gedreht werden (entweder um ein Nußgelenk oder um die Instrumentenachsen) bis das Bild des anvisierten Objekts mit dem Kreuzungspunkte der Fäden zusammenfällt; man sagt dann, die Visierlinie des Fernrohrs, auch die optische Achse** oder Kollimationslinie genannt, d. i. die durch den Kreuzungspunkt der Fäden und den zweiten Knotenpunkt des Objektivs bestimmte Richtung ist auf einen Punkt eingestellt oder kurz, das Objekt ist pointiert. Für viele Fälle muß der Kreuzungspunkt der Fäden in der Längsachse des Fernrohres liegen, so daß bei der Drehung des letzteren um diese das anvisierte Objekt stets an demselben Punkte bleibt; einen eventuellen Fehler, d. i. die seitliche Stellung des Kreuzungspunktes der Fäden nennt man den Kollimationsfehler des Fernrohrs. Um ihn wegzuschaffen muß die Fadenplatte, d. i. die Platte, auf welcher die Fäden aufgezogen sind, in zwei aufeinander senkrechten Richtungen verschiebbar sein und schließlich in der definitiven Stellung festgehalten werden können, was durch die in den Fig. 38 und 39 angedeuteten Schräubchen r bewirkt wird.

Um die Fadenebene F stets in die Ebene zu bringen, in welcher das Bild entsteht, ist der sie enthaltende Teil des Fernrohrs mit einem Auszuge versehen, welcher durch Zahn und Trieb bewegt werden kann (Fig. 38 und 39).

Das Okular muß so gestellt werden, daß Faden und Bild scharf gesehen werden; ein kurzsichtiges Auge wird daher das Okular der Fadenplatte nähern, ein weitsichtiges entfernen müssen. Werden dann die Fäden scharf gesehen und ist das betrachtete Bild in derselben Ebene, so wird dieses auch scharf gesehen. Das gleichzeitige scharfe Sehen beider Gegenstände ist aber keine genügend sichere Beurteilung für die Deckung von Bild und Fäden. Wenn nämlich b (Fig. 37) das Bild des anvisierten Punktes, m der Kreuzungspunkt der Fäden ist, so kann, wenn die Entfernung derselben sehr klein ist, ein darüber befindliches Auge O noch beide ziemlich gleich scharf sehen; wenn aber das Auge sich von O nach O' seitlich ver-

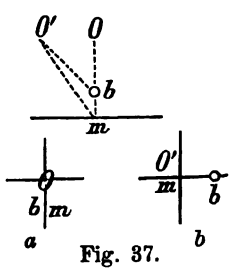


Fig. 37.

* Statt der Spinnenfäden können auch auf Glas geritzte feine Striche angewendet werden; Breithaupt wendet solche z. B. bei seinen Distanzmessern an. Starke und Kammerer nehmen nebstdem auch durch Mikrophotographie auf Glasplatten erzeugte Netze. „Dieselben zeigen vollkommen schwarze, tadellose Linien, wie die besten Spinnenfäden, vor welchen sie jedoch den Vorzug absoluter Unveränderlichkeit haben, was namentlich bei Parallelfäden zur Distanzmessung von hervorragender Bedeutung ist.“ In Italien werden bei dem Präzisionsnivellement statt dessen auch feine Platindrähte aufgezogen (vgl. A. Ritter v. Kalmár, „Bericht über das Präzisionsnivellement in Europa etc.“ 1893, S. 5).

** Die optische Achse ist eigentlich die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte der sämtlichen zentrierten Linsen; in ihr liegen auch die Knoten- und Brennpunkte der-

schiebt, so wird nicht mehr (wie in Fig. 37 *a*) Deckung von *b* und *m* stattfinden; es wird sich der entferntere Punkt *m* (Fig. 37 *b*) scheinbar nach derselben, also das Bild nach der entgegengesetzten Richtung verschoben haben. Man nennt diese Verschiebung die Fadenparallaxe.* Um sie wegzuschaffen, wird (Fig. 38 und 39) zuerst das Okular durch Verschrauben scharf auf den Faden gestellt und dann der Okularauszug so lange bewegt, bis bei der seitlichen Verschiebung des Auges keine Lageänderung des Bildes gegen die Fäden auftritt.

Als Okulare werden verwendet:

1. Das ältere Huygenssche, aus zwei Linsen bestehend (Fig. 38), zwischen welchen die Fadenplatte angebracht wird. Für die scharfe Einstellung des Okulars auf die Fäden wird nur die dem Auge nächste Linse

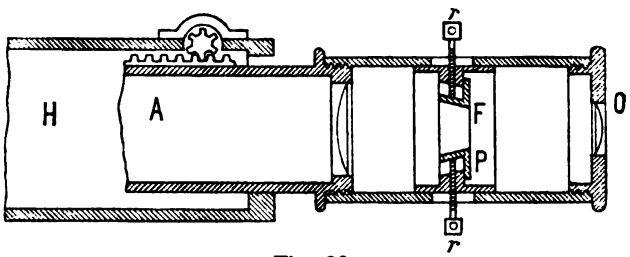


Fig. 38.

etwas genähert oder entfernt. Für sehr kurzsichtige oder weitsichtige Augen wird mitunter noch eine Verschiebung der Fadenplatte nötig, weshalb dieselbe in ihrer Fassung in dem Okularrohre mit den Schräubchen *r* in Längsschlitzen der Fassung etwas verschieblich ist.

2. Das Ramsdensche Okular, ein aus zwei Sammellinsen bestehendes System (Fig. 39), bei welchem die Fadenplatte außerhalb derselben bleibt.

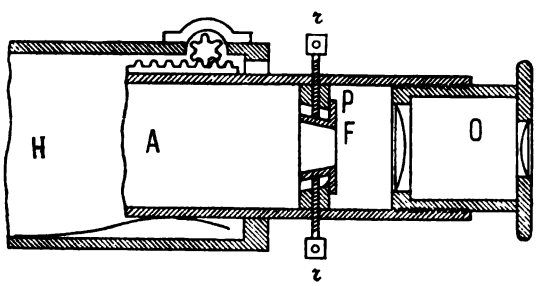


Fig. 39.

3. Das orthoskopische Okular, welches den Vorteil einer sehr geringen Verzerrung des Bildes bei selbst großem Bildwinkel hat; es besteht aus drei

selben. Man spricht aber meist von der optischen Achse eines Fernrohrs als der Kollimationslinie zum Unterschiede von dessen geometrischer Achse, welche die Achse der die Fernrohrfassung bildenden zylindrischen Röhre ist.

* Unter Parallaxe versteht man jeden Richtungsunterschied, der von der Stellung des beobachtenden Auges herrührt.

Linsen, indem die dem Auge zunächst befindliche Linse nicht einfach, sondern aus zwei sich berührenden Linsen besteht.*

19. Bestimmung des Kollimationsfehlers. Um zu sehen, ob das Fernrohr einen Kollimationsfehler hat, genügt es, das Fernrohr auf einen fernen Punkt zu kollimieren, so daß das Bild des Punktes am Fadenkreuz erscheint und dann dasselbe um seine Achse zu drehen. Bleibt dabei das Bild des anvisierten Punktes beständig am Kreuzungspunkte der Fäden, so fällt die Kollimationslinie mit der geometrischen Achse des Fernrohrs zusammen. Ist dieses nicht der Fall, so wird der Kreuzungspunkt M der Fäden (Fig. 40) beim Drehen des Fernrohrs einen kleinen Kreis beschreiben und nach der Drehung um 180° nach M_1 gekommen sein (die Fäden $a\,b$, $c\,d$ nach $a_1 b_1$, $c_1 d_1$), während das Bild des anvisierten Punktes in M bleibt.

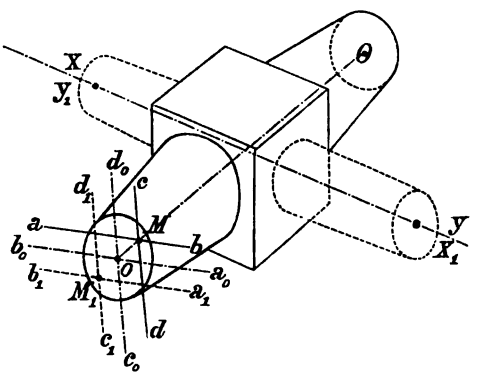


Fig. 40.

Es wird daher in der neuen Lage das Objekt in einiger Entfernung vom Fadenkreuze erscheinen und um den Kreuzungspunkt der Fäden in die geometrische Achse des Fernrohrs zu bringen, wird man in der neuen Lage die Fäden $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ mit den beiden hierzu dienenden Schraubenpaaren gegen M hin nähern, und zwar um die Hälfte des Abstandes von M, so daß sie nach $a_0 b_0$, $c_0 d_0$ kommen. Trifft man dies genau, so ist dann der Kreuzungspunkt der Fäden o; zur Probe wird man jetzt das Fernrohr neuerdings auf denselben Punkt kollimieren, so daß das Bild M mit o zusammenfallen müßte. Ist der Kollimationsfehler völlig weggeschafft, so muß beim weiteren Drehen das Bild des Punktes auf dem Kreuzungspunkte der Fäden bleiben; meist wird dieses jedoch nicht der Fall sein, aber der Fehler wird bedeutend kleiner und eine zweite, höchstens dritte Wiederholung des Verfahrens wird zum Ziele führen. Diese Methode ist jedoch nur anwendbar, wenn das Fernrohr sich in Ringen um seine geometrische Achse drehen läßt (vgl. die Fig. 148 bis 157).

Oft genügt es, wenn nur der eine Faden cd durch o hindurchgeht; will man dieses erreichen, so braucht nur cd mittels seiner Rektifikationsschräubchen verstellt zu werden; es sind dann auch nur diese vorhanden.

---

* E. Kellner, „Das orthoskopische Okular", Braunschweig 1849.

Dieses ist z. B. der Fall, wenn das Fernrohr auf einer horizontalen Achse XY befestigt ist. Dann kann es nämlich um diese Achse gedreht werden, wobei das Bild M längs des Fadens cd gleitet. In der um 180° um Oo gedrehten Lage wird es aber dann nicht auf den Faden $c_1 d_1$ fallen und man bezieht den Kollimationsfehler auf die Stellung des Fadens cd. Man sagt, der Kollimationsfehler ist null, wenn das Bild in zwei um 180° um Oo gedrehten Lagen auf dem Faden cd bleibt. In diesem Falle läßt sich aber das Fernrohr nicht um Oo drehen; man kann sich aber leicht vorstellen, daß nach einer derartigen, irgendwie ausgeführten Drehung um 180° das Achsenende X nach X_1 und Y nach Y_1 gelangt. Soll aber bei dieser Drehung die Achse wieder in die Lager hineinfallen, so muß XY senkrecht stehen zu Oo; wäre dieses nicht der Fall, so wäre z. B. X näher, Y weiter und bleibt es nach der vor genommenen Drehung, d. h. es ist dann auch X_1 näher, Y_1 weiter und X_1 kann nicht in das für Y, Y_1 nicht in das für X bestimmte Lager fallen. Oo stellt daher in diesem Falle nicht die geometrische Achse des Fernrohrs vor, sondern es ist eine Gerade, die senkrecht steht zur Achse XY. Die Drehung wird in diesem Falle ersetzt durch eine „Umlegung“. Letztere wird auch nicht als eine Drehung um Oo vorgenommen, sondern in der Art, daß man das Fernrohr aus den Lagern heraushebt, dasselbe auf irgend eine Art, z. B. im Horizonte um 180° dreht, so daß X nach X_1 und Y nach Y_1 kommt, das Fernrohr wieder einlegt und dann, weil jetzt das Objektiv O an Stelle von o, das Okular hingegen gegen O gekommen ist, das Fernrohr um seine Achse XY dreht, „durchschlägt“, bis wieder O und o auf diejenige Seite kommen, welche sie ursprünglich einnahmen, d. h. bis man wieder durch das Fernrohr gegen das früher anvisierte Objekt sehen kann. Wurde anfänglich das Bild des Objekts in M auf dem Faden cd gesehen, so wird nach der Umlegung der Faden nach $c_1 d_1$ und das Objekt M nicht mehr auf demselben sein (der Ort des Bildes am Faden selbst ist ja veränderlich; das Bild kann überall an dem Faden erscheinen, wenn man nur das Fernrohr um die Achse XY auf- und abbewegt). Den Fehler kann man wegschaffen, wenn man wieder den Faden $c_1 d_1$ um die halbe Entfernung gegen den Ort M hin nähert. Sollte eine neuerliche Umlegung, nachdem das Fernrohr wieder auf den Gegenstand kollimiert wurde, zeigen, daß der Fehler noch nicht ganz beseitigt ist, so wird das Verfahren wiederholt.*

20. Lichtstärke, Helligkeit. Die Lichtstärke des Bildes wird durch die Menge der zu dem Bilde vereinigten Strahlen, demnach durch die Größe des Objektivs bedingt. Das Bild eines leuchtenden Punktes ist nämlich stets wieder nur ein leuchtender Punkt, demnach nicht vergrößert; je mehr von den vom Punkte ausgehenden Strahlen gesammelt werden, desto lichtstärker wird das Bild. Durch das Fernrohr werden alle Strahlen vereinigt, die auf das Objektiv fallen; in die Pupille gelangen in dem Maße weniger Strahlen als die Fläche der Pupille kleiner ist. Ist der Halbmesser des Objektivs R, derjenige der Pupille r, so verhalten sich die Querschnitte der vereinigten

* Eine andere Methode, welche bei Universalinstrumenten Verwendung findet, s. Nr. 98.

Strahlenbüschel wie $R^2 : r^2$ und es ist, wenn L die Lichtstärke des Bildes im Fernrohre, l diejenige mit freiem Auge ist

$$L = \frac{R^2}{r^2} l.$$

Die Lichtstärke wächst daher mit dem Quadrate des Durchmessers des Objektivs. Ein Objektiv von „100 *cm* Öffnung", d. h. 100 *cm* Durchmesser gibt Bilder von 400mal größerer Lichtstärke als ein Objektiv von 5 *cm* Öffnung. Große Objektivöffnungen werden daher in der Astronomie verwendet, wenn man lichtschwache Sterne beobachten will. In der Geodäsie werden bei den kleinsten verwendeten Instrumenten Öffnungen von 20—25 *mm*, bei den größeren 35—50 *mm* Öffnung vollkommen ausreichen.

Handelt es sich aber um Objekte, welche vergrößert werden, d. h. um beleuchtete Flächen, so wird wohl die Gesamtlichtstärke der Fläche ebenso erhalten; diese Lichtstärke verteilt sich aber je nach der Vergrößerung auf eine verschieden große Fläche. Man versteht unter Helligkeit des Bildes die Lichtstärke eines dem Gegenstande gleich großen Flächenteiles des Bildes. Ein Flächenelement f erscheint dem freien Auge unter dem Winkel α; stellt sich dieses Flächenelement durch ein Fernrohr mit der Objektivöffnung R und der Vergrößerung v* als eine Fläche F unter dem Winkel β dar, so ist wieder

$$L = \frac{R^2}{r^2} l,$$

aber da

$$\beta = v\alpha; \quad F = v^2 f$$

ist, so wird die Lichtstärke einer gleich großen Fläche f, d. h. die Helligkeit des Bildes

$$H = \frac{R^2}{r^2 v^2} l$$

sein. Die Helligkeit nimmt daher mit dem Quadrate der Vergrößerung ab.

Für ein Fernrohr mit 40 *mm* Objektivöffnung und 10facher Vergrößerung wird, da der Pupillendurchmesser $r = 4$ *mm* angenommen werden kann, $H = l$, d. h. die Helligkeit des Bildes gleich der natürlichen Helligkeit. Ist aber die Öffnung des Objektivs 40 *mm* und die Vergrößerung eine 25fache, so wird bereits $H = \frac{4}{25} l$, also nur mehr $\frac{1}{6}$ der natürlichen Helligkeit. Daß man trotzdem schärfer einstellen kann, hat seinen Grund darin, daß das Bild in der deutlichen Sehweite erscheint. Es folgt aber auch hieraus, daß man nicht allzu starke Vergrößerungen wählen darf, da sonst die Helligkeit und damit die Sicherheit der Einstellung mit dem Fernrohre zu stark herabgedrückt wird. Selbst bei 40 *mm* Objektivöffnung würde, wenn man $v = 100$ wählen würde, die Helligkeit des Bildes schon auf $\frac{1}{100}$ der natürlichen Helligkeit sinken.

---

* Man spricht immer nur in dem Sinne der linearen Vergrößerung; die Flächenvergrößerung r^2 wird wohl mitunter in populären Schriften und zur Irreführung im Verkehre angewendet, wobei man auch Lupen mit 100facher und Mikroskope mit 10.000facher Vergrößerung angegeben findet, während man es in diesen Fällen tatsächlich mit 10facher beziehungsweise 100facher Vergrößerung zu tun hat.

Man kann die Vergrößerung eines Fernrohrs sehr leicht auf empirischem Wege bestimmen, wenn man das Fernrohr auf eine z. B. in *cm* geteilte Latte richtet, die so weit aufgestellt ist, daß das Bild nahe in den Brennpunkt fällt aber doch noch die *cm*-Teilung mit freiem Auge deutlich gesehen wird (wozu diejenigen Latten sich besonders eignen, deren *cm*-Felder abwechselnd weiß und schwarz angestrichen sind, vgl. Nr. 56). Sieht man mit einem Auge durch das Fernrohr und betrachtet mit dem andern die Latte direkt, so gelangt man bei einiger Übung leicht dahin, Bild und Gegenstand (allerdings jedes mit einem andern Auge) nebeneinander zu sehen. Zählt man dann die Anzahl der *cm* der Latte, welche 1 *cm* des Bildes decken, so erhält man das Verhältnis der Gesichtswinkel β und α, also die Vergrößerung. Wenn in einem bestimmten Falle das Bild eines *cm* 15 Latten-*cm* deckt, so wird die Vergrößerung eine 15fache sein.

21. Das Mikrometer. Mitunter hat man die Größe des Bildes zu messen. Zu diesem Zwecke wird in der Ebene E (Fig. 35) nicht eine einfache Fadenplatte, sondern ein Mikrometer angebracht.* Innerhalb des Ausschnittes des Rahmens r (Fig. 15) befindet sich eine Fadenplatte, welche durch die Schraube bewegt wird. Bei einer vollen Umdrehung der Schraube wird die Fadenplatte und damit der darüber gespannte „bewegliche Faden", welcher einfach oder ein Doppelfaden sein kann, um eine Schraubenganghöhe verschoben. Ist die Trommel in 100 Teile geteilt, so ist ein Trommelteil (pars) $1^p = \frac{1}{100}{}^R$, und der Drehung der Schraube um 1^p entspricht eine Verschiebung des beweglichen Fadens um $\frac{1}{100}$ der Schraubenganghöhe. Ein Index i, der an dem Mikrometergehäuse befestigt ist, gestattet die Ablesung der ganzen Revolutionen, während gleichzeitig der Index i an der Trommel selbst die Bruchteile der Schraubenrevolutionen angibt. Hat man z. B. im Gesichtsfelde ein Bild (Meßlatte) mit zwei Fixpunkten mn, so kann deren Entfernung dadurch gemessen werden, daß man die Mikrometerschraube erst so lange dreht, bis der Faden auf dem Mittelpunkte von m steht; sei die Lesung z. B. 4^R und 65^p, d. i. $4{\cdot}65^R$; dreht man dann bis der Faden ebenso den Kreis n genau halbiert (biseziert) und sei die Lesung nunmehr $12{\cdot}47^R$, so war eine Verschiebung der Schraube um $7{\cdot}82^R$ nötig. Wäre z. B. die Schraube nach $\frac{1}{3}$ *mm* Ganghöhe geschnitten, so wäre die Größe des Bildes $mn = 2{\cdot}6067$ *mm*. Zur Beschleunigung des Verfahrens kann man die eine Einstellung auf m dadurch ersetzen, daß man zuerst m auf einen der festen Fäden des Fadennetzes (durch Bewegung des Fernrohrs) und dann den beweglichen Faden auf n einstellt. Man braucht dann nur die Lesung der Schraube für diese Stellung auszuführen, denn die

* In vielen Werken der niederen Geodäsie werden einfache Fadennetze als Fadenmikrometer bezeichnet; für die seit langer Zeit als eigentliche Fadenmikrometer bekannten, hier unter diesem Namen beschriebenen Meßvorrichtungen wurden infolgedessen andere Namen gewählt, so z. B. der jedenfalls sehr imponierende „Okular-Filar-Schrauben-Mikrometer". Dergleichen Neuerungen, die nur in der Einführung neuer Worte bestehen, können hier nicht beibehalten werden: einfache Dinge müssen auch mit einfachen Namen belegt werden, selbst dann, wenn dadurch der Nimbus des Hervorragenden und Schwierigen verloren gehen sollte.

Einstellung auf m wird jene sein, welche gemacht würde, wenn der bewegliche Faden mit dem festen Faden zur Koinzidenz gebracht würde und diese kann ein für allemal bestimmt werden, da sie sich nicht ändert.

Der gemessenen Bildgröße wird ein ganz bestimmter Winkel α (Fig. 41) entsprechen. Für sehr weit entfernte Objekte kann die Fadenplatte als im

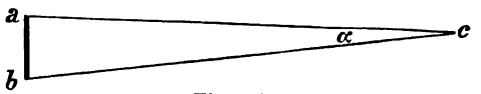


Fig. 41.

Brennpunkte befindlich angesehen werden. Hat man z. B. im obigen Falle ein Fernrohr verwendet, für welches die Brennweite des Objektivs 20 *cm* (= 200 *mm*) ist, so ist $\alpha = \frac{2{\cdot}6067}{200} = 0{\cdot}013033$, welchem Bogen der Winkel 44′ 48″ entspricht.* Man kann diese Rechnung vereinfachen, wenn man den „Wert einer Schraubenumdrehung“ bestimmt. Da im obigen Beispiele $1^R = 0{\cdot}333\ldots\,mm$ ist, so entspricht einer Distanz zweier Punkte in dieser Entfernung ein Winkel gleich $\frac{0{\cdot}333\ldots}{200} = 0{\cdot}001666\ldots = 5'43{\cdot}77''$ am zweiten Knotenpunkte des Objektivs; dies ist der Wert einer Schraubenrevolution für dieses Fernrohr und Mikrometer. Mit diesem, für alle Beobachtungen konstanten Werte folgt dann für die obige Entfernung von $7{\cdot}82^R$.

$$\alpha = 7{\cdot}82 \times (343{\cdot}77'') = 2688'' = 44'48''.$$

Für diese Zwecke ist es aber unbedingt notwendig, daß die Entfernung der Fadenplatte vom Objektiv absolut unverändert bleibt. Dieses ist bei dem Huygensschen Okular nicht der Fall; denn, wird der Okularauszug verschoben, so ändert sich die Lage der Fadenplatte. Das Huygenssche Okular kann daher nur für einfache Fadenkreuze, nicht aber für Mikrometer verwendet werden.** Unter sonst gleichen Umständen (gleiche Brennweite des Objektivs und gleiche Ausführung des Okulars) gibt aber das Huygenssche Okular eine schwächere Vergrößerung, dafür aber größeres Gesichtsfeld und größere Helligkeit; diesen Vorteil könnte man aber ebenfalls erzielen, wenn man bei derselben Brennweite des Objektivs einfach ein schwächeres Ramsdensches Okular verwendet. Je stärker nämlich die Vergrößerung ist, desto kleiner wird das Gesichtsfeld. Dies bezieht sich sowohl auf das Objektiv als auch auf das Okular. Die Größe des wahren Gesichts-

* Vgl. die Tafel zur Verwandlung der Bogenlängen in Winkelmaß.

** Nach Bauernfeind, „Elemente der Vermessungskunde“, 7. Auflage, Stuttgart 1890, I. Band, S. 111, sind aber z. B. von 70 Fernrohren des Münchener geodätischen Instituts 40 mit Huygensschen und 30 mit Ramsdenschen Okularen versehen. Ertel bevorzugt die Huygensschen Okulare bei geodätischen Instrumenten (nur bei Distanzokularen selbst mit fixen Fäden verwendet er jedoch ebenfalls Ramsdensche Okulare), „weil sie die Objekte besser auflösen und weil bei diesen Okularen das Fadenkreuz zwischen zwei Linsen eingeschaltet ist, wodurch es mehr vor Schmutz geschützt wird“. Sorgfältige Behandlung beim Auswechseln der Okulare bietet immerhin ausreichenden Schutz gegen das Verschmutzen. Breithaupt verwendet bei seinen Nivellierinstrumenten und Grubentheodoliten fast ausnahmslos orthoskopische Okulare.

feldes wird bestimmt durch den Winkel w, unter welchem zwei Punkte, welche sich am Rande des Gesichtsfeldes abbilden, erscheinen; ist die lineare Größe des Gesichtsfeldes, d. i. der freie Raum der Fadenplatte, auf welchem noch Strahlen zur Entstehung des Bildes beitragen können, d. h. durch welchen noch Strahlen hindurchtreten und ins Auge gelangen können, n *mm* bei einer Objektivbrennweite von f *mm*, so ist $w = \frac{n}{f}$ der Gesichtsfeldwinkel, kurz als das wahre Gesichtsfeld bezeichnet. Ist jedoch n beträchtlich, so gelangen nicht alle austretenden Strahlen in die Pupille und man übersieht nur einen Teil des ganzen Gesichtsfeldes; derjenige Teil, den man bei einer Stellung des Okulars überblicken kann, heißt das scheinbare Gesichtsfeld. Um das gesamte Gesichtsfeld (alle Fäden) zu überblicken, muß das Okular über die ganze Fadenplatte geführt werden, was mittels einer Feinbewegungsschraube geschieht. Nur bei schwachen Okularen wird man das ganze Gesichtsfeld auf einmal überblicken; je schärfer das Okular, desto kleiner ist der Teil des Gesichtsfeldes, der auf einmal überblickt wird.*

22. Die Objektiv- und Okulargläser sollen möglichst wenig gereinigt werden und sind daher wohl vor Staub zu schützen; wird eine Reinigung dennoch nötig, so werden die einzelnen Linsen aus den Fassungen herausgeschraubt und dabei die Zwischenringe, welche dazu dienen, die Gläser in der richtigen Entfernung zu halten (vgl. Fig. 34), sofort so vorbereitet, daß bei der Zusammensetzung Irrungen nicht vorkommen können. Die Gläser werden mit alter, sehr weicher, reingewaschener Leinwand, die nötigenfalls, wenn es sich um die Entfernung von Fettflecken handelt, mit etwas Alkohol angefeuchtet ist, ohne zu drücken oder zu reiben, geputzt; sodann wird ein anderer, ebenso weicher Leinwandlappen, der in Kreidewasser, welches die feinste Schlemmkreide suspendiert enthält, eingetaucht und gut getrocknet wurde, zum Abtrocknen verwendet und schließlich die etwa noch anhaftenden feinen Kreideteilchen mit einem weichen Haarpinsel entfernt.** Beim Zusammensetzen hat man wohl darauf zu achten, daß die Trennungsringe gehörig eingelegt, die Schrauben richtig in die Gewinde eingesetzt werden usw., damit zusammengesetzte Linsensysteme richtig zentriert bleiben (die sämtlichen Kugelmittelpunkte in dieselbe gerade Linie fallen), wofür der Mechaniker schon gesorgt hat, welche aber bei unvorsichtiger Behandlung der Fassung leicht gestört wird. Störungen in der Zentrierung geben sich sofort durch schlechte, einseitig verlängerte oder mit farbigen Schwänzen versehene Bilder kund; aber selbst schwache Zentrierungsfehler können, ohne sich besonders auffällig bemerkbar zu machen, zu Verschiebungen des Lichtschwerpunktes führen, was dann unrichtige Pointierungen zur Folge haben kann.

---

* Wesentlich ist dabei noch, daß die dem Objektiv zugekehrte Linse des Huygensschen Okulars als Kollektivlinse wirkt und daher das Bild etwas verkleinert, so daß auch das wahre Gesichtsfeld größer wird.

** Vgl. die Vorschriften von Fraunhofer in „Breithaupt, Beschreibung eines Reichenbachschen Wiederholungskreises, Kassel 1835", S. 19.

Der Beobachter kommt weiters öfter in die Lage, schadhaft gewordene Fäden zu ersetzen; zerrissene Fäden oder solche, die durch übermäßige Feuchtigkeit schlaff geworden sind, müssen entfernt werden. Dazu wird die Fadenplatte herausgenommen, nachdem die dieselben festhaltenden, zur Rektifikation des Kollimationsfehlers dienenden Schräubchen gelüftet wurden. An der Fadenplatte sind stets vom Mechaniker mit der Teilmaschine feine Striche eingerissen, hinreichend vertieft, um die Fäden sicher aufzulegen. Die hierzu verwendeten Fäden müssen vollständig staubfrei sein und werden direkt den Spinnenkokons (nicht den Spinnennetzen) entnommen, wie man sie in Winkeln hinter den Spinnennetzen von Gartenhäuschen findet. Die feinsten Fäden liefern die Kokons mit großen Eiern; diese müssen erst herausgeschüttelt werden, da sie, wenn sie zufällig zerdrückt würden, den ganzen Kokon verderben würden. In dieser Weise können dann die Kokons jahrelang, selbstverständlich vor Staub geschützt, aufbewahrt werden. Im Bedarfsfalle entnimmt man genügend lange Fäden, beschwert sie an beiden Seiten mit mäßig großen Wachsklümpchen (von etwa 4—5 *mm* Durchmesser) und legt sie mit zu beiden Seiten herabhängenden Enden über die Fadenplatte, die zu diesem Zwecke auf ein festgeklemmtes, oben eben abgeschnittenes Holzklötzchen gelegt wird. Jeder einzelne Faden wird dann mit einer feinen aber stumpfen Nadel solange verschoben, bis er sich in der richtigen Lage befindet. Ist dies für alle durchgeführt, so werden sie, um genügend gespannt zu werden, etwas angefeuchtet oder angehaucht und dann mit etwas in Alkohol aufgelöstem Schellack an der Metallunterlage fixiert. Erst wenn der Schellack völlig trocken ist (man wartet am besten bis zum nächsten Tage), werden die überragenden Teile der Fäden, an denen die Wachsklümpchen befestigt sind, kurz abgeschnitten.

Für das Aufziehen von ganzen Fadennetzen, wenn auf der Fadenplatte keine Striche vorgerissen sind, dient ein kleiner Hilfsapparat (Fig. 42), bei welchem eine Mikrometerschraube es ermöglicht, die Fadenplatte um gleiche Entfernungen zu verschieben; dann werden mit einem Grabstichel, der um eine zur Bewegungsrichtung der Schraube parallele Achse auf- und niedergeschlagen werden kann, die Striche eingerissen. Überdies kann der auf der verschiebbaren Brücke montierte obere Teil, der die Fadenplatte trägt, um 90° gedreht werden, um Fäden in zwei aufeinander senkrechten Richtungen aufziehen zu können. Zum Auflegen der Fäden dient die am linken Träger angebrachte Gabel.

Fig. 42.

V. Kreislesungen.

23. Limbus, Alhidade. Soll die Größe der Drehung der Visiervorrichtung ermittelt werden, so muß an der Achse ein Arm befestigt sein, der längs eines geteilten Kreises die Größe dieser Drehung abzulesen ge-

stattet; oder aber es ist der Kreis mit der Achse fest verbunden, dreht sich daher mit diesem und die Größe der Drehung wird an einem am Dreifuß oder Träger festen Index abgelesen, an welchem die einzelnen Teilstriche des Kreises bei seiner Drehung vorüberziehen. Statt eines einfachen Indexstriches werden dann auch Nonien oder Mikroskope angebracht. Ist der Kreis fest, der Index (die Nonien) beweglich, so bezeichnet man den ersteren als Limbus; ist hingegen der Index fest, der Kreis beweglich, so wird er als Alhidade bezeichnet.

Die Teilungen werden mittels Teilmaschinen eingerissen und ist es heutzutage ein leichtes, auf Kreisen von 15—20 *cm* Durchmesser Teilungen zu reißen, die Sechstelgrade geben, wobei die „Teilungsfehler" äußerst minimal sind und nur bei den genauesten Beobachtungen berücksichtigt zu werden brauchen. Kreise von 40 *cm* Durchmesser (Meridiankreise) sind von zwei zu zwei Minuten geteilt. Die Bezifferungen der Teilungen müssen verschieden sein, je nachdem der Kreis oder der Index fest ist. Im ersteren Falle bewegt sich der Index mit der Visiervorrichtung und die Bezifferungen wachsen daher wie die Lesungen bei der Bewegung von links nach rechts (Fig. 45). Ist hingegen der Index fest, so gelangen bei der Bewegung der Visiervorrichtung mit dem Kreise von links nach rechts die linken Teilstriche später vor den Index; sollen daher die Lesungen bei der Bewegung in diesem Sinne wachsen, so muß die Bezifferung im umgekehrten Sinne wachsen (Fig. 46).

Teilungen müssen besonders sorgfältig behandelt werden; sind sie verstaubt, so wische man sie mit einem feinen weichen Haarpinsel ab; schon ein etwas härterer Borstenpinsel vermag die weiche Silbereinlage zu zerkratzen. Durch mechanische Verunreinigungen (feinste Staub- und Rauchniederschläge) oder chemische Veränderungen (Schwefelsilber) wird die Teilung im Laufe der Zeit dunkelbraun. Dann muß sie gereinigt werden; man tue dieses nicht zu oft, denn wenn man auch mit dem Grabstichel der Teilmaschine gleichmäßig tiefe Striche zu ziehen in der Lage ist, so werden diese durch wiederholtes Putzen allmählich seichter; mitunter wird auch durch einseitiges Abreiben eine scheinbare Verschiebung der Striche stattfinden,* was namentlich bei Mikroskoptheodoliten besonders zu beachten ist.

Das Putzen der Teilungen geschieht am besten mit der feinsten Watte, welche, um jegliches Reiben und Kratzen zu vermeiden, ganz schwach mit Öl angefeuchtet wird.** Ist die Teilung hinreichend gereinigt, so kann sie noch einmal mit einem trockenen Wattebausch überfahren werden, um das überschüssige noch anhaftende Öl zu entfernen.

24. Transversalmaßstäbe und Nonien. Teilungen können nicht ins unbegrenzte geführt werden; um noch Unterabteilungen, welche an dem

* Natürlich wird nicht der Strich verschoben, sondern durch das Putzen nach derselben Richtung werden die Ränder auf der einen Seite mehr abgenutzt, wodurch der Strich verschoben erscheint.

** Die Nonien werden dabei zurückgeschlagen und für sich gereinigt. Insbesondere achte man darauf, daß an der Rückseite derselben, welche auf der Kreisteilung aufliegt, weder Öl noch Staub zurückbleibt.

Maßstabe selbst nicht mehr abgelesen werden können, zu erhalten, hatte man früher Transversalmaßstäbe. Jetzt werden dieselben nur mehr zum Zeichnen von Längen in verjüngtem Maßstabe verwendet. Soll 1 *cm* in der Zeichnung z. B. gleich 10 *m* der Natur sein (Maßstab 1:1000), so wird man noch die Teilung in *mm* vornehmen können; es genügt jedoch, von *a* (Fig. 43) aus nach rechts *cm* aufzutragen und den letzten *cm* nach links in *mm* zu teilen. Zieht man parallel zu *ax* noch zehn weitere Linien, die durch

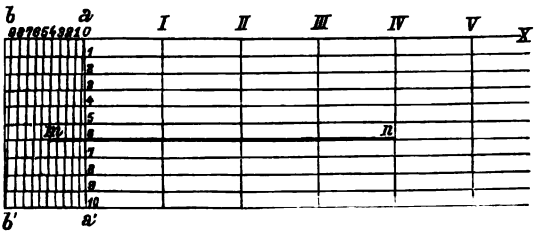


Fig. 43.

parallele, zu *ax* senkrechte Linien ebenfalls in *cm* eingeteilt sind, so können die ganzen *cm* auf irgendeiner dieser Linien von *aa'* nach rechts abgelesen werden. Zieht man jedoch in dem Rechtecke *aba'b'* die Teilungslinien schräg, so daß *a* mit dem ersten *mm*-Teilstriche a_1', a_1 mit a_2' usw. verbunden wird, so werden die Abstände von *aa'* nach links auf je einer tiefer stehenden Linie um 0·1 *mm* größer; es wird z. B. die Strecke $mn = 4{\cdot}46\,cm$ der Zeichnung, demnach $44{\cdot}6\,m$ der Natur.

Zu genaueren Messungen, namentlich an Kreisen, eignet sich dieses Verfahren jedoch weniger gut und wurde dasselbe nach Einführung des Nonius ganz verdrängt. Neben dem Hauptmaßstabe ist ein kleinerer Hilfsmaßstab, bei welchem *n* Teile des Hauptmaßstabes in $n + 1$ Teile geteilt sind.* Seien 9 Teile des Hauptmaßstabes in 10 Teile des Nonius geteilt;

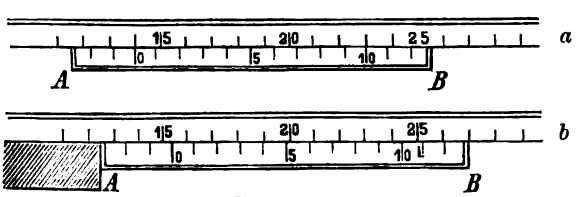


Fig. 44.

koinzidiert der mit 0 bezeichnete Teilstrich (Fig. 44 *a*), so koinzidiert auch der letzte mit 10 bezeichnete. Reicht eine zu messende Länge bis zum angegebenen Punkte *A* (Fig. 44), so wird man in diesem Falle als die Länge der Strecke 14 Einheiten des Hauptmaßstabes finden (der andere Eckpunkt muß auf den Nullpunkt der Hauptteilung fallen). Würde die Länge etwas größer, so daß man den Nonius nach rechts schieben müßte, bis der Teilstrich 1 koinzidiert (mit welchem Teilstrich des Hauptmaßstabes

* Es können auch *n* Teile des Hauptmaßstabes in $n - 1$ Teile geteilt sein, doch sind diese Maßstäbe weniger verwendet.

er zusammenfällt, ist dabei ganz gleichgültig), so fällt natürlich der ganze Nonius, daher auch der Endpunkt A, auch der daran stoßende Endpunkt der zu messenden Länge um $\frac{1}{10}$ des Hauptmaßstabes weiter; man würde also 14·1 lesen. In Fig. 44*b* koinzidiert der vierte Teilstrich des Nonius, daher ist dieser um 0·4 Einheiten des Hauptmaßstabes gegen den Strich 15 verschoben, die Länge ist daher 14·4 Einheiten. Daß der Nullpunkt des Nonius nicht auf A fällt, ist belanglos, wenn nur die Teilung und Bezifferung des Hauptmaßstabes so vorgenommen wird, daß die Länge „0" gelesen wird, wenn A auf denjenigen Punkt fällt, von wo die zu messenden Längen beginnen.

Koinzidiert kein Punkt des Nonius mit einem Striche des Hauptmaßstabes, so wird man aus der Lage der nächstliegenden Striche auf die Länge schließen. In Fig. 44*b* koinzidiert der Noniusstrich 4 noch nicht; es bedürfte noch $\frac{1}{3}$ der Verschiebung von $\frac{1}{10}$ (während $\frac{2}{3}$ dieser Verschiebung von 0·3 gegen 0·4 vollführt erscheinen) um diese Koinzidenz herzustellen; man wird also schließen, daß der Nullpunkt des Nonius um $0{\cdot}3 + \frac{1}{3} \times 0{\cdot}1 = 0{\cdot}37$ verschoben, die Lesung daher 15·37 wäre. Um diese Schlüsse auch am Anfang und Ende der Noniusteile zu ermöglichen, sind noch 1—2 Teile des Nonius nach beiden Seiten aufgetragen (Exzedens).

Bei Kreisen geht aber die Bezifferung für jeden Teilstrich nur dann fortlaufend weiter, wenn derselbe z. B. in ganze Grade geteilt wäre. Ist aber z. B. der Kreis in halbe Grade geteilt und sind 14 Teile des Limbus gleich 15 Teilen des Nonius, so erhält man Fünfzehntel von halben Graden, also ist jeder Teilstrich des Nonius gleich 2′; ist der Kreis in Sechstelgrade geteilt und sind 9 Teile des Limbus gleich 10 Teilen des Nonius, so erhält man $\frac{1}{60}$ Grade, d. i. Bogenminuten. In diesem Sinne ist auch die Bezifferung vorgenommen; die folgenden Fig. 45 und 46 geben hierzu Beispiele und zeigen

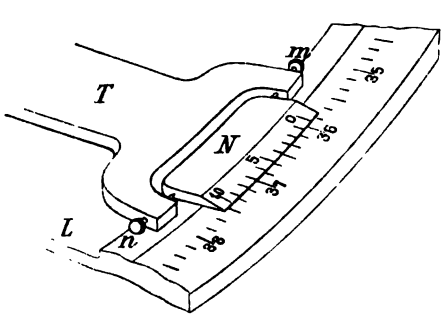


Fig. 45.

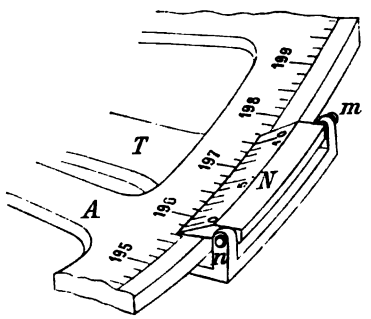


Fig. 46.

auch gleichzeitig die Anbringung des Nonius. Der Arm T (Fig. 45), welcher an der Achse befestigt ist, trägt zwischen Spitzen mn den Nonius N, welcher sich bei der Drehung der Achse längs der Teilung weiter bewegt. In Fig. 46 ist der Nonius fest am Dreifuß und der Kreis mit der Visiervorrichtung wird gedreht; hiernach ist auch die Bezifferung durchgeführt (vgl. S. 43).

Da meist zwei Nonien angebracht sind, so wird man den einen zwischen den Spitzen durch Lüften der einen und Anziehen der andern Schraube

so weit verschieben können, daß die Lesungen an beiden Nonien nahe übereinstimmen. Völlige Koinzidenz der Lesungen ist unnötig und auch wegen der Exzentrizität des Kreises (s. diese) nicht für alle Stellungen zu erreichen.

Der Nonius ist an derjenigen Seite, an welcher sich die Teilung befindet, scharf zugeschnitten, so daß seine Teilung möglichst nahe über der Limbusteilung liegt; man muß deshalb auch stets darauf achten,* diese Schneiden nicht zu verletzen. Beim Lesen muß man möglichst normal auf die Teilungen sehen, da bei schiefem Daraufsehen infolge einer gewissen Dicke der Noniusschneide sich die Teilstriche nicht mehr normal, sondern schief, also auf andere Teilstriche des Limbus projizieren: es entsteht eine Parallaxe. Um die Sicherheit der Ablesung zu erhöhen, werden schwach vergrößernde Lupen beigegeben, welche an Armen drehbar über den abzulesenden Teilstrich geschoben werden (vgl. z. B. die Fig. 123).

25. Das Schraubenmikroskop. Eine wesentlich größere Genauigkeit liefert das Schraubenmikroskop. In einem Mikroskop, welches normal gegen die Teilung T (Fig. 47) gerichtet ist, gibt das Objektiv ein verkehrtes, vergrößertes Bild in der Ebene E, welches durch ein Okular angesehen wird. Ob nun das Mikroskop fest und die Teilung sich unter demselben fortbewegt, oder ob letztere feststehend und die Mikroskope mit dem Fernrohr beweglich sind, immer wird es am Mikroskope einen festen Punkt M geben, der in gewissen Stellungen mit dem Bilde eines Teilstriches zusammenfallen kann. Fällt z. B. der Teilstrich a (in der Figur der Teilstrich 26) auf diesen Punkt, so würde diesem Stande die Lesung a (26) entsprechen. Dieser feste Punkt kann in dem Mikroskop durch eine in der Ebene E angebrachte Marke bezeichnet werden. Zu diesem Zwecke wird bei E ein Kästchen (Fig. 16) angebracht, in welchem an dem Ausschnitte der unter dem verschieblichen Rahmen r befindlichen Bodenplatte auf einer Seite ein gezahnter Rechen angebracht ist; der äußerste der Zähne bei M (Fig. 16) ist durchlocht und bildet die erwähnte Marke. Durch den Ausschnitt der Bodenplatte sieht man gegen die Teilung und in der Ebene des Ausschnittes sieht man das Bild derselben. Fällt der Teilstrich 26 mit M zusammen, so würde dieser Stellung die Lesung 26.000 entsprechen. Koinzidiert aber, wie in der Figur der Teilstrich 26 nicht mit M, so kann der Abstand, d. i. die Verschiebung gemessen werden. Zu diesem Zwecke kann in der Ebene E eine Glasplatte angebracht werden, auf welcher das Intervall zwischen den Bildern zweier Teilstriche entsprechend geteilt ist. Ist wie in Fig. 48 das Intervall von 10′ in 10 Teile geteilt und würde, wie in der Figur der Fixpunkt M (der Nullpunkt) um $x = 7{\cdot}4'$ vom 40′-Strich gegen

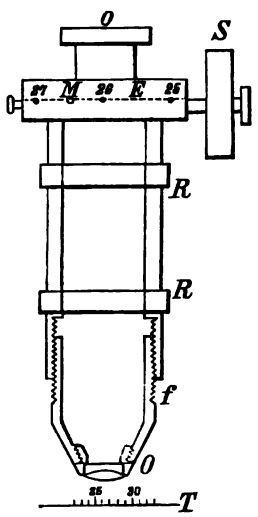


Fig. 47.

* Z. B. beim Umlegen des Instrumentes.

den 50′-Strich zu verschoben sein, so würde die Lesung 62° 47·4′ sein. Diese sogenannten Glasmikrometer sind schon sehr alt,* geben aber keineswegs die mit Mikroskopen erreichbare Genauigkeit. Weit genauere Resultate erhält man durch Anwendung eines mittels einer Schraube verschiebbaren Rahmens r (Fig. 16), welcher die Fadenplatte trägt, auf welcher an einer Stelle zwei Spinnwebenfäden aufgespannt sind. Die Zähne an der festen Platte P sind nach der Schraubenganghöhe der Mikrometerschraube geschnitten, so daß einer Drehung der Schraube um 1^R eine Verschiebung der Platte um einen Zahn entspricht. Die Trommel ist ebenfalls geteilt, wodurch man Bruchteile der Schraubenrevolutionen ablesen kann. In Fig. 16 müßte nun der Rahmen um 10^R verschoben werden, wenn der Faden sich von dem Bilde eines Teilstriches zu demjenigen des nächsten bewegen würde; 1 Zahn $= 1^R$ entspricht daher $\frac{1}{10}$ des Zwischenraumes zwischen zwei Teilstrichen der Teilung und 1^p der Trommel wird gleich $\frac{1}{1000}$ dieses Zwischenraumes. Hat man daher z. B. einen Längenmaßstab, der in *mm* geteilt ist, so ist $1^p = 0{\cdot}001\,mm$ und da nach der Figur der Teilstrich 26 um 5^R + einem gewissen Bruchteil verschoben ist, der an der Trommel gelesen wird — sei diese Lesung 63 — so würde auf den festen Punkt M das Bild eines Punktes der Teilung fallen, welcher 26·563 *mm* entspricht.

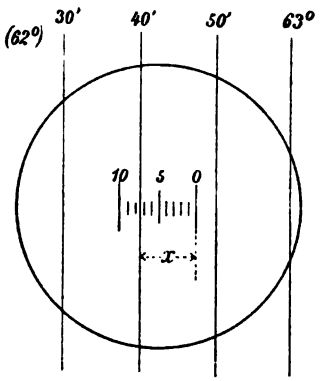


Fig. 48.

Die Messung der Verschiebung würde erfordern, daß man den Rahmen erst so weit verschiebt, bis der Spinnwebenfaden auf M fällt, und dann so, daß er mit dem in dem Mikroskope sichtbaren Striche der Teilung zusammenfällt; die erste Einstellung ist aber unnötig, da sie stets denselben Wert: $0{\cdot}00^R$ gibt. Die Marke M ist allerdings ziemlich groß und die genaue Einstellung auf dieselbe muß nicht gerade 0·00 geben; dann denkt man sich an ihrer Stelle eine andere sehr nahe, für welche diese Lesung gilt; die Marke M soll nur den Zahn angeben, von welchem aus gezählt wird, der genaue Nullpunkt ist durch die Stellung der Schraube auf 0·00 festzusetzen.

---

* Dieselben wurden zuerst von Tob. Mayer (dem Vater) 1750 in den „Kosmographischen Sammlungen, Nürnberg" bekannt gemacht und von dem Mechaniker Brander verfertigt (vgl. Joh. Tob. Mayer „Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, 2. Aufl., Göttingen 1792, II. Bd., S. 220"). Die Striche wurden entweder *a*) mit einer Reißfeder und Tusche oder *b*) mit einem Stahlfedermesser oder *c*) mit Flußsäure gezeichnet. Brander beschreibt in seiner Schrift „Der neue geometrische Universalmeßtisch, Augsburg 1772" ein Visierlineal mit Fernrohr, in welchem sich ein Glasmikrometer befand. Das Glasmikrometer wurde damals an Stelle des schon früher von Gottfried Kirch in den Miscell. Berolinens. bekannt gemachten Schraubenmikrometers verwendet, weil „das Zählen der Umdrehungen zu zeitraubend ist" (J. T. Mayer).

1879 wurde das Glasmikrometer gleichzeitig von Hensoldt und Hildebrandt als „Ablesemikroskop" oder „Schätzungsmikroskop" wieder eingeführt („Zeitschrift für Vermessungswesen", VIII. Bd., 1879, S. 479). Auch in der ihm von dem Mechaniker Hahn gegebenen Form („Zeitschrift für Vermessungswesen", IX. Bd., 1880, S. 202), wobei an Stelle der einfachen Teilung ein Transversalmaßstab in der Ebene E angebracht wird, kann es mit dem Schraubenmikroskop nicht an Genauigkeit verglichen werden.

Ist aber die Differenz zu groß, so kann sie leicht korrigiert werden: man stellt die Schraube auf 0·00 und verschiebt dieselbe ohne Drehung an der Trommel und mit ihr den Rahmen r und den auf demselben befindlichen Faden mittels des Korrektionsschräubchens σ (Fig. 15) so, daß der Faden nahe durch die Mitte von M geht; eine allzu große Genauigkeit ist nach dem Obigen unnötig.

Fig. 49.

Die zweite allein nötige Einstellung muß mit möglichster Schärfe vorgenommen werden; dies zu erreichen, ist nicht ein einfacher, sondern ein enger Doppelfaden aufgezogen. Der Strich erscheint nämlich dunkel, die Fäden tief schwarz (Fig. 49) und man hat den Schlitten so lange zu verschieben, bis der Strich in der Mitte zwischen den Fäden und die beiden lichten Zwischenräume zu beiden Seiten des Teilstriches völlig gleich erscheinen. (Bisektion des Fadenintervalls durch den Teilstrich.)

Für einen Kreis sei z. B. die Teilung in Zwölftelgrade; der Zwischenraum zwischen den Bildern zweier Teilstriche sei in 5 Teile geteilt, so wird $1^R = 1'$; wird dann die Trommel in 60^p geteilt, so ist $1^p = 1''$ und Bruchteile können noch geschätzt werden. Der Vorgang bei der Winkelmessung ist dann der folgende: Man visiert gegen ein Objekt und liest am Kreise ab. Das Mikroskop gibt z. B. die Lesung 137° 24′ 35·7″; sodann wird gegen das zweite Objekt visiert und man erhält z. B. die Lesung 195° 18′ 18·4″; dann ist der Winkel zwischen den beiden Visuren gleich der Differenz der Lesungen, also 57° 53′ 42·7″.

Aber unter dem Mikroskop sieht man meist nur die Teilstriche, nicht aber die Bezifferung. Bringt man nun in einer gewissen Entfernung $e°$ eine Indexstrich an, so kann dieser, wenn nötig, durch eine Lupe abgelesen werden, und im Mikroskop wird nur der Abstand, allerdings eines ganz andern Teilstriches von M abgelesen. Eigentlich wäre also die Lesung im Mikroskop gleich Lesung am Index + Abstand e + Abstand des Teilstriches im Mikroskop. Da aber bei der Drehung der Visur der Index sich um ebensoviel am Kreise verschiebt wie das Mikroskop, so wird die zweite Lesung wieder gleich zweite Lesung am Index + Abstand e + zweite Lesung am Mikroskop; für das obige Beispiel also:

$$\begin{aligned} \text{erste Lesung} &= 137° \; 20' + e + 4' \; 35{\cdot}7'' \; (\text{nämlich } 4^R \; 35{\cdot}7^p) \\ \text{zweite Lesung} &= 195° \; 15' + e + 3' \; 18{\cdot}4'' \; (3^R \; 18{\cdot}4^p). \end{aligned}$$

Daher fällt in der Differenz der Lesungen der Abstand e weg, und man kann die Lesungen am Index, wo immer derselbe angebracht ist, direkt als die Mikroskoplesungen bezeichnen (vgl. z. B. Fig. 131). So wie bei den Nonien werden auch zwei Mikroskope an diametral gegenüberstehenden Stellen zur Elimination des Exzentrizitätsfehlers (s. Nr. 97) angebracht.

Die Schraube darf nicht völlig strenge gehen; sie muß etwas Luft in dem Gewinde haben. Wirkt dann eine Schraube wie in Fig. 14 durch Zug oder Druck nach beiden Seiten, so wird sie beim Vorschrauben an die eine Seite des Gewindes gedrückt, beim Rückschrauben an die andere (Fig. 50). So minimal der Stellungsunterschied auch ist, so wird doch zwischen dem Vor- und Rückschrauben der Schraube eine kleine Bewegung stattfinden, welche nicht von einer Bewegung des Schlittens begleitet ist, der sogenannte tote Gang

der Schraube. Selbst für die Feinbewegungsschrauben wird dieser Umstand oft störend; bei der Meßschraube ergeben sich aber dadurch Differenzen in den Angaben beim Vor- und Rückschrauben, welche jedoch in der Differenz zweier Lesungen bei gleichartigem Schrauben wegfallen. Daraus resultiert

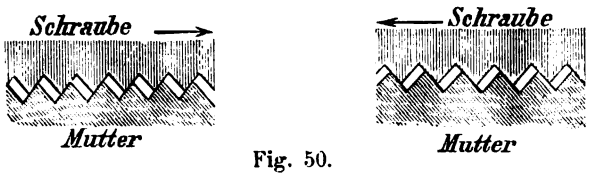


Fig. 50.

die Regel, daß man für Meßschrauben dieser Art stets nach derselben Seite drehen soll (wenn nötig natürlich zuerst z. B. ein größeres Stück zurück und dann zur Einstellung stets vor). Von diesem Fehler frei sind Schrauben, bei welchen wie in Fig. 15 und 16 das Gewinde stets durch eine Feder an dieselbe Seite des Muttergewindes gedrückt wird.

26. Berichtigung des Mikroskopes. *a*) Das Mikroskop muß gegen die Teilung so gerichtet sein, daß die Achse desselben in einer zur Richtung der Teilung senkrechten Ebene liegt, bei Kreisteilungen daher in einer zur Tangente im anvisierten Punkte senkrechten, d. h. in einer Ebene, welche durch die Umdrehungsachse des Kreises geht. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird, wenn die Teilung etwas von dem Mikroskop entfernt wird (durch einen sanften Druck auf die Kreisebene, doch das Bild des Teilstriches an derselben Stelle bleiben, wenn es auch etwas undeutlicher wird; steht jedoch das Mikroskop schief gegen die Richtung der Teilung,* so wird der Strich sich dabei scheinbar verschieben. Um einen Fehler in dieser Richtung zu verbessern, ist das Mikroskop bei vielen Instrumenten durch Stellschrauben seitlich zu verschieben.

b) Die auf dem Rahmen r aufgespannten Fäden müssen parallel zum Bilde des Teilstriches sein, ist dieses nicht der Fall, so kann der Fehler durch Drehen des Mikroskops um seine Achse korrigiert werden.

c) Das Bild der Teilung muß in der Ebene E liegen. Wäre dieses nicht der Fall, so würde der Faden nicht das Intervall der Teilung messen, da Fäden und Teilung übereinander in einem gewissen Zwischenraume liegen, nicht beide gleichzeitig scharf gesehen werden könnten und eine schädliche Fadenparallaxe vorhanden wäre. Beseitigt wird dieselbe in der beim Fernrohr (Nr. 18) angegebenen Art.

d) Der Drehung der Schraube um a^R soll die Verschiebung der Fäden um ein Intervall der Teilung entsprechen. Ist die Abweichung zu groß, so kann sie durch Nähern oder Entfernen des Mikroskops von der Teilung korrigiert werden, zu welchem Zwecke das Mikroskop zwischen Ringen geklemmt ist. Werden diese gelüftet, so kann das Mikroskop gehoben oder

* Eine Neigung gegen die vertikale Umdrehungsachse des Instruments hin oder von dieser weg, ist belanglos, da dann das Mikroskop wohl gegen andere Punkte des Striches, aber doch gegen denselben Strich gerichtet ist. Bei einer seitlichen Neigung des Mikroskops wird die Visur aber sofort an dem Strich vorbeigehen.

gesenkt (und für die Rektifikation *b*) gedreht) werden, bis die letzten drei Bedingungen (*b*, *c*, *d*) erfüllt sind. Wird nämlich bei der Drehung der Schraube um a^R der Faden um mehr als ein Intervall der Teilung verschoben, so ist dieses Intervall, daher überhaupt das Bild der Teilung zu klein, das Mikroskop müßte genähert werden. Dabei würde aber den Gesetzen der Optik gemäß das Bild höher rücken (Abstand des Gegenstandes vom Objektiv kleiner, daher Abstand des Bildes größer) und das Bild würde nicht mehr in der Ebene *E* sein. Es muß daher das Objektiv für sich der Teilung genähert, der Oberteil mit der Bildebene *E* hingegen entfernt werden. Zu diesem Behufe ist das Objektiv in einer eigenen Fassung *f* (Fig. 47) in der Mikroskopröhre verschraubbar und das Verfahren zur Rektifikation ist das folgende: Ist das Intervall der Teilung kleiner als *a* Revolutionen, so wird das Objektiv herabgeschraubt oder geschoben und das ganze Mikroskop etwas gehoben (aber weniger als die Senkung des Objektivs beträgt), so daß der Abstand des Objektivs von der Teilung dennoch kleiner wird; ist hingegen ein Intervall der Teilung größer als a^R, so wird das Objektiv gehoben (hinaufgeschraubt oder geschoben) und das ganze Mikroskop etwas gesenkt (aber weniger als die Hebung des Objektivs war), so daß der Abstand des Objektivs von der Teilung doch noch etwas größer wird. Scharfe Deckung von Bild und Fäden muß danach selbstverständlich nach *c*) neuerdings untersucht, eventuell berichtigt werden.

Eine völlige Berichtigung des Intervalles ist aber nicht zu erzielen und es bleibt stets noch ein kleiner Unterschied, welchen man als „Korrektion der Schraubenumdrehung“ auch als „Stimmung des Mikroskops“ (früher „Run“ genannt) bezeichnet. Diesen Unterschied kann man leicht in Rechnung ziehen.

Soll z. B. 1 Intervall der Teilung gleich 5^R sein und ist die Trommel in 60 Teile geteilt, findet man aber das Intervall zwischen zwei Teilstrichen gleich $5^R - 4{\cdot}5^p$, so sind

$$5' = 5^R - 4{\cdot}5^p = 295{\cdot}5^p,$$

daher $1^p = 1{\cdot}015''$; $1^R = 1'\ 0{\cdot}9''$, was bei genaueren Beobachtungen wohl zu berücksichtigen ist. Ist allgemein der Voraussetzung nach

1 Intervall $= a'$ und die Trommel in m Teile geteilt; findet man aber

$$1 \text{ Intervall} = a^R \pm n^p, \text{ so ist } a^R \pm \frac{n^R}{m} = a',$$

daher
$$1^R = \left(\frac{a}{a \pm \frac{n}{m}}\right)' \text{ und } 1^p = \left(\frac{60\ a}{m\left(a \pm \frac{n}{m}\right)}\right)''.$$

Zur Bequemlichkeit legt man sich kleine Täfelchen an, welche die Korrektion sofort für jeden Ablesung geben.

VI. Spiegel und Prismen.

27. Die Eigenschaft, daß ebene Flächen das auf dieselben fallende Licht unter gleichem Winkel reflektieren, wird bei astronomischen und geodätischen

Instrumenten in verschiedener Weise benutzt. Um diejenigen Stellen der Teilungen, welche abgelesen werden sollen, zu beleuchten, wird seitlich einfallendes Licht durch kleine unter 45° geneigte, spiegelnde Flächen auf die betreffenden Stellen der Teilung reflektiert.* Hierzu wählt man weiße, aber matte, nicht glänzende Papierblätter. An den die Nonien tragenden Armen sind sie zur Beleuchtung der Nonien befestigt (s. die Figuren in Nr. 48); an den Mikroskopen werden schief abgeschnittene, mit ebensolchen weißen Blättern belegte Schuhe angeschraubt, welche so gedreht werden, daß die reflektierende matte Papierfläche dem einfallenden Lichte zugekehrt ist und das Licht auf die Kreisteilungen geworfen wird (s. Fig. 131); oft sind diese Schuhe in zylindrischen Hülsen eingeschlossen, welche seitliche Öffnungen haben, durch welche das Licht auf die schief gestellten reflektierenden Flächen fällt (vgl. Fig. 135).

Spiegel werden weiters verwendet, um die Beobachtungen (Einstellungen und Ablesungen) von der Seite vorzunehmen, wenn die direkte, geradlinige Visur unbequem oder durch andere Instrumententeile behindert ist. Für die Ablesung von Libellen ist diese Einrichtung aus der Fig. 135 ersichtlich.

Auch für die Durchsicht durch das Fernrohr wird eine solche Anordnung bei dem prismatischen Okular und beim gebrochenen Fernrohr gewählt. Prismatische Okulare, bei denen das in das Objektiv eintretende Licht nach dem Durchgange durch das Fernrohr von einer spiegelnden Fläche reflektiert wird und die Beobachtung daher von der Seite gemacht

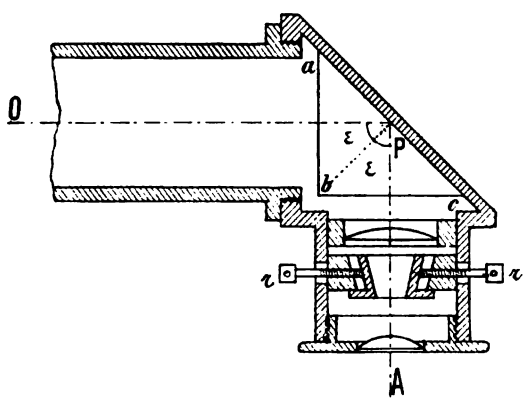


Fig. 51.

wird, sind aus der Fig. 51 ersichtlich. Auch bei Mikroskopen wird diese der Bequemlichkeit der Beobachtung außerordentlich zweckdienliche Konstruktion häufig gewählt (s. Fig. 131).

Der Strahlengang im Fernrohre kann aber gleich nach der ersten Hälfte, d. i. in der Mitte des Rohres durch Reflexion um 90° verändert werden und dann entsteht das gebrochene Fernrohr (vgl. Fig. 53).

* Bei größeren, namentlich stabil aufgestellten Instrumenten werden allerdings gegenwärtig schon sehr häufig kleine Glühlampen verwendet.

Hierbei sind jedoch die spiegelnden Flächen durch Prismen ersetzt, deren Querschnitt rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke sind, an deren Hypotenusenflächen totale Reflexion stattfindet; daher der Name „prismatische Okulare." Fällt nämlich auf ein solches Prisma (Fig. 51) Licht senkrecht auf eine Kathetenfläche, so gelangt es ungebrochen an die Hypotenuse unter einem Winkel von 45°. Da für die Brechung von Glas in Luft $\sin \beta = n \sin \varepsilon$ sein müßte, wenn ε der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel und n der Brechungsexponent von Luft in Glas, also etwa 1·5 ist,* so wäre

$$\sin \beta = \tfrac{3}{2} . \tfrac{1}{2} \sqrt{2} = \tfrac{3}{4} . 1{\cdot}414 = 1{\cdot}06;$$

da dieser Sinus größer als 1 ist, so gibt es hierzu keinen Winkel β, der Strahl kann daher überhaupt nicht austreten und wird total reflektiert und zwar

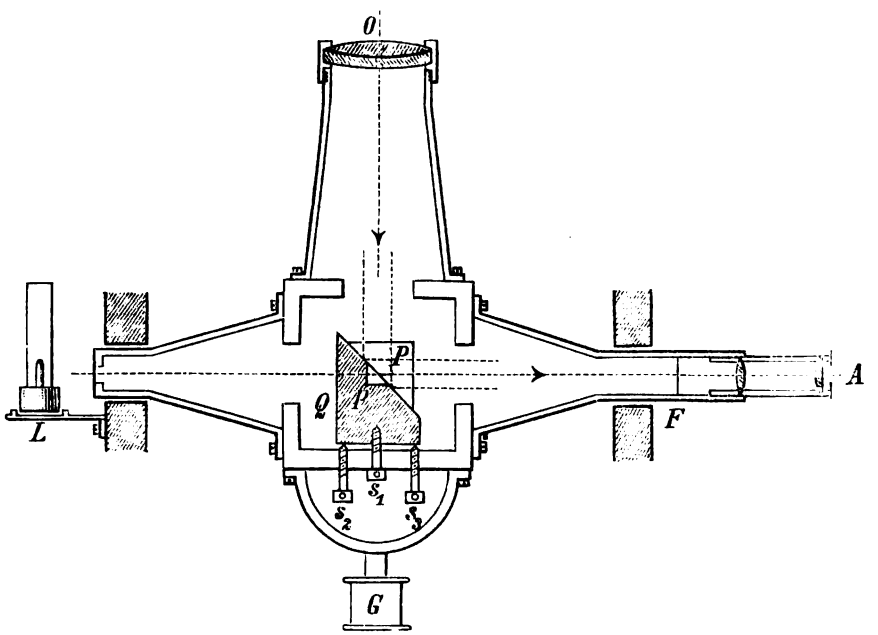


Fig. 52.

unter demselben Winkel ε, so daß er jetzt senkrecht zur zweiten Katheten fläche austritt und in dieser Richtung durch das Okular ins Auge gelangen kann. Die Einrichtung des gebrochenen Fernrohrs zeigt Fig. 52. Die Lichtstrahlen gelangen von dem Objektiv O auf das in dem hohlen Würfel der Achse befindliche Prisma bei P, welches auf einer Platte Q montiert ist, die behufs Rektifikation des Strahlenganges mittels dreier Schräubchen s_1, s_2, s_3 etwas gedreht werden kann; von hier werden sie in die Richtung der zu diesem Zwecke hohlen Achse reflektiert und gelangen durch das am Ende

* Der sogenannte Grenzwinkel der totalen Reflexion findet statt, wenn $\beta = 90°$, $\sin \beta = 1 = \frac{3}{2} \sin \varepsilon$, daher $\sin \varepsilon = \frac{2}{3}$ ist. Er ist verschieden für verschiedene Glassorten, da n für dieselben verschieden ist und schwankt zwischen 37° 36′ (Flintglas) und 40° 50′ (Crownglas).

der Achse angebrachte Okular in das bei A befindliche Auge. Selbstverständlich muß, damit das Fernrohr nicht infolge einseitiger Belastung durch den Objektivstutzen an dieser Seite herabgezogen wird, ein mit dem Fernrohr fest verbundenes Gegengewicht G zur Ausbalancierung angebracht werden.

Für Nachtbeobachtungen ist es nötig, künstliches Licht zu verwenden. Für die Ablesung der Kreise werden Lämpchen genommen, bei denen mitunter in ganz zweckmäßiger Weise das Licht durch vorgestellte Konvexlinsen parallel austretend gemacht wird; diese Lampen bringt man so gegenüber den reflektierenden Papierflächen an, daß die abzulesenden Stellen der Kreise hell erleuchtet erscheinen.

Aber auch das Gesichtsfeld muß beleuchtet werden; denn wenn man auch am dunklen Himmelshintergrunde einen Stern sieht, so kann man ihn doch nicht beobachten, wenn die Fäden nicht gesehen werden; denn die Beobachtung besteht darin, die Zeit zu notieren, wenn der Stern das Fadenkreuz oder den Vertikal- oder Horizontalfaden passiert. Beim gebrochenen Fernrohre ist auch der zweite Teil der Achse (gegen L zu) hohl und bei L (Fig. 52) wird eine Lichtquelle angebracht, deren Licht aber nicht an P reflektiert oder gebrochen werden darf, sondern ungehindert nach A gelangen muß. Es wird daher in der Mitte von P ein zweites ganz kleines Prisma p aus derselben Glassorte so angesetzt, daß hier die eine Kathetenfläche parallel der gegenüberliegenden Kathetenfläche des Hauptprismas ist, so daß das Licht ungebrochen durchgeht.*

Für Universalinstrumente mit geradem Fernrohr werden meist Illuminatoren verwendet. Ein Illuminator ist ein schmaler spiegelnder (versilberter oder mit weißem Papier belegter) Metallring, welcher an einer Fassung r (Fig. 53) befestigt ist, die auf die Objektivfassung des Fernrohres aufgesetzt wird und einen hinreichend großen Ausschnitt hat, um nicht zu viel von dem auf das Objektiv fallenden Lichte abzuhalten. Von dem Spiegel J hingegen wird von einer in einiger Entfernung aufgestellten Lichtquelle L durch Reflexion Licht in die Richtung der Fernrohrachse geworfen; um die

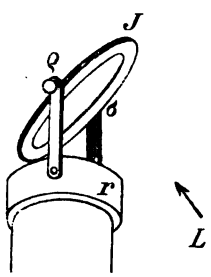


Fig. 53.

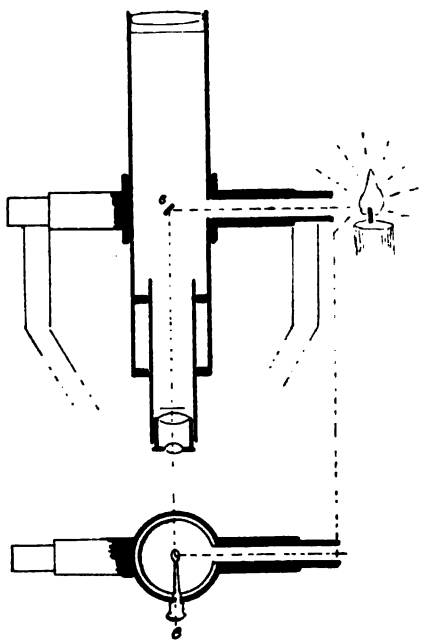


Fig. 54.

* Es ist dies leichter als die ältere Einrichtung, das Prisma an dieser Stelle zu durchbohren.

Richtung zu regulieren ist J zwischen Spitzen ϱ, σ drehbar und es wird der Spiegel am Ringe r und zwischen den Spitzen gedreht, bis das Gesichtsfeld am günstigsten beleuchtet ist.

Mitunter ist auch bei geraden Fernrohren die eine Hälfte der Achse hohl (Fig. 54) und das Fernrohr enthält einen kleinen Spiegel e, von welchem das Licht einer seitlich gestellten Lampe zum Okular reflektiert wird.

B. Instrumente.

a) Zum Vertikal- und Horizontalstellen und zur Messung von Neigungen.

28. Das Lot besteht aus einem an einer Schnur befestigten schweren Körper, der die Schnur in vertikaler Richtung spannt. Um ein Instrument, z. B. das Zentrum eines Theodoliten vertikal über einen Punkt des Feldes zu stellen, dient der Doppelsenkel (Fig. 55). Die Schnur des Senkels L (Fig. 55 a) geht durch eine Bohrung des Gewichtes M, welches an dem zweiten Ende der bei N aufgehängten Schnur befestigt ist; durch Heben oder Senken von M kann der Senkel verlängert oder verkürzt werden. Eine einfachere Form ist in Fig. 55 b dargestellt, wobei die Kette des Lotes an dem Haken der Zentralschraube in brauchbarer Länge je nach der Höhe des Instrumentes angehängt wird. Soll ein in größerer Tiefe liegender Punkt in derselben Vertikalen mit einem höher gelegenen Punkte sein, z. B. eine Marke auf einem in die Erde versenkten Pflock oder Stein mit einem oberirdischen Signal oder Instrumentenstand, so wird an einem über beiden Punkten errichteten Gerüste ein Lot herabgesenkt, der Aufhängepunkt so lange verschoben, bis die untere Spitze des Lotes genau über der tiefer gelegenen Marke liegt. Wird dann das Lot genügend verkürzt und unter demselben nach Aufschüttung von Erdreich der oberirdische Punkt so aufgesetzt, daß die untere Spitze des Lotes wieder genau über demselben liegt, so sind die beiden geloteten Punkte vertikal untereinander. In großer Vollkommenheit wird dieses selbst für sehr große Tiefen durch den folgenden „Apparat für Schachtlotungen“ erreicht. Fig. 56 stellt einen solchen von Breithaupt dar. Das Lot hängt an einem langen dünnen Drahtseil, welches auf einer an einer hochgelegenen Spreize befestigten Kurbel auf- und abgewunden werden kann. Etwas tiefer, ebenfalls an einer Spreize befestigt, ist die eigentliche Aufhängung für das Lot, ein Prisma, durch dessen zentrale Bohrung das Drahtseil geht. Dieses kann mittels zweier Schrauben auf einer befestigten Bodenplatte in zwei aufeinander senkrechten Richtungen so weit verschoben werden, bis das herabgelassene Lot einen bestimmten Punkt trifft. Durch Aufziehen des

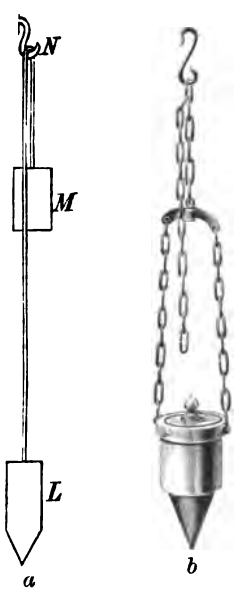


Fig. 55.

Lots kann man dann beliebig viele Punkte vertikal über dem angenommenen Punkte bestimmen. Auch kann der Aufhängepunkt selbst, wenn er in der Höhe eines Stollens ist, direkt von diesem aus anvisiert werden.

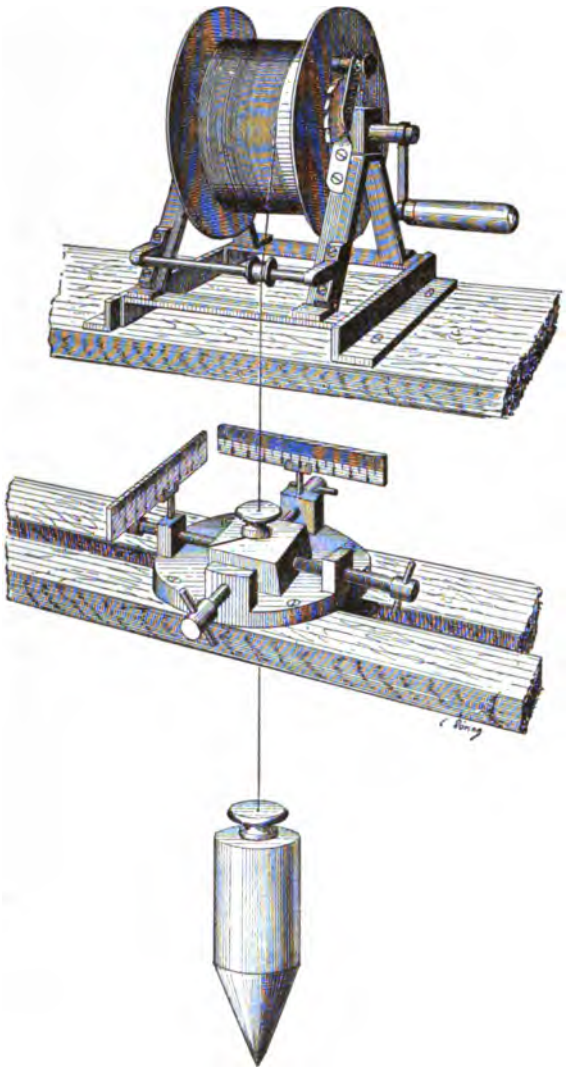


Fig. 56.

Um vertikal über einen in der Tiefe liegenden Punkt ein Winkelmeßinstrument aufzustellen, dient der folgende Nagel-Hildebrandtsche Fernrohrlotapparat. Auf ein mit großer zentraler Durchbohrung versehenes Stativ kommt eine verschiebbare „Zentrierplatte“ mit kugelförmiger Aushöhlung. Der Fernrohrkörper steckt in einer Hülse, die mit dem Dreifuß fest verbunden ist und mittels Kreuzlibellen (s. Nr. 31) vertikal gestellt werden kann, wobei das Objektivende mittels einer Kugel genau in die Höhlung

der Zentrierplatte paßt und in dieser festgehalten wird. Ist das Fernrohr mittels der Fußschrauben vertikal gestellt, so wird die Zentrierplatte so weit verschoben, bis die tiefliegende Marke am Kreuzungspunkte der Fäden des Fernrohrs erscheint (zur scharfen Einstellung muß selbstverständlich der Okularauszug benutzt werden). Die Herzschraube hat hier die Form eines Hohlzylinders (um die Durchsicht durch das Fernrohr nicht zu behindern), der an der Zentrierplatte fest ist und an seinem äußeren Mantel das Gewinde für die Flügelmutter trägt. Ist die Zentrierplatte richtig gestellt, so daß das Bild der Marke am Kreuzungspunkte der Fäden erscheint, so wird das Fernrohr mit dem Dreifuß entfernt und ein Theodolit so aufgestellt, daß seine vertikale Umdrehungsachse genau mit der Lage der Achse des Lotungsfernrohres zusammenfällt. Zu diesem Zwecke hat sein Dreifuß unten verschiebbar eine Zentrierspitze, die über die Mitte der halbkugelförmigen Aushöhlung der Zentrierplatte gestellt werden muß, oder aber, wie bei der „Freiberger Grubenaufstellung" der Dreifuß des Theodoliten endet unten in eine gleiche Kugel, die ebenfalls in die Höhlung der Zentrierplatte eingesetzt wird. An Stelle von Dreifuß, Kugel und Fernrohr des Lotapparates treten dann Dreifuß, Kugel und vertikale Umdrehungsachse des Theodoliten.

Der Lotapparat muß zwei wesentliche Bedingungen erfüllen: 1. Die optische Achse (Kollimationslinie) des Fernrohrs muß mit seiner geometrischen Achse zusammenfallen und 2. bei einspielenden Libellen muß die Kollimationslinie des Fernrohres vertikal sein. Die erste Bedingung wird nach Nr. 19 geprüft und berichtigt. Für die Erfüllung der zweiten Bedingung wird man zunächst die berichtigte Kollimationslinie vertikal stellen; dies geschieht am besten, indem man unter den Dreifuß eine horizontale spiegelnde Fläche (z. B. eine reine Quecksilberoberfläche in einer Schale, einen sogenannten Quecksilberhorizont) setzt, in welchem sich dann das Fadenkreuz spiegelt; die von demselben ausgehenden Strahlen treten nämlich aus dem Objektiv parallel aus, werden in sich selbst reflektiert, wenn die Kollimationslinie senkrecht zur spiegelnden Fläche, also vertikal steht, treten wieder in das Objektiv und vereinigen sich dann in der Ebene des Fadenkreuzes, wo sie das letztere decken; steht aber die Kollimationslinie nicht genau vertikal, so entsteht ein Bild des Fadenkreuzes neben diesem und man hat das Fernrohr so lange zu drehen, bis das Fadenkreuz und dessen Bild sich decken. In dieser Stellung werden die Libellen rektifiziert (nach Nr. 33) und ist dieses geschehen, so wird man sie immer nur wieder zum Einspielen zu bringen haben, um die vertikale Lage des Fernrohrs zu erhalten.

Um vertikal über einen Punkt des Feldes einen Punkt auf einer Platte (Meßtisch) zu bringen, wenn die Lage dieses Punktes an der Unterseite der Platte nicht bestimmt werden kann, bedient man sich der Lotgabel (Fig. 57) eines an einem gabelförmigen Träger T angebrachten Lotes L, wobei die Marke a an dem Oberteil des Trägers an den zu betrachtenden Punkt angelegt wird. Dieses setzt aber voraus, daß a wirklich genau vertikal über L liegt. Man kann dies prüfen, indem man die Lotgabel in zwei um 180° gedrehten Stellungen, also einmal in der Stellung I, sodann in der Stellung II aufsetzt. Würde eine Abweichung in den Sinne stattfinden, daß der untere Träger zu kurz oder zu lang wäre, so würde das Lot in beiden

Stellungen nicht auf denselben Punkt, sondern auf zwei verschiedene Punkte ll' fallen. Auf dieselbe Art kann auch eine seitliche Abweichung, d. h. eine Abweichung in dem Sinne, daß L außerhalb der Ebene aTb liegt, bestimmt werden; ist z. B. aTb in der Zeichnungsfläche gedacht und bei der Lage I das Lot L vor der Ebene der Zeichnung, so wird es bei der Lage II hinter dieselbe fallen; daher würden durch L wieder zwei verschiedene Punkte markiert. Für Korrektionen in dieser Richtung ist nicht gesorgt und muß die Prüfung stets vor der Feldarbeit vorgenommen, eine unrichtige Lotgabel ausgeschieden werden.

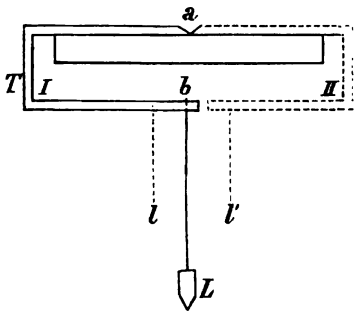


Fig. 57.

29. Die Setzwage ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck aus Holz; an der Spitze des rechten Winkels ist ein Lot befestigt; spielt dieses ein, d. h. trifft das Lot eine im Halbierungspunkte der Hypotenuse angebrachte Marke, so ist die Hypotenuse horizontal. Zur Horizontalstellung von Ebenen wird die Setzwage in zwei aufeinander senkrechte Richtungen gebracht und die Ebene so lange verstellt, bis der Senkel in beiden Lagen einspielt.

Mit einem Gradbogen versehen, dient die Setzwage als Klitometer oder Bergwage (Fig. 58) auch zur Bestimmung von Neigungen. Dazu ist aber nötig, daß die Verbindungslinie des Punktes m, des „Spielpunktes" mit dem Aufhängepunkte O des Lotes zur Basis ab senkrecht stehe; ist dies nicht der Fall, so würde man mit der Bergwage unrichtige Angaben erhalten. Dennoch ist dieselbe zur Messung von Neigungen brauchbar, wenn man auf die Abweichung des Punktes m vom richtigen Punkte Rücksicht nimmt. Sei Ox (Fig. 59a) die Normale zur Basis ab; der Nullpunkt der Skala falle jedoch nicht in diese Richtung; wäre bereits bekannt, daß ab horizontal ist (Aufsetzen auf eine bereits als horizontal erkannte Linie), so würde man sofort die Lesung λ_0 als „Lesung für den Spielpunkt" erhalten. Neigt man ab nach a_1b_1 (Fig. 59b) um einen gewissen Winkel α, so dreht sich das Lot O_1L_1 um denselben Winkel α, so daß $\lambda_0 O_1 L_1 = \alpha$ ist. Die Lesung λ_1 wird aber nicht den Winkel α geben, sondern entspricht dem Bogen $o\lambda_1$, ist daher um den Bogen $o\lambda_0$, welchem die Lesung λ_0 zugehört, zu klein; es ist daher

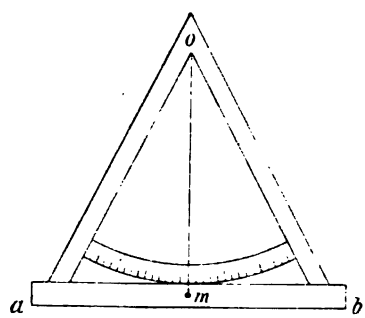


Fig. 58.

$$\alpha = \lambda_1 + \lambda_0.$$

Dreht man hingegen die Gerade ab in entgegengesetzter Richtung nach a_2b_2 (Fig. 59c) um einen Winkel α', so wird sich wieder das Lot beim Drehen in die Lage O_2L_2 ebenfalls um den Winkel α' drehen; die

jetzt gemachte Lesung λ_2 entspricht aber dem Bogen $o\lambda_2$, ist daher um den Bogen $o\lambda_0$ zu groß und es wird daher

$$\alpha' = \lambda_2 - \lambda_0.$$

Auch wenn $\alpha' = \alpha$ wäre, werden die beiden Lesungen λ_1 und λ_2 verschieden sein. Den Fall, daß α' genau gleich α ist, kann man aber leicht

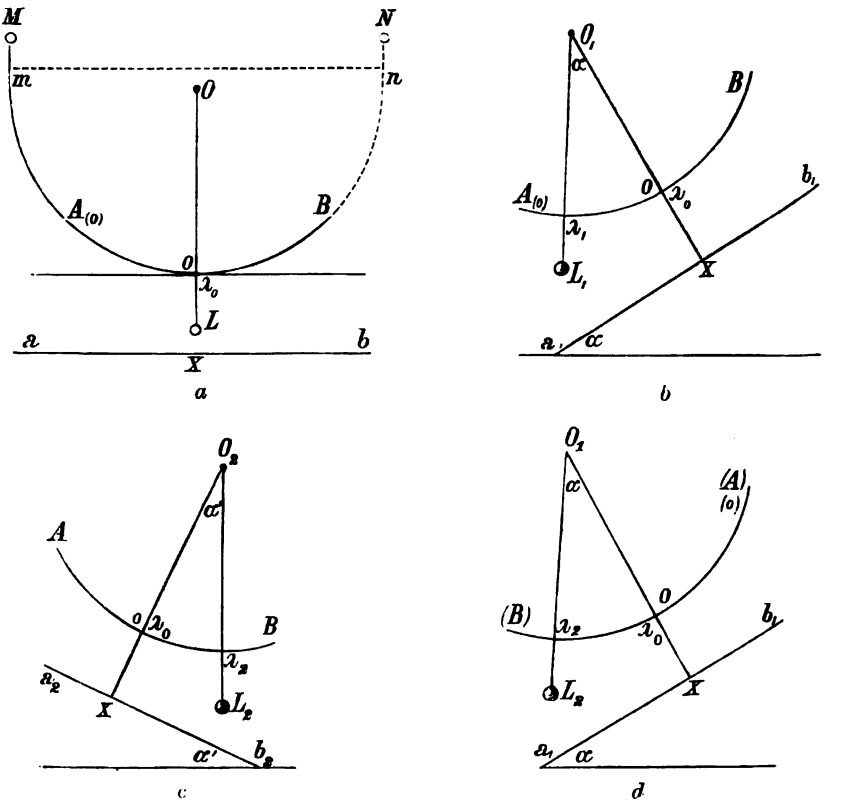


Fig. 59.

erhalten, indem man die Bergwage auf derselben Ebene $a_1 b_1$, aber umgekehrt aufsetzt, nämlich so, daß (B) (Fig. 59*d*) auf die Seite von A, (A) hingegen auf die Seite von B kommt.

Man kann sich dies leicht dadurch veranschaulichen, daß man die Fig. 59*c* im Spiegel betrachtet; dann fällt, wenn $\alpha' = \alpha$ ist, b_2 auf (a_1), a_2 auf (b_1); B auf (B) und A auf (A); $O_2 L_2$ auf $O_1 L_2$ und o, welches früher links von Ox fiel, fällt jetzt rechts. Fig. 59*c* erscheint im Spiegel in der Form von Fig. 59*d*, welche aus 59*b* entsteht, wenn $a_1 b_1$ dieselbe Ebene darstellt, die Bergwage aber um die Achse Ox um 180° gedreht ist (wobei allerdings die Teilung, die früher nach vorn gerichtet war, jetzt nach rückwärts fällt). Da aber der Winkel α derselbe ist, so muß

$$\lambda_1 + \lambda_0 = \lambda_2 - \lambda_0$$

sein. Hieraus folgt dann, da λ_1, λ_2 die in beiden Lagen der Bergwage gemachten Lesungen, also bekannt sind,

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

als die Lesung für den wahren Spielpunkt. Benutzt man diesen Wert von λ_0, so folgt

$$\alpha = \lambda_1 + \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \text{ oder } \alpha = \lambda_2 - \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

demnach

$$\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

als die wahre Neigung. Durch zweimaliges Aufsetzen der Bergwage in zwei um 180° gedrehten Stellungen erhält man daher in dem arithmetischen Mittel der Lesungen die Neigung unabhängig von der unrichtigen Lage des Nullpunktes der Teilung.

Tatsächlich kann der Nullpunkt auch ganz auf der Seite liegen; denn wie groß die Lesung λ_0 ist, ist hierfür ganz belanglos; für die Lage des Nullpunktes ganz an der Seite [bei (*o*)] folgt aus Fig. 59*b*

$$\alpha = \lambda_0 - \lambda_1$$

und nach dem Umsetzen aus Fig. 59*d*:

$$\alpha = \lambda_2 - \lambda_0$$

und daraus

$$\lambda_0 - \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_0; \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad \ldots\ldots (b)$$

und die Unterlage nach derjenigen Seite höher, bei welcher der Nullpunkt liegt, wenn die Lesung größer war.

Beispiel: Sei (für den Fall *b*, d. i. Nullpunkt an der Seite) $\lambda_1 = 8$; $\lambda_2 = 35$, so ist λ_0 nicht bekannt; es findet sich aber

$$\lambda_0 = 21{\cdot}5 \text{ und } \alpha = 13{\cdot}5^p,$$

und zwar das höhere Ende der Unterlage dort, wo der Nullpunkt beim zweiten Aufsetzen war.

Würde man die Bergwage auf eine horizontale Unterlage setzen, so würde das Lot auf den Teilstrich 21·5 zeigen; daraus würden sich die Neigungen $\alpha = 21{\cdot}5 - 8 = 13{\cdot}5$ aus der einen Lage und $\alpha = 35 - 21{\cdot}5 = 13{\cdot}5$ aus der andern Lage, gleich dem oben direkt gefundenen Werte ergeben.

Die Formeln (*a*) gehen aus denjenigen (*b*) hervor, wenn man die Lesungen der Bergwage nach der einen Seite, z. B. gegen *B* hin positiv, gegen *A* zu negativ nimmt.

Ist für den Nullpunkt in der Mitte

$$\lambda_1 = -15, \; \lambda_2 = +37$$

gegeben, so findet man $\lambda_0 = +11$ und $\alpha = +26^p$.

Ist hingegen

$$\lambda_1 = +12,\ \lambda_2 = -28,$$

so würde $\lambda_0 = -8$, $\alpha = -20^p$; α kann daher auch negativ werden; wo es sich nicht um Vergleichungen von Neigungen handelt, wird man α positiv setzen können; in speziellen Fällen, wo die Vergleichung der Neigungen von Wichtigkeit ist, oder wo es nicht gleichgültig ist, welche Seite einer Linie die höhere ist, wird man auf das Zeichen Rücksicht zu nehmen haben (vgl. Nr. 98).

Die Setzwage tritt noch in einer andern Form auf. Bringt man nämlich den Gradbogen statt durch ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Basis ab durch Verlängerung mit einer dazu parallelen Basis mn (Fig. 59a) oder mittels gleich langer Stützen mM, nN mit einer zu ab parallelen Basis MN in Verbindung, so kann man den Gradbogen, statt ihn auf ab aufzusetzen, an MN aufhängen, in welcher Form man den Gradbogen oder Hängebogen der Markscheider (Fig. 60) erhält. In dieser Ausführung

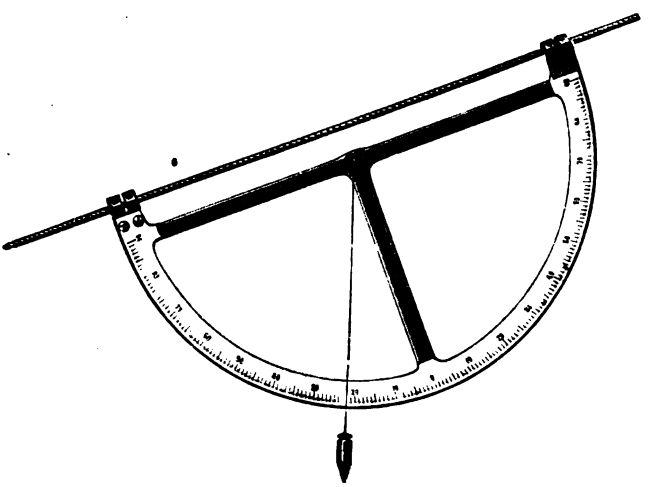


Fig. 60.

dient das Instrument auch zur Bestimmung von Neigungen von straff gespannten Schnüren oder Seilen und damit des Niveauunterschiedes der durch dieselben verbundenen Punkte.

30. Die Kanalwage. Auf dem Prinzipe, daß in kommunizierenden Gefäßen der Flüssigkeitsspiegel gleich hoch steht, beruht die Kanalwage (Fig. 61). Wird das auf einer Unterlage ab aufgesetzte, zweimal rechtwinklig gebogene Glasrohr mit Flüssigkeit bis zu einer gewissen Höhe gefüllt, so wird, wenn ab horizontal (auf einer horizontalen Unterlage) ist, die

Fig. 61.

Flüssigkeit in den beiden Schenkeln bei einer gewissen Höhe m beziehungsweise n stehen und zwei an diesen Stellen angebrachte Marken können die Horizontalität der Unterlage andeuten. Zum Messen von Neigungen kann jedoch dieses Instrument nicht oder doch nicht in einfacher Weise verwendet werden, weshalb die Kanalwage jetzt bereits ganz verlassen ist.

31. Die Libelle oder das Niveau (Wasserwage) ist das vorzüglichste Mittel zum Horizontalstellen und Messen von Neigungen.* Sie beruht auf dem Prinzipe, daß in einem oben geschlossenen Gefäße, das teilweise mit Flüssigkeit gefüllt ist, der „leere" eigentlich mit Luft gefüllte Raum stets die höchste Stelle über der Flüssigkeit einnimmt. Verwendet man hierzu eine zylindrische, oben mit einem konvex (ähnlich einem Uhrglase) angeschliffenen Deckel geschlossene Dose (Fig. 62), so erhält man die sogenannte Dosenlibelle. Dieselbe ist auf einem Untersatze fest, so daß sich die Luftblase in der Mitte befindet, wenn die Unterlage horizontal ist. Zur Rektifikation wird die Unterlage auf anderem Wege horizontal gestellt und die Dose mit Hilfe dreier Stellschrauben so lange verstellt, bis die Libelle einspielt.

Fig. 62.

Diese Libellen gewähren aber nur eine geringe Genauigkeit. Für größere Präzision hat man die Röhrenlibellen. Bei diesen wird eine gebogene, mit der Konvexität nach oben gerichtete Röhre bis auf einen kleinen Raum mit Flüssigkeit gefüllt; auch hier wird die „Luftblase" stets den höchsten Punkt einnehmen. In der Praxis wird die Krümmung nur äußerst schwach gemacht, weil dadurch die Libelle empfindlicher wird (s. unten). Mitunter ist die Libelle auf beiden Seiten konvex und gleich gekrümmt, so daß dieselbe um ihre Längsachse xy (Fig. 63) gedreht und auch in dieser

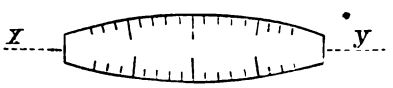


Fig. 63.

Lage verwendet werden kann. Diese Libellen nennt man Reversions- oder Doppellibellen.**

Um die Libellen zum Horizontalstellen beziehungsweise zum Messen von Neigungen verwenden zu können, werden sie in Fassungen montiert. Man unterscheidet:

a) Das Setzniveau (Fig. 64*a*). Die Glasröhre ist in einer schützenden Metallröhre eingeschlossen, die oben einen nicht zu großen Ausschnitt hat,

* Das Niveau mit Luftblase soll von dem Franzosen Thevenet in „L'École des Arpenteurs, Paris 1692," beschrieben worden sein (vgl. A. Laussedat, Recherches sur les instruments, les methodes et le dessin topographiques, Tome I, pag. 108). Allgemeine Einführung erhielt sie seit Hadley 1730.

** Eine solche beschreibt schon Joh. Tob. Mayer in seinem „Gründlichen und ausführlichen Unterricht zur praktischen Geometrie, 2. Aufl., Göttingen 1792", II. Bd. S. 109.

um durch denselben die Bewegung der Luftblase zu sehen. Die Metallröhre ist mittels Stützen auf einer Unterlage montiert, mit der sie auf eine Ebene gesetzt werden kann; bei g ist die Fassung in einem Gelenke drehbar, bei r durch eine Schraube und Feder oder durch zwei Schrauben nach Art der Darstellungen Fig. 7 verstellbar. Da die Blase sich stets nach derjenigen Seite bewegt, welche höher ist, so wird dieselbe, wenn r gehoben wird, sich nach r bewegen, beim Senken in entgegengesetzter Richtung. Setzlibellen, welche auf Achsen aufzusetzen sein sollen, erhalten Füßchen (Fig. 64 b) oder nach Fig. 7; in diesem Falle ist die Libelle in ihrer Fassung unveränderlich, hingegen sind die Füßchen durch die Rektifizierschrauben r_1, r_2 (Fig. 7 a) zu verlängern oder zu verkürzen; das erstere geschieht durch Nähern der beiden federnden Teile am Fuße, das letztere durch Entfernen derselben.

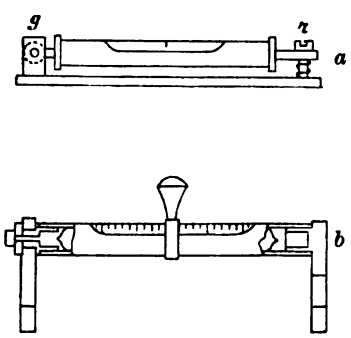


Fig. 64.

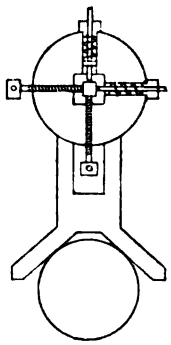


Fig. 65.

In Fig. 7 c hingegen sind die Füßchen unveränderlich und die Libelle in ihrer Fassung an einer Seite zu heben und zu senken. Das andere Ende der Libelle ist aus einem später ersichtlichen Grunde stets etwas seitlich zu verschieben (Fig. 7 b). Seitliche und vertikale Verschiebung an demselben Ende kann nach Art der Fig. 65 bewirkt werden.

b) Das Hängeniveau (Fig. 66). Die Libelle wird von zwei Armen getragen und mittels derselben nach Fig. 66 a, b aufgesetzt (vgl. auch die Fig. 139 und 140).

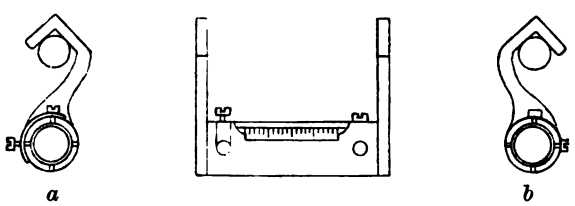


Fig. 66.

Die Lesung der Libellen erfolgt von oben, wird aber mitunter durch darüber angebrachte Spiegel erleichtert, so daß man die Teilstriche horizontal oder von schief unten in den Spiegel sehend, ablesen kann (vgl. Fig. 135). Da der Spiegel die Bilder umkehrt, so werden dann die Bezifferungen auf der Libelle umgekehrt angebracht, so daß das Spiegelbild aufrecht wird.

Eine besondere Form der Ablesung findet sich bei den französischen und belgischen Nivellierinstrumenten; hier werden durch wiederholte Reflexion in den Prismen *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 67) und durch eine Linse *L* beide Enden der Blase nebeneinander in der in Fig. 67*a* angedeuteten Art wahrgenommen.

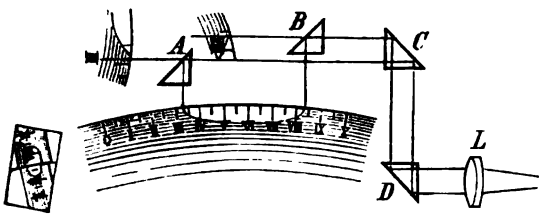


Fig. 67.

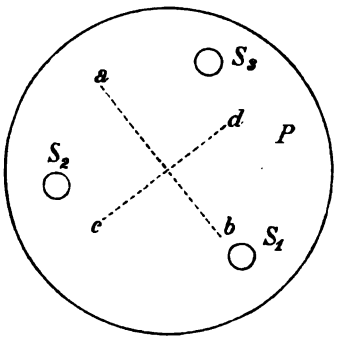


Fig. 68.

Der höchste Punkt, an welchem die Luftblase einspielen soll, wenn die Unterlage horizontal ist, wird bezeichnet und der Spielpunkt genannt; man sagt, eine Libelle ist richtig, wenn das Einspielen der Libelle bei horizontaler Unterlage stattfindet. Will man dann eine Ebene horizontal stellen, so wird die als richtig vorausgesetzte Libelle in zwei aufeinander senkrechten Richtungen aufgesetzt und die Unterlage mit Hilfe der Schrauben des Dreifußes so lange verstellt, bis die Libelle nach beiden Richtungen einspielt. Die Libelle wird z. B. erst in die Richtung *ab* Fig. 68 gegen eine Stellschraube S_1 hin aufgesetzt und durch Drehen von S_1 diese Seite so lange gehoben oder gesenkt, bis die Libelle einspielt. Setzt man dann die Libelle in der Richtung *cd* auf und spielt sie nicht ein, so muß dafür gesorgt werden, daß beim Verschrauben von S_2 und S_3 die Linie *ab* ihre Lage nicht mehr ändert. Es wird demnach S_2 gehoben und S_3 um ebensoviel gesenkt oder umgekehrt (was durch gleichmäßiges Drehen der beiden Schrauben im entgegengesetzten Sinne geschieht), so daß die Platte *P* sich um *ab* als Achse dreht, die Linie *ab* daher ihre Neigung nicht mehr ändert. Da man aber nie so gleichmäßig drehen kann, daß *ab* wirklich völlig unverändert bleibt, so wird die Libelle neuerdings in die Richtung *ab* gebracht und eine etwa entstandene kleine Abweichung wieder auf dieselbe Weise weggeschafft. Meist wird ein zweimaliges Umsetzen genügen.

Sind auf der Platte andere Instrumententeile, so daß die Libelle nicht aufgesetzt werden kann, so werden oft neben derselben mit der Platte fest verbunden zwei Niveaux in der Richtung *ab* und *cd* sogenannte Kreuzlibellen angebracht, welche selbstverständlich richtig sein müssen (vgl. die Fig. 132, 152 und 154).

32. Der Libellenprüfer. Soll das Niveau zur Messung von Neigungen dienen, so muß einer Neigungsänderung um gleiche Winkel auch eine Bewegung der Blase um gleiche Bögen entsprechen, was nur dann stattfinden wird, wenn die Krümmung der Röhre vollständig gleichmäßig ist. Zu feinen Libellen werden daher nicht gebogene, sondern an ihrer inneren Seite nach Kreisen angeschliffene Röhren verwendet und auf diesen eine Teilung in

gleiche Teile angebracht. Wäre diese direkt eine Gradteilung, so würde bei der Neigung der Libellenunterlage um 1° auch die Blase um 1^p, d. i. 1° weitergehen, $1^p = 1°$. Dieses ist jedoch nicht der Fall, für feinere Libellen wird $1^p = 1'$ selbst $1^p = 10''$ und noch weniger sein können und man muß den genauen Wert des Teilstriches den „Parswert der Libelle" kennen. Zur genauen Bestimmung desselben dient eine als Libellenprüfer oder Legebrett bezeichnete Vorrichtung (Fig. 69). An der einen Seite, um zwei Füße drehbar, ist eine lange, starke, eben gehobelte Stahlschiene, die an der andern Seite (in der Figur vorn) durch eine Mikrometerschraube gehoben oder gesenkt werden kann. Auf die Stahlschiene kommt die Libelle

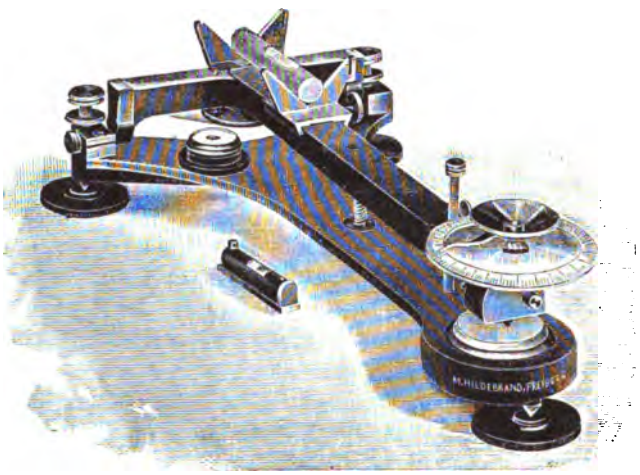


Fig. 69.

entweder in ihrer Fassung oder auf verschiebbaren, in passenden Entfernungen zu stellenden V-förmigen Trägern dieselbe ohne Fassung.* Ebenso kann man Hängelibellen in der Fassung untersuchen, zu welchem Zwecke auf die Schiene Träger von passender Höhe aufgesetzt werden. Bewegt sich dann die Libelle um m Teile, wenn die Mikrometerschraube um a^R gedreht wurde, so entspricht 1^p der Libelle einer Drehung um $\frac{a^R}{m}$ und ist $1^R = n''$,

so wird $$1^p \text{ der Libelle} = \frac{a}{m} . n''.$$

Sei z. B. zur Bewegung der Blase einer Libelle um 20^p eine Drehung der Schraube um $2{\cdot}64^R$ nötig gewesen (die Bruchteile am Kopfe der Schraube, die ganzen Revolutionen an einem neben der Schraube befindlichen Index gelesen), so ist $1^p = 0{\cdot}132^R$. Der Wert einer Revolution ergibt sich, wenn der Abstand der Schraube von der Drehungsachse (die dazwischen befindliche Länge der Schiene) und die Schraubenganghöhe bekannt ist. Sei z. B. die Länge der Schiene 40 *cm*, die Schraubenganghöhe 0·2 *mm*, so ent-

* Der Parswert ist in der Fassung meist infolge von Spannungen etwas anders als ohne Fassung.

spricht 1^R der Bogen 0·0005, daher ist 1^p der Libelle gleich 0·000066 = 13·6″.*

33. Bestimmung der Neigung und Rektifikation der Libelle. Die Lesungen der Libelle werden aber nicht in der Mitte vorgenommen, denn die Blase hat eine gewisse Länge und der Abstand des Mittelpunktes könnte nur geschätzt werden. Statt dessen wird daher stets der Ort des Mittelpunktes aus den Lesungen an den beiden Enden erschlossen. Seien die Lesungen an der Skala für die beiden Enden (links, rechts) l und r (Fig. 70*a*), so wird die Lesung für die Mitte der Blase $m = \frac{r+l}{2}$, denn es ist die halbe Länge der Blase $m - l = r - m$; dieses gilt zunächst, wenn der

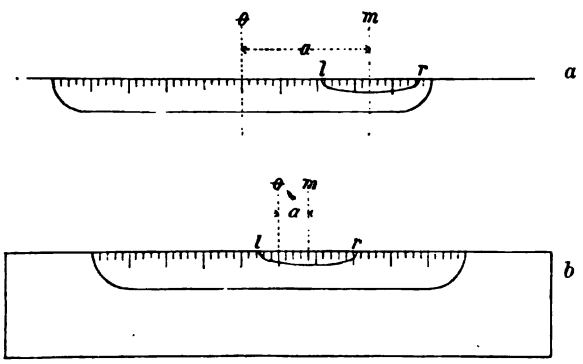


Fig. 70.

Nullpunkt der Teilung ganz am Ende derselben wäre, gilt aber auch, wenn der Nullpunkt in der Mitte ist und die Blase sich zu beiden Seiten erstreckt (Fig. 70*b*), wenn man die Lesungen nach der einen Seite als positiv, nach der andern als negativ ansieht.** Zählt man z. B. die Lesungen nach rechts positiv, so wird die linke Hälfte der Blase $a - l = a + \lambda$, weil l negativ gleich $-\lambda$ ist. Das Zeichen von m gibt auch sofort an, ob sich die Blasenmitte rechts (Zeichen plus) oder links (Zeichen minus) befindet. Ist z. B.

1. $l = +17$, $r = +25$, so wird $m = +21$ (Blasenlänge 8^p)
2. $l = -8$, $r = +10$ „ „ $m = +1$ („ 18^p)
3. $l = -21$, $r = -5$ „ „ $m = -13$ („ 16^p)

---

* Genauer kann der Wert von 1^R bestimmt werden, indem auf die Schiene ein Fernrohr aufgesetzt und gegen eine entfernte geteilte Latte gerichtet wird; bewegt sich die Visur bei der Drehung der Schraube um 1^R an der Latte um a *cm* und ist die Entfernung der Latte vom Drehpunkt der Schiene d *cm*, so ist 1^R gleich einem Winkel $\frac{a}{d}$; ist z. B. $d = 10\,m = 1000\,cm$, $a = 5{\cdot}2\,mm = 0{\cdot}52\,cm$, so wird $1^R = 0{\cdot}00052$, daher 1^p der Libelle gleich 0·0000686 = 14·15″.

** Es wäre gut, bei von der Mitte aus geteilten Libellen die auf der einen Seite befindlichen Ziffern als negative zu bezeichnen; geschieht dies nicht schon vom Mechaniker, so kann man ein Minuszeichen an der einen Seite der Fassung einritzen.

Mit der Libelle soll nun die Neigung der Unterlage bestimmt werden; aber auf diese wird nicht die Libelle direkt aufgesetzt, sondern entweder die Platte, auf der sie montiert ist, oder die Verbindungslinie der unteren Fußenden oder der oberen Arme. Diese Verbindungslinie nennt man die Basis der Libelle. Ist die Basis der Libelle horizontal, so soll die Blase nahe der Mitte der Röhre stehen, damit sie nach beiden Seiten gleiche Ausschläge machen kann. Ist der Nullpunkt in der Mitte, so wird man für die Horizontalstellung danach streben, die Lesungen links und rechts gleich zu erhalten, d. h. man wird die Libelle zum Einspielen zu bringen suchen. Man nennt dies das Rektifizieren der Libelle; es geschieht mit den Korrektionsschräubchen (Fig. 7) durch Heben oder Senken des betreffenden Libellenendes. Ist eine Libelle vollständig rektifiziert, so kann sie in der bereits erwähnten Weise zum Horizontalstellen von Unterlagen verwendet werden (vgl. Nr. 31).

Ob nun die Unterlage eine horizontal zu stellende Platte (Meßtisch, Dreifuß, Kreisebene) oder eine horizontal zu stellende Achse (Achsenlibelle der Universalinstrumente, Alhidadenlibelle) oder ein horizontal zu stellendes Fernrohr (Nivellierinstrument) ist, ist für die Rektifikation vollständig gleichgültig. Ein Unterschied für diese resultiert nur daraus, daß die Libelle entweder auf der Unterlage umsetzbar ist oder auf dieser festsitzt.

a) Die Libelle ist auf der Unterlage umsetzbar. Sie wird aufgesetzt und abgelesen; sodann umgesetzt, so daß das früher rechte Ende jetzt nach links, das früher linke Ende nach rechts kommt. Wäre die Libelle rektifiziert, so müßten sich die Lesungen in beiden Lagen identisch ergeben. Sind sie es nicht, so kann man auf folgende Weise die richtige Lage des Spielpunktes ermitteln. Seien die Lesungen

für die Lage	I:	links 12·7,	rechts 6·3	
„ „ „	II:	„ 11·2	„ 7·8,	
so wäre eigentlich die richtige Lesung		„ 11·95	„ 7·05	

und man wird die Libelle (in der II. Lage) rechts so weit zu heben haben, daß diese Lesungen resultieren, also um $0{\cdot}75^p$. Durch wiederholtes Umsetzen wird man sich von dem Gelingen der Operation überzeugen. Zu beachten ist dabei, daß man Libellen immer aus einiger Entfernung lesen muß, weil einseitiges Erwärmen die Blase zur Bewegung bringt. Auch nach der Rektifikation wird man einige Minuten warten, bis die Temperaturen sich ausgeglichen haben. Da sich gemäß den Lesungen an der rektifizierten Libelle die Blase um $4{\cdot}9^p$ weiter links befindet, daher der Blasenmittelpunkt um $2{\cdot}45^p$ vom rektifizierten Spielpunkte entfernt ist, so wäre die Neigung der Unterlage $2{\cdot}45^p$ oder, wenn z. B. $1^p = 8{\cdot}4''$ wäre, gleich $20{\cdot}6''$. Ist die Unterlage gleichzeitig horizontal zu stellen, so wird nach Rektifikation der Libelle diese durch Drehung der Fußschraube zum Einspielen gebracht, d. h. die Neigung in dieser Richtung gleichzeitig mit weggeschafft, weshalb hierzu die Libelle stets in die Richtung einer der drei Fußschrauben gebracht wird.

b) Die Libelle ist auf der Unterlage nicht umsetzbar.

α) Ist dann die Unterlage um eine auf derselben senkrecht stehende, also vertikale Umdrehungsachse drehbar, so wird man die Libelle bei einer gewissen Stellung I der Unterlage lesen, dann die Libelle mit der Unterlage um 180° drehen (Lage II), so daß die Richtung der Libelle die umgekehrte ist, man kann nun genau so wie bei α) schließen, wenn die Unterlage wirklich senkrecht steht zur vertikalen Umdrehungsachse, denn in diesem Falle fällt die Unterlage im zweiten Falle mit derjenigen im ersten Falle zusammen. In dieser Weise kann man die Kreuzlibellen an den Horizontalkreisen usw. rektifizieren, und zwar gleichzeitig, da beide bei derselben Drehung um 180° in die entgegengesetzte Lage kommen.

β) Es kann aber sein, daß die Unterlage nicht oder nicht genau auf der vertikalen Umdrehungsachse senkrecht steht (z. B. die horizontale Umdrehungsachse eines Instrumentes, ein Nivellierfernrohr mit Kippschraube und fester Libelle, eine feste Alhidadenlibelle) oder daß man erst diese richtige Stellung prüfen eventuell untersuchen will. Ist die Libelle rektifiziert, so kann man durch Einspielen derselben die Unterlage AB (Fig. 71) in einer gewissen Lage horizontal stellen, die Lesungen der Libelle seien z. B. 9·5 beiderseits; ist AB aber auf der Drehungsachse OP nicht senkrecht, so daß z. B. $\sphericalangle BOP < 90°$ ist, so kommt nach Umdrehung um 180° B nach B', A nach A', so daß $\sphericalangle B'OP = \sphericalangle BOP$ ist; in dieser neuen Lage kann daher $A'B'$ nicht horizontal sein, die Libelle wird folglich eine Abweichung zeigen, die Lesungen seien z. B. 6·5, 12·5. Wird man daher die Abweichung von $B'A'$ gegen die Horizontale d. i. $3{\cdot}0^p$ jederseits um die Hälfte korrigieren, indem die Achse an der Seite B' gehoben wird, bis die Libellenlesungen 8·0, 11·0 sind, so kommt $B'A'$ in die Lage B_0A_0, ist daher jetzt senkrecht auf OP, aber noch nicht horizontal; die weiteren $1{\cdot}5^p$ müssen daher weggeschafft werden, indem der mit OP verbundene Dreifuß auf der Seite von B_0 gehoben wird. Es wird also gleichzeitig die normale Stellung von AB gegen OP und die Vertikalstellung von OP erzielt. Ehe hieran geschritten wird, muß aber die Libelle rektifiziert sein, was etwa mit Zuhilfenahme einer andern umsetzbaren Libelle geschehen kann, indem die Unterlage mit Hilfe dieser horizontal gestellt und die feste Libelle in dieser Stellung der Unterlage durch die Rektifizierschrauben zum Einspielen gebracht wird. In besonderen Fällen ist dies allerdings unnötig, da aber hierzu nur besondere Methoden dienen, so kann hiervon erst an späterer Stelle gesprochen werden.

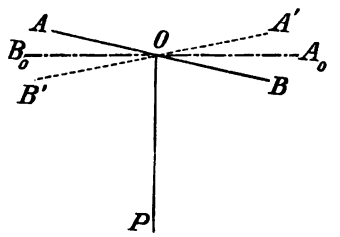


Fig. 71.

Die vollständige Rektifikation ist jedoch auf die Dauer nicht zu erhalten und auch zwecklos, da man auch mit nicht rektifizierten Libellen, ja auch, wenn der Nullpunkt auf einer Seite ist, Neigungen richtig bestimmen kann.

Zu diesem Zwecke denke man sich nur den Gradbogen der Bergwage mit der Konvexität nach oben, das Lot nach der entgegengesetzten Seite beschwert und mit einem Zeiger nach oben gegen den Gradbogen zu versehen (Fig. 72); der nach aufwärts gerichtete Zeiger, der stets den höchsten Punkt

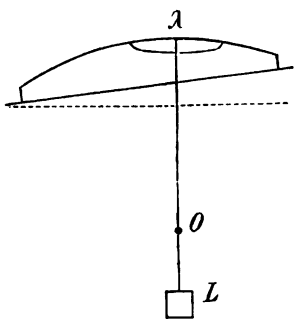


Fig. 72.

einzunehmen sucht, ist der Mittelpunkt der Blase. Es gelten daher dieselben Formeln wie dort, nur sind die Lesungen λ aus den Lesungen an den Enden der Blase zu bestimmen. Es ist, wenn man den Nullpunkt seitlich voraussetzt: bei Nullpunkt links: $\lambda_1 = \frac{r_1 + l_1}{2}$; bei Nullpunkt rechts: $\lambda_2 = \frac{l_2 + r_2}{2}$ demnach*

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\,[(r_2 + l_2) - (r_1 + l_1)]$$
$$\lambda_0 = \tfrac{1}{4}\,[(r_2 + l_2) + (r_1 + l_1)].$$

Beispiel: 1. Sei in der einen Stellung der Libelle (Nullpunkt links, daher die Lesungen nach rechts wachsend) $l_1 = 25{\cdot}4$, $r_1 = 37{\cdot}9$; nach dem Umsetzen (Nullpunkt rechts): $l_2 = 21{\cdot}8$, $r_2 = 9{\cdot}3$, so folgt

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{4}(31{\cdot}1 + 63{\cdot}3) = 23{\cdot}6^p$$

als Spielpunkt, d. h. als derjenige Punkt, auf welchem der Blasenmittelpunkt stehen würde, wenn die Unterlage horizontal wäre. Für die Neigung ergibt sich

$$\alpha = \tfrac{1}{4}(31{\cdot}1 - 63{\cdot}3) = -8{\cdot}05^p.$$

2. Sei für eine Libelle mit Nullpunkt in der Mitte (Beispiel S. 66): $l_1 = 12{\cdot}7$, $r_1 = -6{\cdot}3$; $l_2 = -11{\cdot}2$, $r_2 = +7{\cdot}8$, so wird $\lambda_0 = +0{\cdot}75^p$; $\alpha = -2{\cdot}45^p$ wie oben.

Libellen, welche auf Achsen aufgesetzt oder angehängt werden, sind aber um diese Achsen drehbar und können im ersten Falle leicht herabfallen, weshalb sie durch besondere gabelförmige Stützen, die aber die Libellenbewegung nicht hindern dürfen, geschützt werden (vgl. Fig. 135). Allein selbst kleine seitliche Verschiebungen müssen berücksichtigt werden, da sie den Stand der Blase ändern können, wenn nämlich die Achse der Libellenröhre nicht parallel mit der Instrumentenachse ist, auf welcher die Libelle aufgesetzt ist. Ist AB (Fig. 73) die horizontale Umdrehungsachse des

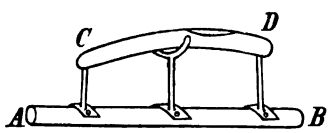


Fig. 73.

Instruments, CD die Libelle, mit AB nicht in derselben Ebene, d. h. kreuzen sich die Achsen, so wird eine Drehung der Libelle um AB die Stellung der Blase ändern. Ist z. B. ABC in der Zeichnungsfläche, D aber hinter derselben, so wird bei einer Drehung der Libelle nach vorn C gesenkt,

* Zur Probe bilde man stets $l_2 - r_2$ und $r_1 - l_1$; diese Unterschiede geben nämlich die Länge der Blase und müssen daher in beiden Beobachtungen nahe gleich sein; kleine Änderungen, welche sich zeigen, rühren meist von Temperaturänderungen her.

D gehoben, daher die Blase nach rechts gehen. Es ist demnach wichtig, daß AB und CD in derselben Ebene liegen. Zu diesem Zwecke dienen die an dem einen Ende der Libelle angebrachten Justierschräubchen zur seitlichen Verschiebung und die Justierung muß so lange vorgenommen werden, bis bei einer Drehung der Libelle um AB die Blase ihre Lage nicht ändert.

34. Das Füllen der Libellen. Die in der Libelle enthaltene Flüssigkeit ist nicht Wasser, sondern eine Mischung von meist gleichen Teilen Weingeist und Äther. Diese Mischung ist besser als Alkohol allein, da die Blase beweglicher und empfindlicher ist und einen leichteren Gang hat, trotzdem aber rascher zur Ruhe kommt. Bei mittleren Temperaturen soll die Blasenlänge etwa die Hälfte der Länge des Rohres haben. Die Libellen werden am besten in mäßiger Wärme gefüllt und dann zugeschmolzen. Beim Abkühlen zieht sich dann die Flüssigkeit zusammen und der „leere Raum", die Blase, ist in diesem Falle Ätherdampf. Bei noch größerer Abkühlung wird die Blase länger, weil sich die Flüssigkeit noch weiter zusammenzieht, bei größerer Wärme wird die Blase kürzer. Oft ist aber für verschiedene Blasenlängen der Parswert ein anderer und um die allzugroße Änderung der Blasenlänge zu vermeiden, wird die Libelle an der Seite mit einer Kammer versehen (Fig. 74), die nur durch eine kleine Öffnung unten

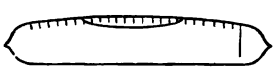


Fig. 74.

mit dem Hauptraume kommuniziert. Wird die Blase zu lang, so wird die Libelle umgekehrt und ein Teil der Blase in die Kammer, dafür ein Teil der Flüssigkeit aus dieser in die Libelle übergehen gelassen.

Mitunter sind die Libellen nicht zugeschmolzen, sondern die Röhre ist seitlich offen, plan angeschliffen und kann durch ebenfalls eben abgeschliffene Gläser geschlossen werden. Diese Libellen verdunsten häufig, namentlich in wärmerem Klima. Um sie neuerdings zu füllen, wird man sie zunächst auf einer Seite öffnen. Sollten bereits beide Seiten offen sein, so wird eine Seite vorerst verschlossen, indem das Röhrenende mit etwas dickem arabischem Gummi oder Hausenblase bestrichen und die Platte angeklebt wird; es darf aber nichts von dem Klebemittel in die Libellenröhre kommen, damit sich nicht nach dem Trocknen Teilchen ablösen und in die Flüssigkeit gelangen. Über die so befestigte Glasplatte wird eine in Wasser getauchte und gedehnte dünne Schweinsblase ihrer ganzen Fläche nach angeklebt und festgebunden. Ist diese Seite ganz trocken, so wird die Libelle mit der Flüssigkeit (für das heiße Klima ist reiner Alkohol vorzuziehen) bis auf eine kleine Blase gefüllt und die zweite Seite ebenfalls in derselben Weise verschlossen.

b) Signalisierung.

35. Pflock-, Gerüst-, gemauerte Signale, Grubensignale. Zum Bezeichnen von Punkten auf dem Felde bedient man sich der Signale. Dieselben können vorübergehend „zeitweilig" für die Dauer der Beobachtungen

oder bleibend „dauernde Signale“ sein. Als zeitweilige benutzt man für die Zwecke der Detailvermessung Meßpflöcke, welche unten zugespitzt, mit eisernen Spitzen versehen sind, wodurch das Eindrücken in den Boden erleichtert wird. Um die so bezeichneten Punkte auf weitere Entfernungen hin sichtbar zu machen, werden auf dieselben lange Stäbe gestellt, die mit verschiedenen Farben, weiß-schwarz oder weiß-rot, gestrichen sind oder aber oben durch Fahnen (Meßfahnen, Figurierfahnen) oder durch Brettchen, die meist auch Nummern tragen, weithin sichtbar gemacht sind. Dieselben sollen genau vertikal gehalten werden; für genauere Messungen werden dieselben in eigenen Ringen r mittels Schrauben festgehalten (Fig. 75).

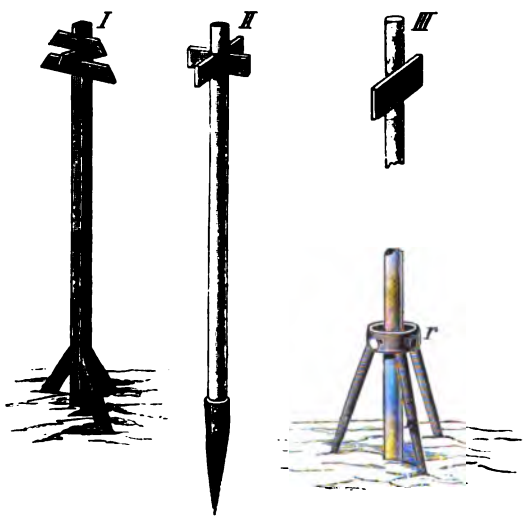


Fig. 75.

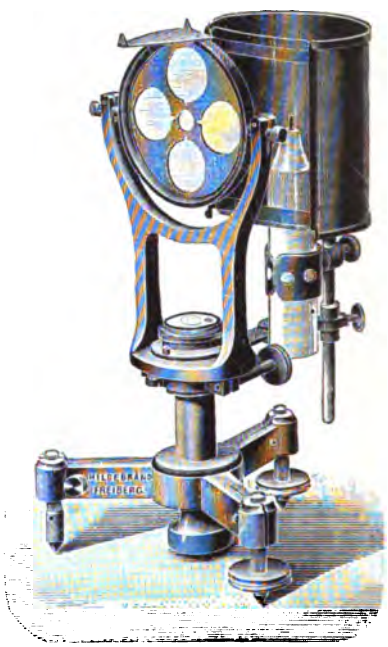


Fig. 76.

Bei Gruben-, Tunnelarbeiten usw. werden statt diesen Lichtsignale verwendet; ein solches zeigt Fig. 76: das Licht fällt von einer Lampe durch Glasscheiben hindurch; zur Vertikalstellung dient eine Dosenlibelle.

Für die Landestriangulation werden meist dauernde Signale errichtet, welche einerseits den Zweck erfüllen müssen, daß sie von weit entfernten Punkten gesehen werden und daß man daselbst anderseits Instrumente aufstellen kann. Instrumentenstand und Signalstange müssen daher denselben Punkt auf der Erdoberfläche bedeuten, daher vertikal übereinander liegen und werden überdies für die dauernde Festlegung unterirdisch durch einen vertikal darunter liegenden, in eine entsprechende Höhlung des Erdreichs versenkten Steinwürfel markiert. Auf der Oberfläche des letzteren ist zur genauen Bezeichnung des Punktes eine zylindrische oder sich nach unten schwach erweiternde konische Bohrung, in welche ein Stahlzylinder oder Konus eingelassen wird, in dessen eben abgeschliffener Oberfläche A (Fig. 77) der wahre Beobachtungspunkt durch zwei sich unter rechten Winkeln schneidenden eingeritzten Geraden bezeichnet wird. Damit der Punkt bei

etwaigen Unfällen, die den Stein treffen sollten, nicht verloren gehen kann, werden dann in vier im Quadrate liegenden Punkten rings herum in ähnlicher Weise kleinere Würfel eingesenkt, an deren Oberfläche ebenfalls Punkte *a* markiert werden, so daß der eigentliche Fixpunkt in dem Durchschnittspunkte der Diagonalen des durch die vier Seitenwürfel gebildeten Quadrates liegt. Der so bezeichnete Punkt wird dann heraufgelotet (vgl. Nr. 28),

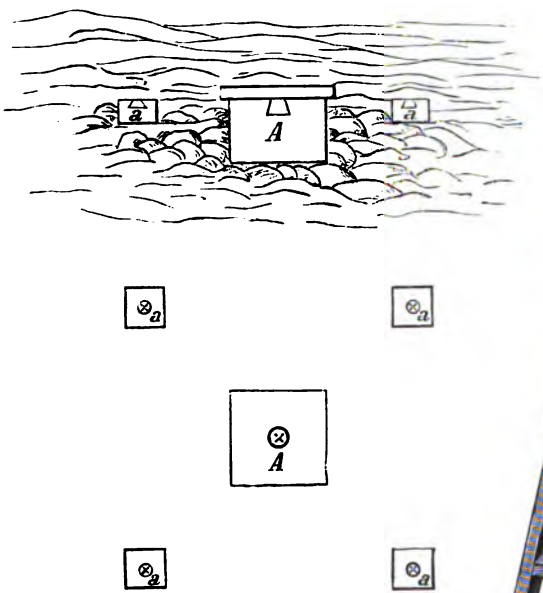


Fig. 77.

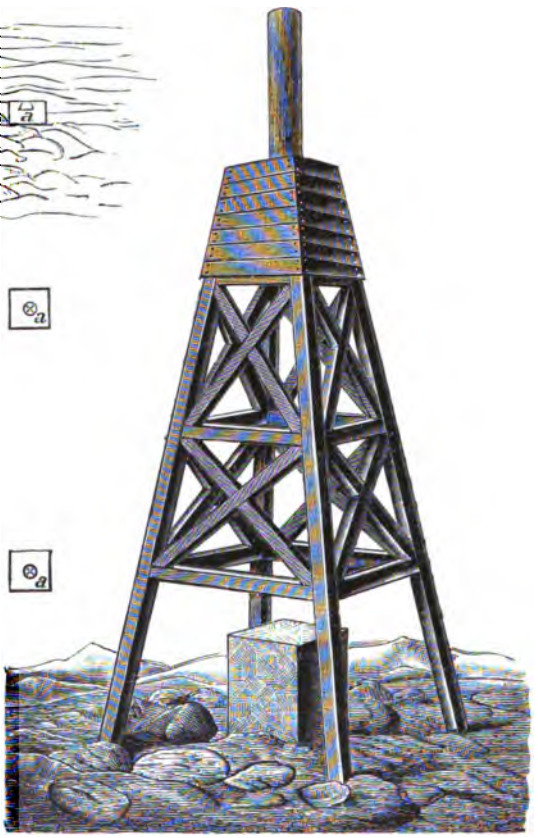


Fig. 78.

das Erdreich verschüttet und darüber ein zweiter Stein als Beobachtungsstand gesetzt, auf welchem mittels des Lotes der genau vertikal über dem versenkten Punkte liegende Punkt bezeichnet wird. Um diesen herum bleibt die schon früher für die Lotung errichtete Holzpyramide als Gerüstsignal stehen (Fig. 78) oder es wird nachträglich eine solche errichtet. Gewisse Punkte, welche besonders wichtig sind (Basisendpunkte, Fundamentalpunkte), werden durch gemauerte Signale bezeichnet, die durch architektonische Ausschmückung gegen mutwilligen Frevel geschützt werden, auf höher gelegenen Punkten zu Aussichtswarten dienen.. In Griechenland wurde von Oberst Hartl ein Versuch mit eisernen Signalen (Fig. 79) gemacht, da wegen der Holzarmut des Landes die hölzernen Signale sehr gefährdet waren.

In ähnlicher Weise werden auch „Höhenmarken“ angebracht, um bei der Bestimmung der relativen Höhe verschiedener Punkte als Fixpunkte zu dienen: an den Mauern der Häuser, namentlich öffentlicher Gebäude, Bahn-

höfe usw. werden eben geschliffene Platten (Fig. 80) angebracht; an vertikalen Felswänden ebene Flächen angeschliffen und in dieselben horizontale Striche mit der Bezeichnung „Höhenmarke des Nivellements“ usw. gezogen.

Fig. 79.

Fig. 80.

Sowohl die Pyramiden als auch die Höhenmarken unterscheiden sich mannigfach, namentlich nach der Art und Bedeutung des zu bezeichnenden Punktes, Dauerhafte Signale, eine besonders sorgfältige unterirdische Markierung wird für die Basisendpunkte und für die Triangulierungspunkte erster Ordnung gewählt; ebenso werden einzelne Punkte des Nivellements als „Urhöhenmarken“ besonders sicher bezeichnet. Auch auf die Triangulierungspunkte zweiter Ordnung muß noch eine erhebliche Sorgfalt verwendet werden; die Punkte dritter und vierter Ordnung werden mit Rücksicht auf ihre viel größere Zahl und die damit verknüpften Auslagen auch unterirdisch oft nur durch große eingerammte Pflöcke festgelegt, auf deren oberer ebenfalls eben abgeschnittenen Fläche ein Kreuz eingeschnitten wird. Seitlich eingerammte kleinere Pflöcke dienen auch hier zur besseren Sicherung des eigentlichen Punktes.* Von dauernden Pyramiden kann hierbei abgesehen werden; die oberirdische Bezeichnung für die Dauer der Vermessung wird mit Rücksicht auf die geringe Entfernung durch größere, besonders auffällige Stocksignale (Fig. 75 *I*) vorgenommen.

* Die Dimensionen für Haupt- und Nebenmarkierung sind meist vorgeschrieben, um aus denselben im gegebenen Falle sofort zu erkennen, ob man es mit dem Dreieckspunkte selbst oder mit den Versicherungspunkten zu tun hat.

36. Der Heliotrop. Auf sehr große Entfernungen werden häufig auch Pyramiden, namentlich wenn sie an irgend einem nicht ganz genau bekannten Orte stehen, z. B. irgendwo auf einem Bergrücken zu suchen sind, nicht mehr gefunden oder doch nicht genügend genau pointiert werden können. In diesem Falle verwendet man den von Gauß erfundenen Heliotrop. Wenn auf zwei senkrecht gegeneinander gestellten Spiegeln (Fig. 81) Licht von derselben Lichtquelle (Sonne) auffällt, so wird dasselbe in zwei in gerader Linie liegenden, also einander entgegengesetzten Richtungen reflektiert. Sind aa_1, bb_1 die beiden Spiegel, so findet die Reflexion der von der Sonne Σ nach O kommenden Strahlen an dem Spiegel bb_1 nach x so statt, daß $xOa = aO\Sigma$ und an dem Spiegel bb_1 so, daß $yOb = bO\Sigma$ ist; es wird daher $yO\Sigma + \Sigma Ox = 2bO\Sigma + 2\Sigma Oa = 2 \times (bO\Sigma + \Sigma Oa) = 2 \times 90° = 180°$ sein; demnach sind yO und xO in gerader Linie.

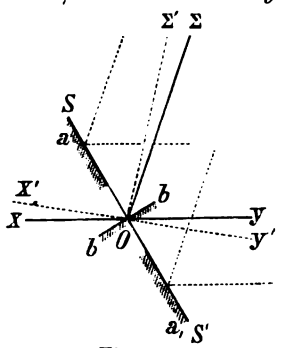


Fig. 81.

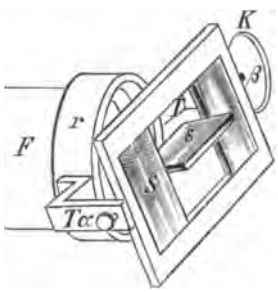


Fig. 82.

Die Ausführung zeigt Fig. 82; zwei seitliche Spiegel S und ein darauf senkrechter zwischen den beiden befindlicher s werden von zwei Säulchen T an einem Ringe r getragen, der auf das Objektiv des Fernrohres aufgesetzt wird. Dreht man die Spiegel so, daß das von dem kleinen Spiegel reflektierte Sonnenlicht in der Richtung der Fernrohrachse einfällt, so wird das von dem großen Spiegelpaare S reflektierte Licht in derselben Richtung von dem Fernrohre weg, also gegen denjenigen Punkt gerichtet, welcher mit dem Fernrohre anvisiert wird. Stellt man sich mit diesem Hilfsfernrohre auf dem Punkte P_1 auf, welcher von dem entfernten Punkte P gesehen werden soll, so wird man zuerst das Fernrohr F auf P richten, dann das Spiegelsystem Ss mittels des Ringes um die Fernrohrachse und zwischen den Spitzen $\alpha\beta$ so lange drehen, bis das Sonnenlicht ins Fernrohr fällt. Dieses wird durch die seitlich angebrachte auf der Achse $\alpha\beta$ senkrecht stehende Scheibe K erleichtert; man dreht zuerst das Spiegelsystem um die Fernrohrachse, bis der auf eine darunter gehaltene Papierfläche fallende Schatten der Scheibe K eine Linie wird; die Sonne steht dann in einer zu $\alpha_1\beta$ senkrechten Ebene; dreht man dann das Spiegelsystem um die Achse $\alpha_1\beta$, so wird man das Sonnenlicht ins Fernrohr bekommen und es bedarf nur einer geringfügigen weiteren Regelung, um den Mittelpunkt des Sonnenbildchens am Fadenkreuze des Fernrohres zu erhalten.

Würde man das Licht einer punktförmigen Lichtquelle verwenden, so wäre damit allerdings nicht viel gewonnen, da man vom Standpunkte P_1

des Heliotropen aus ebenso schwer den Beobachtungspunkt P als von diesem aus P_1 finden könnte; da aber die Sonne eine Scheibe ist, welche unter einem Winkel von etwa $\frac{1}{2}°$ gesehen wird, so gelangen auf beide Spiegel Strahlen innerhalb eines Winkels $\Sigma O \Sigma'$, welche innerhalb eines Winkels xOx' und yOy' reflektiert werden. Alle drei Winkel sind gleich, etwa $\frac{1}{2}°$ und in einer Entfernung von 10 *km* würde auf einem Schirm ein Bild entstehen vom Durchmesser (10.000 arc $\frac{1}{2}°$) = 87 *m* Durchmesser; von allen Punkten innerhalb dieses Raumes würde das von P_1 kommende Sonnenlicht gesehen. In 50 *km* Entfernung wird das Licht auf einer fünfmal größeren Strecke, also schon von Punkten gesehen, die etwa 440 *m* auseinander liegen. Wenn man daher im Aufstellungspunkte P_1 des Heliotropen nur ganz genähert den Ort des Beobachtungsortes P kennt und das Licht dahin dirigiert, so wird der Beobachter in P das Heliotropenlicht sehen; es erscheint wie ein heller Stern und ist leicht und sicher zu pointieren.

Dieser Heliotrop unterliegt aber ziemlich vielen Fehlerquellen. Es müssen die beiden Teile des großen Spiegels parallel sein, ihre Ebene parallel zur Drehungsachse $\alpha\beta$; diese muß senkrecht stehen zur Fernrohrachse und die Ebene des kleinen Spiegels muß senkrecht stehen zur Ebene des großen Spiegels. Man hat daher statt dessen später einfachere Konstruktionen gewählt, welche leichter herzustellen und auch leichter zu rektifizieren sind, weshalb der Gaußsche Heliotrop nicht mehr verwendet wird und daher auch auf die Berichtigung desselben nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

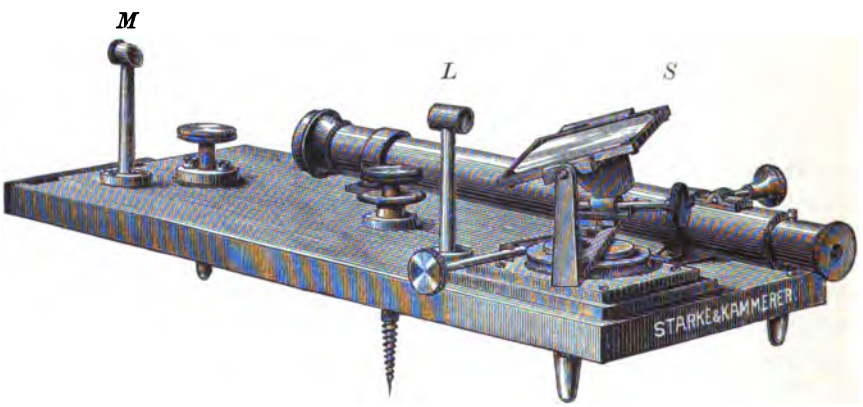


Fig. 83.

Der Heliotrop von Bertram hat einen Spiegel S (Fig. 83), welcher durch zwei in Zahnkränze eingreifende Schrauben ohne Ende um eine vertikale und horizontale Achse gedreht und dadurch in jede beliebige Lage gebracht werden kann. Das von der Sonne reflektierte Licht gibt einen Lichtfleck, welcher zunächst auf einem Papier aufgefangen wird; mit Hilfe desselben wird der Spiegel so lange gedreht, bis das Sonnenlicht in die Richtung nach M reflektiert wird. Fig. 83 stellt einen Heliotropen in der Ausführung von Starke und Kammerer dar. M selbst enthält rückwärts eine matte Scheibe mit einem eingeritzten Fadenkreuz, auf welchem, wenn das Sonnenlicht

genau in diese Richtung fällt, mittels einer dazwischen gestellten Linse L ein scharfes Bild entsteht, während die übrigen, rings herum auffallenden Strahlen in derselben Richtung weiter gehen. Beim Bertramschen Heliotrop enthält der Spiegel S in der Mitte eine Öffnung, durch welche man über M hinaus nach einem entfernten Punkte visieren kann und die Richtung von der Mitte der Spiegeldurchbohrung zum Fadenkreuze in M muß parallel dem reflektierten Lichte sein. Statt dieser einfachen, eine Art Diopter darstellenden Visiervorrichtung ist bei den Starkeschen Instrumenten ein nebenan angebrachtes Visierfernrohr, dessen optische Achse parallel mit der Richtung SLM sein muß. Visiert man durch das Fernrohr einen entfernten Punkt an, so fällt das Licht von S über M nach diesem Punkte. Der Parallelismus der Kollimationslinie des Fernrohrs und der Richtung SM kann leicht durch Versuche erhalten werden, indem zuerst Licht nach einem bestimmten entfernten Punkte P gesendet wird und dann das Fadenkreuz des Fernrohres so rektifiziert wird, daß es das Bild desselben Punktes P deckt

Der Heliotrop von Steinheil (Fig. 84) hat ebenfalls nur einen Spiegel S, welcher um zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen drehbar ist (nach Art des Spiegels S, Fig. 85), in der Mitte bei γ ist ein Teil der Belegung entfernt, so daß das Licht von L durch γ hindurch in die hohle Achse mf hinein, und zwar durch eine bei m senkrecht zum Strahlengange befindliche Konvexlinse gesammelt, auf eine im Brennpunkte derselben bei f befindliche weiße Fläche f geworfen wird. Von hier reflektiert, gelangen die Lichtstrahlen durch die Linse m wieder auf γ, werden hier an der unbelegten Glasfläche teilweise, allerdings nur schwach in die Richtung γx reflektiert, während die meisten von L kommenden Strahlen vom Spiegel S in die Richtung γy geworfen werden. Sieht man daher durch den Spiegel bei γ

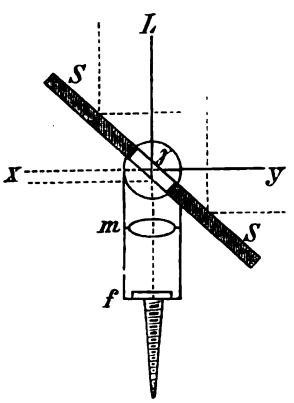


Fig. 84.

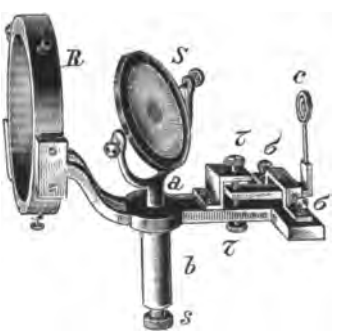


Fig. 85.

durch und dreht ihn so lange, bis man das matte Sonnenlicht in derselben Richtung sieht wie einen entfernten Gegenstand, so werden die von S reflektierten Strahlen nach diesem Punkte hin gelangen. Da in f nur eine matte Scheibe, kein Spiegel, angebracht ist, so wird eigentlich das von dem hellen Flecke in f kommende Licht reflektiert, daher auch in die Richtung x geworfen, so daß eine Berichtigung unnötig wird. In der Ausführung erhält

man ein Bild des Heliotropen, wenn man in Fig. 85 nur den mittleren Teil Ss beibehält und an die Hülse der hohlen Achse b eine Baumschraube anbringt, mit welcher der Heliotrop irgendwie befestigt werden kann.

Reitz hat an Stelle dessen die in Fig. 85 gegebene Einrichtung getroffen. Das vom Spiegel S reflektierte Licht gelangt zum Teile auf einen gegenüber gestellten Spiegel c und wird von diesem in die Achse des Fernrohrs reflektiert, an welcher der Heliotrop mittels des Ringes R befestigt wird. Zu diesem Zwecke hat der Spiegel S in der Mitte eine kleine Durchbohrung. Soll aber das Licht aus der Richtung Sc nach cS in das Fernrohr gelangen, so muß der Spiegel c normal zur Achse des Fernrohrs stehen, was mittels der Schräubchen σ, τ hergestellt werden kann. Erscheint dann das von c reflektierte Sonnenbild am Fadenkreuze des Fernrohrs, so werden die übrigen von S reflektierten Strahlen gegen denjenigen Gegenstand hingeworfen, gegen welchen das Fernrohr gerichtet ist. Dieses wird auch wieder zur Rektifikation des Spiegels c verwendet: Das Fernrohr wird auf einen entfernten Gegenstand gerichtet, der Spiegel S so gedreht, daß das Sonnenlicht dahin gelangt und in dieser Lage die Stellung des Spiegels c so lange korrigiert, bis das Sonnenbild am Fadenkreuze des Fernrohrs ist.

Infolge der Bewegung der Sonne müssen stets die Spiegel nachgedreht werden, so daß das Sonnenbild immer an der richtigen Stelle (am Fadenkreuz des Fernrohrs, in der Richtung des anvisierten Objekts) erhalten bleibt.

Bei der Triangulation zwischen Spanien (Mulhacen—Tetica) und Afrika (Mt. Sabina—Filhaussen) versagte auch das Heliotropenlicht wegen der großen Entfernung über dem Meere und General Ibañez mußte seine Zuflucht zu Nachtbeobachtungen mit elektrischen Lichtsignalen nehmen, die mittels großer Dynamomaschinen erzeugt wurden.

c) Messung von Längen.

37. Meßkette, Meßlatten, Meßrad. Jede Längenmessung beruht darauf, zu untersuchen, wie oft ein gewisses konstantes Maß in der zu messenden Strecke enthalten ist. Als konstantes Maß kann ein gewöhnlicher Maßstab verwendet werden; es können Holzstäbe von bestimmter Länge (1 m oder 4 m), es können Meßbänder oder eine Kette verwendet werden; auch der Umfang eines Rades kann als fixes Maß dienen, wobei man dann nur zu untersuchen hat, wie viel Umdrehungen das Rad macht, um die ganze Länge zu überfahren.* Wesentlich verschieden fällt aber die Genauigkeit aus. Meßlatten aus Holz werfen sich durch die Feuchtigkeit; sie werden daher durch wiederholtes Auskochen in Leinöl mit diesem getränkt, und um

Fig. 86.

* In kleinem Format kann ein Rädchen auch zur Messung von Längen von Linien auf dem Papier dienen (Kurvimeter).

die Enden vor Abnutzung zu schützen, mit Eisenbeschlägen versehen. Gut ist es dabei, wenn diese so angebracht sind, daß bei horizontaler Lage der Latte der eine Beschlag in eine horizontale, der andere in eine vertikale Schneide endet (vgl. Fig. 86) und beim Aneinanderlegen der Latten immer eine horizontale und eine vertikale Schneide aneinanderstoßen.

Meßbänder, wenn dieselben aus Hanf sind, unterliegen einer beträchtlichen Dehnung; es werden daher eine Reihe von Drähten der Länge nach eingezogen; solche Meßbänder von 10 und 20 *m* Länge sind noch im Gebrauche; sie werden der Bequemlichkeit halber auf dünnen Zylindern aufgewickelt, in Kapseln eingeschlossen (Fig. 87).

Zum Feldmessen wurde früher sehr viel die Meßkette, eine aus einzelnen Gliedern von 2—5 *cm* Länge bestehende Kette verwendet, welche auf eigens dazu dienende Kettenstäbe aufgesteckt werden kann. Ist die Kette gestreckt, so soll sie die angegebene Länge, meist 20 *m* haben; um einen etwaigen Fehler zu korrigieren, haben die meisten Ketten in der Mitte einen sogenannten Wirbel (Fig. 88), welcher die beiden seitlichen Kettenglieder *g* dadurch faßt, daß dieselben an Schrauben befestigt sind,

Fig. 87.

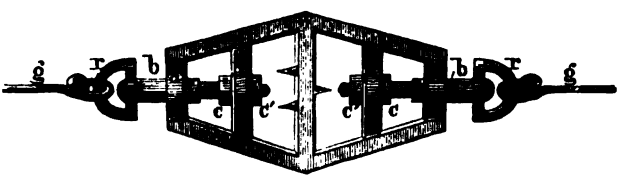


Fig. 88.

welche ihre Muttergewinde in den Querstücken *ii* des Wirbels haben. Von den Gewinden ist das eine gewöhnlich, das andere verkehrt geschnitten, so daß beim Drehen des Wirbels beide Schrauben gleichzeitig angezogen oder gelüftet werden, die Kette daher verlängert oder verkürzt wird. Ist die Kette berichtigt, so werden die Fixierungsmuttern *cc'* angezogen, wodurch unbeabsichtigte Verschiebungen verhindert werden.

Gute Messungen erhält man auch mit den Stahlmeßbändern, welche sich vorzüglich an Stelle der Meßkette eignen, da sie keiner Dehnung unterliegen. Kleinere Fehler durch Spannung oder Biegung sind immerhin nicht ausgeschlossen. Die Längenänderung infolge der Temperaturunterschiede können leicht mit Hilfe der Ausdehnungskoeffizienten in Rechnung gezogen werden.

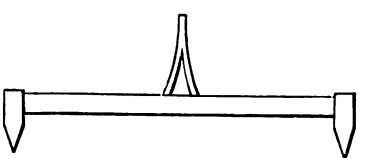


Fig. 89.

Verwendung findet auch noch die Drehlatte oder der Feldzirkel (Fig. 89), eine 1 oder 2 *m* lange Latte, welche an ihren Enden mit eisernen

Spitzen und in ihrer Mitte mit einem Griffe versehen ist, so daß die Latte am Felde in ähnlicher Weise wie der Zirkel am Reißbrette verwendet wird.

Frühzeitig wurde schon die einfache Längenmessung mittels Zählung der Umdrehungen eines Wagenrades vorgenommen.* Neuerlich wurde diese Methode durch Steinheil vorgeschlagen, wobei die Messung allerdings auf Schienen und in gerader Linie erfolgen sollte: das Steinheilsche Meßrad, dessen Untersuchung auch von der permanenten Kommission der mitteleuropäischen Gradmessung vorübergehend ins Auge gefaßt war,** aber nach dem Tode Steinheils fallen gelassen wurde; diese Unterlassung kann gerade nicht besonders bedauert werden, da eine große Genauigkeit von dem Rade gewiß nicht zu erwarten war. Für Messungen, die nicht auf die größte Präzision Anspruch erheben, ist das Wittmannsche Meßrad (Fig. 90) recht brauchbar. Es ist mit einem Zählwerke Z versehen, welches die Tausende, Hunderter, Zehner und Einer der Umdrehungen gibt; Zehntelumdrehungen können am Umfange selbst gelesen werden, doch ist dazu erforderlich, daß das Rad an der Ausgangs- und Endstation dieselbe Lage erhält, was dadurch erzielt werden kann, daß die Handhabe H an beiden Punkten in dieselbe Lage gebracht (vertikal gestellt) wird.

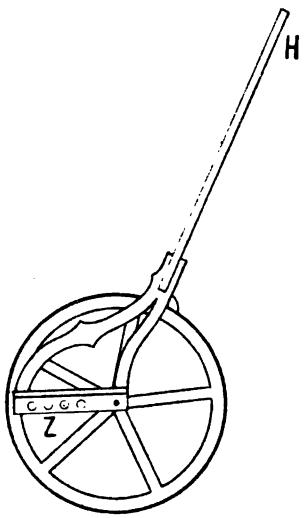


Fig. 90.

38. Basisapparate *a*) **mit Endmaßen.** Für Präzisionsmessungen, wie dieselben bei den Basismessungen der Landestriangulation erforderlich sind, können nur Meßstangen von besonders genauer Ausführung verwendet werden; diese mit den dazu nötigen Hilfsinstrumenten bilden den Basisapparat. Die Unterschiede gegen die gewöhnlichen Meßlatten sind im wesentlichen folgende:

1. Die Meßstangen des Basisapparates sind aus Metall, daher den wenig kontrollierbaren Einflüssen der Feuchtigkeit entzogen. 2. Die Längenänderungen der Stangen infolge der Temperaturänderungen werden durch eigene Quecksilber- oder Metallthermometer jederzeit bestimmt.*** 3. Die Neigung der

* Jean Fernel bestimmte 1525 einen 1° fassenden Bogen zwischen Paris und Amiens auf diese Weise. Richard Norwood maß noch 1633—1635 die Länge eines 2° 28′ fassenden Bogens zwischen London und York mit der Meßkette. Neuerlich wurden auch Stahlbänder und Metalldrähte zu Basismessungen wieder vorgeschlagen; vgl. Jäderin, „Geodätische Längenmessungen mit Stahlbändern und Metalldrähten", Verhandlungen der königl. schwedischen Akademie der Wissenschaften, 1885, Bd. IX, und das Referat von S. Truck in Bd. XVIII des k. u. k. militär-geographischen Institutes Wien.

** Bericht über die dritte allgemeine Konferenz der mitteleuropäischen Gradmessung in Wien, 1871, S. 95 und 197.

*** Colby konstruierte einen Basisapparat, bei welchem derartige Kompensation angestrebt ist, daß die zwischen den Endstrichen enthaltene Länge bei jeder Temperatur konstant ist; bei den Basismessungen in Indien hat sich dieses als nicht völlig richtig gezeigt, so daß man auf diesen Vorgang wieder verzichtete (s. Clarke, Geodesy, pag. 163). Für die neueren Meßstangen hat Guillaume in Paris eine Legierung von Nickel und

Meßstangen wird auf das sorgfältigste bestimmt.* 4. Die Latten werden nie unmittelbar aneinander gelegt, um etwaige durch Stoß oder Druck mögliche Verschiebungen hintanzuhalten. Die Zwischenräume zwischen den Latten werden durch besondere Vorrichtungen (Schieber, Meßkeil) bestimmt. 5. Die Länge der Meßstange wird mittels Komparatoren aufs genaueste ermittelt.

Der Basisapparat von Reichenbach hat fünf Meßstangen von Eisen, jede 4 *m* lang und 1 *cm* breit und dick. Die Enden der Stangen sind aus hartem Stahl, keilförmig zugeschärft, bei horizontaler Stangenlage die eine Keilkante horizontal, die andere vertikal (wie in Fig. 93). Jede Stange ist, um sie vor der direkten, strahlenden Wärme zu schützen, von einem Holzgehäuse umgeben, so daß nur die Enden herausragen, und in der Mitte festgeklemmt. Hier sind auch die zur Temperaturbestimmung dienenden Quecksilberthermometer angebracht, deren Kugeln der Stange anliegen und deren Röhren der Stangenachse parallel sind. Zum Ablesen ist hier das Holzgehäuse geöffnet und mit einer Glasscheibe verschlossen, über die aber noch ein Holzdeckel gelegt wird, der nur zum Ablesen auf kurze Zeit entfernt wird.

Zwischen den Latten wird absichtlich ein kleiner Zwischenraum gelassen, dessen Größe durch einen Meßkeil, meist aus Glas, ermittelt wird. Dieser nimmt von der Handhabe (Fig. 91) gegen das Ende zu an Dicke ab; da die beiden schief zusammenlaufenden Flächen vollkommen eben abgeschliffen sind, so ist die Dicke an verschiedenen Stellen proportional den Abständen. Ist die Länge $mn = 10\ cm$, die Breite des Keils in mm' gleich $1{\cdot}5\ cm$, in nn' aber $0{\cdot}5\ cm$, so entfällt auf $10\ cm$ der Länge eine Breitenänderung von $1{\cdot}0\ cm$ daher auf jeden cm $1\ mm$ Breitenänderung. Man kann daher in der Längsrichtung des Keils sofort die Dicken desselben anschreiben. Da die Seite des Keils in mm geteilt werden kann, so erhält man in dieser Weise unmittelbar $0{\cdot}1\ mm$.

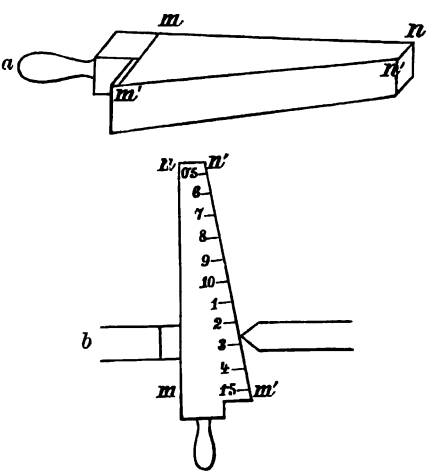


Fig. 91.

Der Keil muß ohne Druck und Stoß eingeschoben werden, mit der Horizontalkante der vorhergehenden Stange (Fig. 91*b*) zur Berührung gebracht werden; die Dicke ist dann dort zu lesen, wo die Vertikalkante der folgenden Stange den Keil berührt. In Fig. 91*b* würde man $1{\cdot}26\ mm$ lesen. Die

---

Stahl hergestellt, deren Ausdehnungskoeffizient der zehnte Teil desjenigen des gewöhnlichen Stahls ist (vgl. K. v. Orff, „Über die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung"; Festrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München am 15. November 1899).

* Bei der Lattenmessung wird dieselbe bei geneigtem Terrain selbstverständlich auch berücksichtigt (s. die Staffelmessung Nr. 87).

Keilbreiten mm', nn' und die Länge des Keils mn können mikrometrisch sehr genau bestimmt und danach die Bezifferung angelegt werden.

Die Neigung der Meßstange wird durch ein aufgesetztes Niveau bestimmt.

Die Länge der Latten wird an eigenen Komparatoren ermittelt. Diese bestehen aus zwei fest gemauerten Pfeiler in entsprechender Entfernung, so daß der Abstand der Mittelpunkte ihrer oberen horizontalen Flächen nahe gleich der Länge der Latten ist. In die oberen Flächen sind Metallbolzen eingemauert, welche Schneiden tragen, und zwar der eine Pfeiler eine horizontale, der andere eine vertikale, zwischen welchen auf passenden Trägern die Latten gebracht werden. Die Entfernungen der Lattenschneiden von den Schneiden der Komparatoren werden durch den Glaskeil gemessen. Die konstante Entfernung der Komparatorschneiden wird auf dieselbe Art durch Vergleichung derselben mit einem Urmaße bestimmt. Alle erhaltenen Längen werden auf dieses Urmaß als Ausgangswert bezogen. Als Urmaß gilt das „mètres des archives", welches im Bureau des poids et mesures in Breteuil bei Paris aufbewahrt wird.

Der österreichische Basisapparat* hat vier Eisenstangen, jede etwas über zwei Klafter (4 *m*) Länge, ein Zoll (3·25 *cm*) Höhe und drei Linien

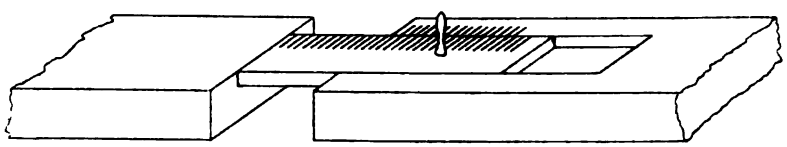


Fig. 92.

(8 *mm*) Dicke. Die Enden enthalten den schon früher von Borda eingeführten Messingschieber (Fig. 92), welcher in den Zwischenraum zwischen ihr und der nächstfolgenden Stange geschoben wird; die direkte Teilung geht bis 0·0002 Toisen (0·43 *mm*); der Nonius gestattet Zehntel, also 0·04 *mm* abzulesen. Eine der vier Stangen hat zwei Schieber; diese wird am Basisendpunkt angelegt, welcher durch einen eigenen „Absenklungszylinder" von bekannter Dicke hinaufgelotet wird; für die erste Stange muß daher der Abstand vom Absenklungszylinder einerseits und von der zweiten Stange anderseits gemessen werden; dann hat man bei der ersten Stange zur Stangenlänge die Länge beider Schieber und die halbe Dicke des Absenklungszylinders zu addieren. Die Stangen werden auf eigenen Dreifüßen aufgelegt, welche auf quadratischen Polsterhölzern aufgestellt werden, die durch drei eiserne, in das Erdreich eingedrückte Spitzen sicher aufruhen. Die Neigung der Stangen wird durch Libellen bestimmt, die Temperatur durch Quecksilberthermometer.

Bessel hatte bei seinem Apparate statt der Quecksilberthermometer Metallthermometer eingeführt, indem die ganze Meßstange aus zwei Metallen,

* Die älteren österreichischen Basisapparate, die bei dem Basismessungen 1806 und 1808 verwendet wurden, sind beschrieben in: H. Hartl, „Materialien zur Geschichte der astronomisch-trigonometrischen Vermessung der österreichisch-ungarischen Monarchie", Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, Bd. VII, 1887, Tafel VII und VIII. Ebenda auch eine Beschreibung des Delambreschen Basisapparates, welchem der neue österreichische, 1810 gebaute nachgebildet ist.

Zink und Eisen, besteht. Die Eisenstange ist etwas breiter als die auf ihr liegende Zinkstange und auch etwas länger. An der einen Seite sind beide miteinander verlötet, sonst gleitet die Zinkstange frei auf der Eisenstange hin. Die beiden Enden der Zinkstange s,σ (Fig. 93) haben horizontale Schneiden; auf dem freien Ende der Eisenstange ist ein Stahlstück mit zwei Vertikalschneiden s', s'' befestigt. Aus der mit dem Glaskeil gemessenen Ent-

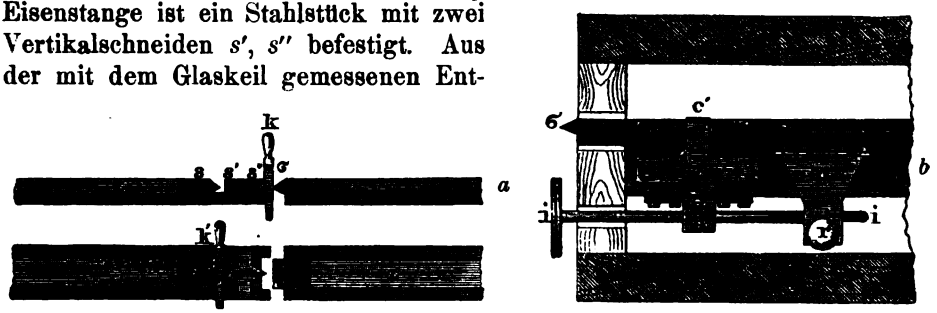


Fig. 93.

fernung der Zinkschneide s von der Stahlschneide s' wird der Unterschied der Längen der beiden Stangen und damit die Temperatur der Stange ermittelt; die Entfernung der Stahlschneide s'' von der folgenden Zinkschneide σ gibt den Abstand der beiden Stangen. Die Stangen liegen in eigenen Holzkästen und sind in diesen auf sieben gleich weit voneinander entfernten Rollen (s. Fig. 93*b*) gelagert und so gegen Durchbiegung geschützt. Das zur Bestimmung der Neigung dienende Niveau ist auf einer Seite mittels eines Fußes F_1 (Fig. 94) mit der Meßstange M verbunden, aber mit der Fassung

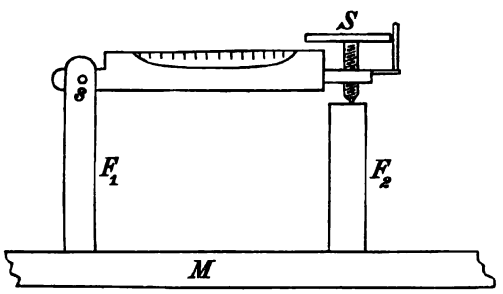


Fig. 94.

um ein Scharnier s drehbar, auf der andern Seite jedoch durch eine feine Meßschraube S verstellbar, welche sich auf einen zweiten auf der Meßstange sitzenden Fuß F_2 stützt. Es wird nicht das Niveau gelesen, sondern stets durch Drehung der Schraube zum Einspielen gebracht und die Neigung durch die Angabe der Meßschraube bestimmt.*

* Diese Einrichtung wird übrigens schon von Joh. Tob. Mayer in seinem „Gründlichen und ausführlichen Unterricht zur praktischen Geometrie", 2. Aufl., Göttingen 1792, Bd. II, S. 101, erwähnt.

39. Basisapparate *b*) **mit Strichmaßen.** Hassler benutzte bei der Küstenvermessung in Nordamerika 1791 und 1797 einen von diesem wesentlich verschiedenen Apparat.* Eine Meßstange von 8 Meter Länge (aus vier miteinander verschraubbaren Stücken bestehend) hat an den beiden Enden kleine halbkugelförmige Vertiefungen, über welche Spinnwebenfäden senkrecht zur Längsrichtung der Stange gespannt sind. Als Länge der Stange gilt die Entfernung dieser beiden parallelen Spinnfäden. Um mit dieser Stange zu messen, werden auf die Spinnfäden zwei auf entsprechenden Stativen in der Entfernung von 8 *m* aufgestellte Mikroskope eingestellt, so daß zwischen ihnen die Länge der Stange enthalten ist. Die Stange kann dabei, ohne die Mikroskope oder ihre Stative zu berühren, weiter bewegt werden (Fig. 95). Wird sie weiter geschoben, bis das früher unter dem ersten Mikroskop befindliche Ende jetzt unter das zweite Mikroskop kommt,

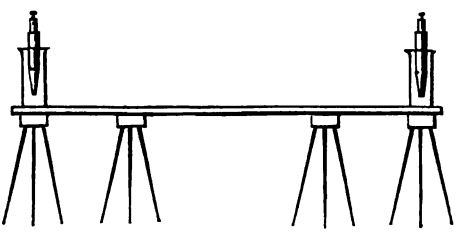


Fig. 95.

so ist dieselbe um ihre ganze Länge verschoben worden; das frei gewordene Mikroskop I kann nun wieder über das vordere Ende gebracht und auf den Spinnfaden genau eingestellt werden, zu welchem Zwecke das Mikroskop eine Mikrometerbewegung parallel zur Stangenrichtung hat. Um bei eventuell eintretenden Fehlern nicht die ganze Arbeit von vorn beginnen zu müssen, sind übrigens drei Mikroskope; das Mikroskop I bleibt stehen, bis die Einstellung unter III beendigt ist.

Die Einstellung des Mikroskops auf den Faden wurde noch mit einem auf einer Elfenbeinplatte des Stativs eingeritzten Kreuze verglichen; doch mußte zu diesem Zwecke das Objektiv des Mikroskops auf zwei in verschiedenen Entfernungen gelegenen Punkten eingestellt werden, weshalb die Objektivlinse aus zwei Hälften mit verschiedenen Brennweiten bestand, von denen die eine auf den Faden der Stange, die andere auf das Fadenkreuz der Elfenbeinplatte eingestellt war.

In größerer Vollkommenheit ist dieses Prinzip bei dem spanischen Basisapparate des Generals Ibañez ausgeführt. Bei seinem ersten Apparate war die Meßstange aus zwei Metallen.** Später ersetzte er dieses Metallthermometer durch Quecksilberthermometer, da nach seinen Erfahrungen die Temperaturen sich mit Quecksilberthermometern leichter und besser bestimmen lassen. Die Meßstange ist 4 *m* lang, besteht aus homogenem

* Beschrieben in „Papers on various subjects connected with the survey of the coast of the United States, by F. R. Hassler, Philadelphia 1824."

** Vgl. C. Koppe, „Der Basisapparat des Generals Ibañez und die Aarberger Basismessung, Nordhausen 1881".

Schmiedeeisen und ist etwa 50 *kg* schwer. Von halbem zu halbem Meter sind Platinblättchen eingelassen, in denen Teilstriche eingeritzt sind, welche die Stange in halbe Meter teilen. Auf der einen Seite sind vier Thermometer in nahe gleichen Distanzen, deren Kugeln in Eisenfeilspäne eingebettet sind und mit dem Eisen der Stange in inniger Berührung stehen. Dieselben sind geschützt durch Glasdeckel, die durch Metallstreifen festgehalten werden. Die Neigung wird durch ein Niveau genau wie beim Besselschen Basisapparat (Horizontalstellung und Lesung an der Schraube) bestimmt. An zwei Handhaben, auf jeder Seite in $\frac{1}{4}$-Stangenlänge Entfernung von den Enden, wird die Meßstange weiter transportiert.

Die Mikroskope sind nicht zentrisch über dem Stativ, sondern seitlich; zentrisch über dem Stativ ist ein Fernrohr F (Fig. 96), das nach abwärts auf den Basisendpunkt eingestellt und dann um die Achse hh' in die horizontale Richtung und um eine vertikale Achse (wie bei den Theodoliten) in die Richtung der Basis einvisiert werden kann. Senkrecht zu dieser, also in der Richtung der Achse hh' ist das Beobachtungsmikroskop M, unter welches die Meßlatte gebracht wird.* Zur Berichtigung der Stellung der Achse dient ein exzentrisches Niveau L (die auf die Achse aufzusetzenden Füße haben horizontale Träger senkrecht zur Achsenrichtung; auf der einen Seite ist das Niveau parallel zur Achse hh' aufgesetzt, auf der andern Seite zwei Gegengewichte, welche das Niveau äquilibrieren).

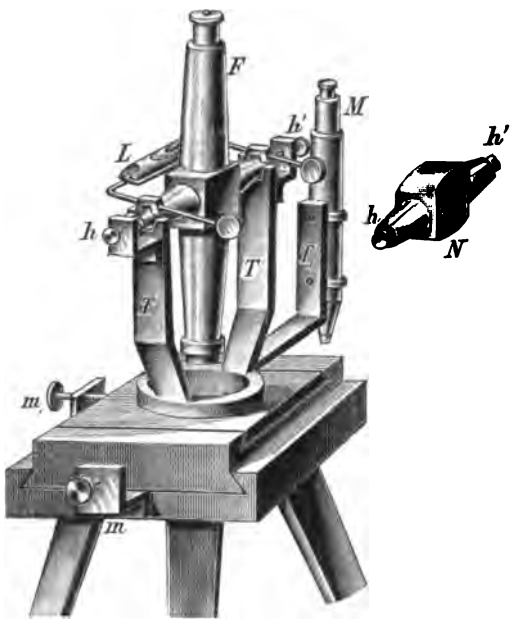


Fig. 96.

Ein zweites Stativ mit einem gleichen Mikroskop wird nun, nahe in der richtigen Entfernung, in die Basis einvisiert; zu diesem Zwecke wird aus demselben das Fernrohr F entfernt und eine Mire N auf einer gleichen Achse eingelegt.

Das Mikroskop kann mit dem Oberteile durch eine Schraube m in die Richtung der Basis eingerichtet werden (durch eine Verschiebung senkrecht zur Basis); durch eine zweite Schraube m_1 kann es in der Richtung der Basis verstellt werden. Wurde zuerst die Meßstange solange in dieser Richtung verschoben, bis ihr erstes Ende unter dem Mikroskope M_1 liegt, so wird dann das zweite Mikroskop M_2 mittels der Schraube m_1 solange verschoben, bis es über dem zweiten Stangenende steht.

* Man mißt daher eigentlich nicht die Basis selbst, sondern eine in der Entfernung MF parallel zur Basis gelegene, gleich lange Linie.

Die Stange ruht auf anderen Böcken, welche, wie in Fig. 95 nicht gerade gegenüber den Stativen der Mikroskope stehen, sondern in etwa $\frac{1}{4}$ der Stangenlänge gegen die Mitte der Stange zu aufgestellt werden, so daß sich die beiden Dreifüße gegenseitig nicht stören.

Zur Anwendung kommen 4 Mikroskope, 4 Dreifüße für die Meßstange, 6 Holzstative für die Mikroskope und eine hölzerne Meßschablone, um die Stative in die nahe richtige Entfernung zu setzen.

Der englische Basisapparat ist diesem ähnlich, hat aber noch Metallthermometer. Jede Meßstange besteht aus zwei Stangen von Eisen und Messing (Fig. 97), in einem Holzkasten nebeneinander auf Friktionsrollen

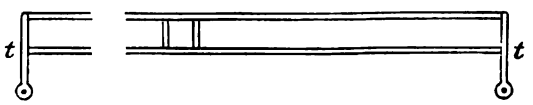


Fig. 97.

liegend. Beide Stangen sind in der Mitte durch zwei kleine Stahlzylinder verbunden. Die Länge wird durch zwei Silberspitzen gegeben, welche in die an den beiden Enden befindlichen Zungen *t, t* eingelassen sind. Die Ablesung geschieht ebenfalls durch Mikroskope, welche auf isoliert aufgestellten Ständern montiert sind. Der Gesamtapparat besteht aus sechs Zehnfußlatten und sieben Mikroskoppaaren, die immer gleichzeitig gelegt und abgelesen werden.

40. Distanzmesser. Um Distanzen genähert, aber doch mit einem hinreichenden Grade von Genauigkeit zu messen, ohne den Standpunkt zu verlassen, hatte man schon frühzeitig Distanzmesser zu konstruieren versucht. Im wesentlichen kommt es dabei darauf an, aus einer bekannten Entfernung ab und dem gemessenen Winkel α (Fig. 41) die Distanz ac zu bestimmen, was immer möglich ist, wenn das Dreieck abc gleichschenklig oder rechtwinklig ist oder die Neigung von ab gegen bc bekannt ist, z. B. ab vertikal und die Neigung von bc gegen den Horizont gemessen wurde. Ist die Entfernung sehr groß und sind die Winkel bei a und b sehr nahe rechte Winkel, d. h. ab senkrecht gegen die Richtung der Entfernung, so wird man

$$ab = ac \operatorname{arc} \alpha$$

setzen können. ab ist hier die Basis für die Distanzmessung. Man kann hierzu in zwei wenig voneinander entfernten Punkten b beobachten: Distanzmessung ohne Latte, oder aber man beobachtet in c eine in ab aufgestellte bestimmte Länge, eine Meßlatte: Distanzmessung mit Latte; im letzteren Falle kann man eine Latte mit bestimmten Endpunkten wählen: Distanzmesser mit konstanter Lattenhöhe,* oder an einer geteilten Latte werden Lattenabschnitte beobachtet: Distanzmesser mit veränderlicher Lattenhöhe.

---

* Die Latte wird vertikal gehalten, daher die Bezeichnung „Lattenhöhe".

a) Distanzmesser ohne Latte. Sieht man von Peurbachs geometrischem Quadrat ab, das auch als Distanzmesser verwendet werden konnte, wohl aber nie verwendet wurde, so ist das „Pantometrum" des Grafen Pacecco ab Ucedos* das älteste. J. T. Mayer** beschreibt dasselbe folgendermaßen. Von zwei auf einer rechteckigen Platte aufgesetzten Fernrohren ist das eine F_1 (Fig. 98) fest, das andere F um C drehbar;

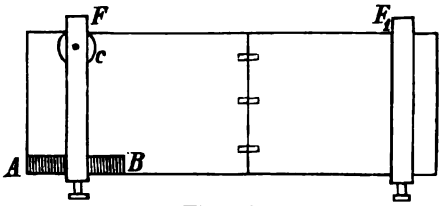


Fig. 98.

die Größe des Drehungswinkels wird an der Skala AB abgelesen; für die parallele Stellung, welche durch Einstellung auf ein sehr entferntes Objekt hergestellt wurde, ist die Lesung an der Skala 0. Aus der Größe der Drehung und der Distanz FF_1, welche sehr genau bekannt sein sollte, kann die Distanz bestimmt werden.

Eine andere Methode, des Camillus Reverta, teilt Daniel Schwendter*** mit. Wird ein um eine vertikale Achse drehbares Rechteck $KLK'L'$ (Fig. 99), dessen beide Seiten KL, $K'L'$ horizontal sind, so weit gedreht,

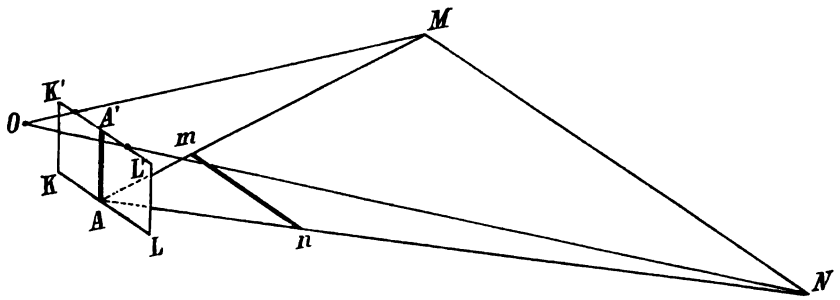


Fig. 99.

daß man über $K'L'$ visierend zwei verschieden entfernte, im Horizonte liegende Punkte MN gerade über $K'L'$ liegend sieht, so muß die Linie MN parallel zu KL sein. (KL und $K'L'$ sind nämlich die Schnitte der Ebene $KLK'L'$ mit den beiden Ebenen $K'N$ und KN, daher müssen beide Linien die

* Beschrieben in der Schrift „Pantometrum Paceccianum, seu instrumentum novum pro elicienda ex una statione distantia loci inaccessa. T. Mayer, Mannheim 1767".

** „Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, 2. Aufl., Göttingen 1792", II. Bd., S. 310.

*** Geometricae practicae novae et auctae tractatus 4: „Camilli Revertae Mediolanensis Erfindung auß einem Standt das Land zumessen."

Gerade MN in demselben Punkte treffen; da aber KL und $K'L'$ parallel sind, so wird dieser Schnittpunkt unendlich weit entfernt, also MN ebenfalls mit beiden Linien parallel sein). Zieht man dann durch das Bild m des Punktes M auf der Zeichnung eine Parallele zu KL, welche die Visur AN in n schneidet, so ist n das Bild von N auf der Zeichnung und man kann, wenn die Distanz AM bekannt ist, AN finden; es ist nämlich

$$AN = \frac{An}{Am} AM$$

Später wurden mehrfach verschiedene Konstruktionen in Vorschlag gebracht,* ohne daß sich dieselben in der Praxis Eingang verschaffen konnten. Auch die neueren „Stereo-Telemeter" gehören hierher. Alle diese Instrumente leiden an dem Übelstande, daß man die bei großen Distanzen infolge der kleinen Basis FF_1 (Fig. 98) sehr kleinen Winkeländerungen nicht mit der erforderlichen Schärfe und Genauigkeit messen kann.

Eine bedeutendere Genauigkeit gestattet der Distanzmesser von Roskiewicz,** bei welchem die Fernrohre F und F_1 (Fig. 98) in unveränderlicher Lage fixiert sind, so daß für einen unendlich entfernten Gegenstand die Bilder an den beiden Fadenkreuzen erscheinen. Für näher liegende Gegenstände wird dann das eine Fernrohr F (das Visierfernrohr) so gestellt, daß das Bild am Fadenkreuze erscheint; das andere Fernrohr hat nebst dem Fadenkreuze ein Mikrometer; das Bild des Gegenstandes wird nicht am Fadenkreuze, sondern seitlich erscheinen; das Fernrohr wird aber nicht nachgedreht, sondern die Entfernung des Bildes vom Fadenkreuz mit der Mikrometerschraube gemessen und hieraus die Entfernung des Gegenstandes bestimmt. Ist die Entfernung des Gegenstandes E, die Entfernung der parallel gestellten Fernrohre F und F_1 gleich d, die Brennweite des Mikrometerfernrohrs F_1 gleich f und die Entfernung der Bilder vom Fadenkreuze δ, so ist aus den ähnlichen Dreiecken, deren Katheten E und d einerseits und f und δ anderseits sind:

$$E : d = f : \delta$$

daher $E = \frac{d.f}{\delta}$; drückt man f und δ in mm, d in Metern aus, so wird auch E in Metern erhalten. Sei z. B. für ein Instrument $d = 100\,cm$; $f = 20\,cm = 200\,mm$, so würde $E = \left(\frac{200}{\delta}\right)$ Meter, wenn δ in Millimeter ausgedrückt wird. Für $\delta = 0{\cdot}5\,mm$ würde $E = 400\,m$ folgen. Die Genauigkeit leidet wesentlich dadurch, daß die geringste einseitige Erwärmung den Parallelismus stört.

Ein anderer Distanzmesser dieser Art ist das „Universalmeßinstrument ohne Figuranten" von Hornstein,*** bei welchem nur ein Fernrohr auf einer vertikalen Säule um etwa $70\,cm$ verschoben und die Verschiebung auf

---

* S. hierüber: Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, I. Bd., 7. Aufl., S. 413 ff.

** „Handbuch der niederen Geodäsie von Friedrich Hartner, bearbeitet von Josef Wastler, 7. Aufl., S. 139.

*** Der Mechaniker, Zeitschrift zur Förderung der Präzisionsmechanik und Optik, Bd. VI, Berlin 1898, S. 401.

Zehntelmillimeter genau gelesen werden kann. Es wird von zwei verschiedenen, um den vertikalen Abstand a (Fig. 100) entfernten Punkten der Vertikalsäule derselbe Punkt A anvisiert, wozu aber das Fernrohr gedreht werden muß. Zu diesem Zwecke ist das Fernrohr mit einem Arm FC fest verbunden, der durch eine senkrecht zur Säule wirkenden Schraube Cc bewegt wird. Ist m das Stück Cc der Schraube, so erhält man, wenn l der feste Abstand Fc der Schraube von der horizontalen Drehungsachse des Fernrohrs ist,

$$d:h = l:m$$

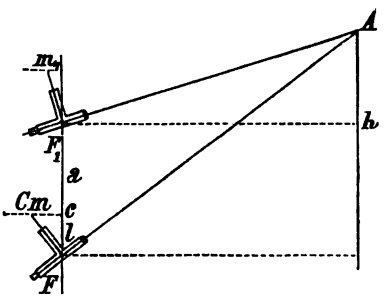


Fig. 100.

wo d die Horizontaldistanz und h der Höhenunterschied von F und A ist. Für eine andere um a erhöhte Stellung des Fernrohrs wird

$$d:h - a = l:m_1$$

und daraus

$$h:h - a = m:m_1$$

$$h = \frac{m}{m - m_1}a; \quad d = \frac{l}{m - m_1}a.$$

Da l eine Konstante des Instrumentes ist, so kann man $m - m_1 = \frac{1}{100}l$ wählen, so daß $\frac{l}{m - m_1} = 100$ wird, und dann wird

$$d = 100\,a.$$

Der Vorgang ist dann der, daß das Fernrohr auf den Nullpunkt der Teilung von a gebracht und hier auf den Punkt A gerichtet wird; die Schraube wird gelesen und um das konstante Stück $\frac{1}{100}l$ bewegt (wäre z. B. $l = 10\,cm$, und $1^R = 0{\cdot}2\,mm$, so wird um 5^R gedreht). Wird jetzt das Fernrohr verschoben (zum Schluß durch eine Feinbewegungsschraube), bis A wieder am Faden erscheint, so gibt die hundertfache Lesung von a sofort die Horizontaldistanz d.

41. Distanzmesser mit Latte. Von einer entfernten Latte entsteht in einem Fernrohre ein Bild (Fig. 15), dessen Größe von der Brennweite des Fernrohrs und der Entfernung und Größe des Gegenstandes abhängt, für ein bestimmtes Fernrohr daher nur von den letzteren beiden Faktoren. Hat man eine geteilte Latte,* so werden von ihrem Bilde eine gewisse Anzahl Teilstriche zwischen zwei fest aufgezogene Fäden fallen, und zwar

* Die Distanzmessung mit geteilter Latte findet sich in Green "description and use of an improved reflecting and refracting telescope and scales for surveying, London 1778" (s. Laussedat Recherches, I. Teil, pag. 160). In "surveying and levelling instruments, theoretically and practically described by William Ford-Stanley, optician manufacturer, London 1895" wird behauptet, daß sich diese Methode in England damals fortwährend erhielt.

um so mehr, in je größerer Entfernung die Latte aufgestellt ist. Aus der Zahl der zwischen den beiden festen Fäden enthaltenen Teilstriche kann die Distanz berechnet werden. Würde das Bild immer in derselben Entfernung vom Objektiv entstehen, so wäre die Distanz proportional dem Lattenabschnitt; denn mit den Bezeichungen S. 31 ist ja

$$\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$$

daher wäre $G = \frac{B}{b} . g$, folglich für eine konstante Bildweite B und Bildgröße b (feste Fäden) $G = K . g$, also die Entfernung proportional der Größe des Gegenstandes, d. i. dem Lattenabschnitte g.

Aber das Bild entsteht nicht immer in derselben Entfernung: B ist keine Konstante und müßte ebenfalls gemessen werden. Um dies zu umgehen, muß B mittels der Gleichung

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{B} = \frac{1}{f}$$

eliminiert werden. Man erhält hieraus

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{f} - \frac{1}{G}$$

und substituiert man diesen Wert in die erste Gleichung, so folgt

$$G\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{G}\right) = \frac{g}{b} \text{ oder } \frac{G}{f} = \frac{g}{b} + 1$$

daher

$$G = \frac{g}{b} f + f$$

wobei f eine für das Instrument konstante Größe ist. G ist nun die Entfernung der Latte vom Fernrohrobjektive; diese ist aber um die halbe Fernrohrlänge, d. i. sehr nahe $\frac{1}{2} f$ vom Instrumentenmittelpunkte entfernt (vgl. z. B. die Fig. 35), folglich ist die Entfernung E vom Instrumentenmittelpunkte $E = G + \frac{1}{2} f$ oder

$$E = \frac{g}{b} f + \frac{3}{2} f. \qquad (\alpha)$$

Für Distanzmesser mit fixen Fäden oder veränderlicher Lattenhöhe wird f und b konstant, daher

$$\frac{f}{b} = K, \; \frac{3}{2} f = k$$

und es wird

$$E = K . g + k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sei z. B. für ein Instrument $f = 30\,cm$, $b = 3\,mm$, so wird $K = 100$ und $k = 45\,cm = 0{\cdot}45\,m$, folglich

$$E = 100\,g + 0{\cdot}45.$$

Ist die Latte in *cm* geteilt und beobachtet man $g = 145{\cdot}2\,cm$, d. h. sieht man zwischen den Fäden einen Lattenabschnitt gleich $145{\cdot}2\,cm$, so wird $E = 145{\cdot}65\,m$.

Hat man eine Latte von unveränderlicher Länge, welche zwischen zwei „Zielscheiben" eingeschlossen ist (vgl. Fig. 160), so kann man die Größe des Bildes durch ein Schraubenmikrometer messen; je weiter die Latte, desto kleiner wird ihr Bild und aus der Größe des Bildes kann wieder auf die Entfernung geschlossen werden. In Formel (α) ist jetzt f und g konstant und man erhält, wenn

$$fg = K_1,\ \tfrac{3}{2}f = k$$

gesetzt wird, für diesen Fall

$$E = \frac{K_1}{b} + k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sei z. B. $f = 30\,cm$, $g = 200\,cm$, so wird $K_1 = 6000$, wenn b in derselben Einheit wie f, dagegen E in derselben Einheit wie g ausgedrückt wird; es würde $K_1 = 60$, damit E in Metern erhalten würde, und $K_1 = 600$, wenn b in *mm* ausgedrückt wird; allgemein wird

$$E^m = \frac{K_1}{b^{mm}} + k$$

wobei

$$K_1 = \tfrac{1}{10} \cdot f^{cm} g^{cm},\ k = \tfrac{3}{200} f^{cm}.$$

Für obiges Beispiel wird daher

$$E = \frac{600}{b} + 0{\cdot}45.$$

Beobachtet man mit einer Meßschraube von $0{\cdot}2\,mm$ Ganghöhe $b = 3{\cdot}75^R$, so wäre $b = 0{\cdot}75\,mm$, demnach $E = 800{\cdot}45\,m$.

Die Distanzmessung mit fixer Fadendistanz wurde 1811 von Reichenbach angegeben.* Störend wirkt hier die Konstante k für die Rechnung. Will man dieselbe nicht vernachlässigen, so könnte man das Fernrohrobjektiv, also das ganze Fernrohr, um $\frac{3}{2}f$ zurücksetzen; dann wäre ja der Abstand vom Instrumentenmittelpunkte um f kleiner als vom Objektiv, also gerade Kg beziehungsweise $\frac{K_1}{b}$. Das Instrument würde dadurch sehr unhandsam und überdies müßte das Fernrohr equilibriert werden. Porro gab 1852 eine andere Konstruktion, die denselben Erfolg hat: er brachte im Fernrohr ein Kollektivglas an. Den Punkt für den die Entfernungen proportional dem Lattenabschnitte sind und der um f vor dem Objektive liegt, nannte er anallatischen Punkt, und durch Einführung der Kollektivlinse kann man es bewirken, daß dieser anallatische Punkt in die Mitte des Fernrohrs kommt. Um dies zu zeigen sei L (Fig. 101) die erste Linse, welche von einem

* Vgl. für die Geschichte der Distanzmesser. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, 7. Aufl., Bd. I, S. 418.

Gegenstand g in der Entfernung G ein Bild b in der Entfernung B gibt; für diese Größen hat man, wenn f die Brennweite der Linse L ist

$$\frac{G}{B} = \frac{g}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{B} = \frac{1}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

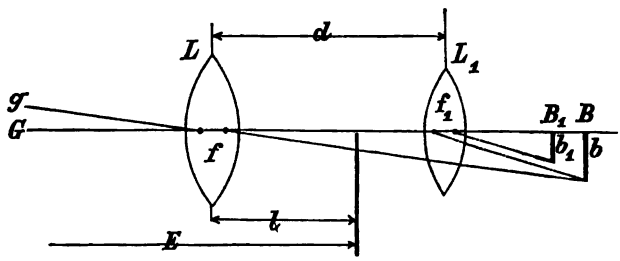


Fig. 101.

Für die Kollektivlinse L_1 mit der Brennweite f_1 ist nun die Gegenstandsweite $G_1 = -(B - d)$, wenn d der Abstand der Linsen ist, so daß, wenn B_1 die Bildweite für das durch diese Linse entstehende Bild b_1 ist:

$$\frac{B - d}{B_1} = \frac{b}{b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$-\frac{1}{B - d} + \frac{1}{B_1} = \frac{1}{f_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Aus der Gleichung (2) folgt

$$B = \frac{fG}{G - f}$$

und dies in die Gleichung (1) substituiert

$$\frac{g}{b} = \frac{G}{f} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

weiters wird aus (4)

$$\frac{B - d}{B_1} = \frac{B - d}{f_1} + 1$$

welcher Wert gleich ist $\frac{b}{b_1}$; durch Substitution des Wertes von B erhält man

$$\frac{b}{b_1} = \frac{\frac{fG}{G - f} - d}{f_1} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und durch Multiplikation der Gleichungen (5) und (6)

$$\frac{g}{b_1} = \left(\frac{G}{f} - 1\right)\left[\frac{\frac{fG}{G - f} - d}{f_1} + 1\right]$$

wofür man auch erhält:

$$\frac{g}{b_1} = \frac{G-f}{f} \cdot \frac{\frac{fG}{G-f} - d + f_1}{f_1} = \frac{1}{ff_1}(fG - dG + df + f_1 G - ff_1)$$

$$= \frac{1}{ff_1}[G(f-d+f_1) + f(d-f_1)]$$

G ist die Entfernung des Gegenstandes vom Objektiv; ist nun das Objektiv vom Instrumentenmittelpunkt noch um l entfernt, so ist die Entfernung des Gegenstandes vom Instrumentenmittelpunkt $E = G + l$ oder $G = E - l$, daher

$$\frac{g}{b_1} = \frac{1}{ff_1}[E(f-d+f_1) - l(f-d+f_1) + f(d-f_1)].$$

Bestimmt man nun d so, daß

$$f(d-f_1) = l(f-d+f_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

wird, so folgt

$$\frac{g}{b_1} = \frac{f-d+f_1}{ff_1} E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

daher die Entfernung E proportional dem Lattenabschnitt g. Ist z. B. $f = 30\,cm$, $f_1 = 10\,cm$, $l = 14\,cm$, so wird aus (7)*

$$d = f_1 + \frac{lf}{l+f} = 19{\cdot}56\,cm$$

---

* Die Gleichung 7) gilt für jedes Kollektivglas, daher auch für die erste Linse des Huygensschen Okulars; aber als anallatisches Fernrohr kann dieses dennoch nicht angesehen werden. Die Lage des anallatischen Punktes ist durch l bestimmt; er liegt um l von der Linse L gegen das Okular zu (vgl. Fig. 101). Da aber

$$l = \frac{f(d-f_1)}{f-d+f_1}$$

ist, so kann l auch sehr groß werden, wenn der Nenner klein wird. Dies ist in der Tat für das Huygenssche Okular der Fall. Ist z. B. $f = 30\,cm$, $f_1 = 5\,cm$, $d = 28\,cm$, so wird $l = 98{\cdot}6\,cm$. Auf diesen Umstand nimmt Bauernfeind l. c. I. Bd., pag. 435, nicht Rücksicht; die Formeln 188, 189 daselbst sind daher unrichtig; denn es genügt durchaus nicht, nur die Reduktion der Bildgröße zu berücksichtigen.

Der Ausdruck $\frac{ff_1}{f-d+f_1} = F$ ist nichts anderes als die Brennweite der Linsenkombination LL_1; es ist nämlich $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{ff_1}$; man kann daher schreiben

$$\frac{g}{b_1} = \frac{E}{F} \quad \text{und} \quad \frac{g}{b_1} = \frac{G}{F} + \left(\frac{d}{f_1} - 1\right)$$

demnach

$$E = F\frac{g}{b_1} \quad \text{und} \quad G = F\frac{g}{b_1} - F\left(\frac{d}{f_1} - 1\right).$$

Für das obige Beispiel wird

$$E = 21{\cdot}43\frac{g}{b_1} \quad \text{und} \quad G = 21{\cdot}43\frac{g}{b_1} - 98{\cdot}6.$$

Hieraus ersieht man, daß während beim Ramsdenschen Okular die additive Konstante klein ist und die Vernachlässigung derselben keineswegs zu großen Fehlern in

Auf die besonderen Methoden der Distanzmessung wird teilweise bei der Erklärung der Tachymeter, des weiteren jedoch im II. Teile (Nr. 94) eingegangen werden.

Besonderer Instrumente zur Distanzmessung nach diesen Prinzipien bedarf es eigentlich nicht. An jedem Universalinstrument, an jedem Nivellierinstrument können diese Einrichtungen getroffen sein und man spricht dann von Universalinstrumenten oder Nivellierinstrumenten mit distanzmessendem Fernrohr; in dieser Verbindung geben sie aber auch bereits die Grundlagen zur Tachymetrie (s. Nr. 59).*

Auf anderen Prinzipien beruht die Distanzmessung mit dem Rochonschen Mikrometer. Es besteht aus zwei dreiseitigen Prismen aus Bergkristall (Fig. 102; die Prismenflächen senkrecht zur Zeichnungsfläche gedacht), von

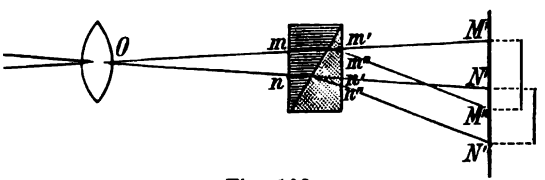


Fig. 102.

denen das erste (in der Figur linke) so aus dem Quarz herausgeschnitten ist, daß die Prismenfläche mn senkrecht zur optischen Achse steht, die zweite so, daß die sämtlichen Prismenflächen parallel zur Achse stehen (Achse senkrecht zur Zeichnungsfläche). Senkrecht oder nahe senkrecht auf die Ebene mn auffallende Strahlen gehen im ersten Prisma ungebrochen durch, im zweiten werden sie durch Doppelbrechung in zwei Strahlen zerlegt, von denen der eine, ordentliche, ungebrochen durchgeht ($mm'M'$); der zweite, außerordentliche, wird an der Grenzfläche der beiden Prismen, dann wieder an m'' von der brechenden Kante bei m' weggebrochen und verläßt das Prisma in der Richtung $m''M''$. Ähnlich wird ein anderer Strahl, der in n auffällt,

---

der Distanzbestimmung führt, bei Huygensschen Okularen die Vernachlässigung oder die übliche Berücksichtigung zu völlig fehlerhaften Resultaten führen muß. Man darf daher für Distanzmesser keine Huygensschen Okulare verwenden.

Der anallatische Punkt kann in das Zentrum des Instrumentes kommen, wenn man für unendlich entfernte Objekte $l = \frac{B_1 + d}{2}$ nimmt; das Okular fällt dann zwar außerhalb, kompensiert aber dann nur das Gewicht des Objektivs. Für $G = \infty$ wird aber

$$B_1 = \frac{f_1 (f - d)}{f + f_1 - d}$$

und da

$$l = \frac{f(d - f_1)}{f + f_1 - d}$$

ist, so wird d der Bedingung genügen müssen $d^2 + fd = 3ff_1$, aus welcher Gleichung $d = \sqrt{3ff_1 + \frac{1}{4}f^2} - \frac{1}{2}f$ folgt, da das negative Zeichen der Quadratwurzel unbrauchbar ist. Für $f = 30\ cm$, $f_1 = 5\ cm$ würde $d = 11\ cm$; B_1 (für unendlich entfernte Punkte) $= 4\ cm$; $l = 7{\cdot}5\ cm$ folgen; für $f = 30\ cm$, $f_1 = 10\ cm$ würde sich $d = 18{\cdot}54\ cm$ und damit B_1 (für unendlich entfernte Punkte) $= 5{\cdot}34\ cm$, $l = 11{\cdot}94\ cm$ ergeben.

* Über die Latten s. bei den Nivellierinstrumenten Nr. 56.

gebrochen. Gelangen nun durch ein Objektiv O Strahlen von einem Gegenstande von bekannter Größe auf den Bergkristall, so entstehen durch diesen zwei Bilder $M'N'$, $M''N''$. Die Entfernung OM' und die Größe der beiden, einander gleichen Bilder hängen von der Entfernung des Gegenstandes und der Brennweite des Objektivs ab, der Abstand $M'M''$ der beiden Bilder aber von dem Orte des Prismas (da der Winkel $\alpha = M'm'M''$ konstant ist); wird dieses näher zu O geschoben, so werden sich die Bilder entfernen; wird es von O entfernt, so werden die Bilder genähert und man kann es dahin bringen, daß sich die beiden Bilder berühren, daß also ihr Abstand gleich der Bildgröße ist. Die Messung der Bildgröße wird daher ersetzt durch die Messung des Abstandes des Prismas von der Ebene, in welcher die Bilder entstehen; ist dieser e, so ist die Bildgröße

$$b = e \text{ tang } \alpha.$$

Hierzu bedarf es daher wieder eines Gegenstandes (Latte) von bestimmter Größe.

d) Ausstecken und Messen von Winkeln.

42. Horizontal- und Vertikalwinkel; Azimut und Höhe. Nach Nr. 1 und 2 handelt es sich bei den Winkelmessungen um Horizontal- und Vertikalwinkel; seien A, B (Fig. 103) zwei Punkte im Raume, so wird ihre gegenseitige Lage bestimmt, indem man durch A und B zwei vertikale Ebenen legt. Denkt man sich um den Beobachtungspunkt O als Mittelpunkt eine Kugel von sehr großem Halbmesser beschrieben, so wird die Horizontebene, d. i. die Ebene, welche die sichtbaren Objekte von den uns unsichtbaren unterhalb gelegenen trennt, dieselbe in einem größten Kreise $A'B'$, der Horizontlinie, schneiden. Unsichtbar sind die unterhalb gelegenen Objekte,

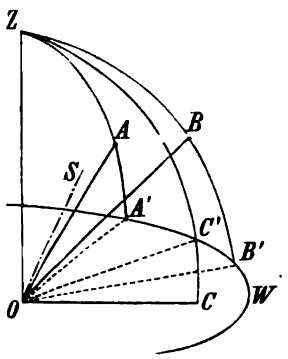


Fig. 103.

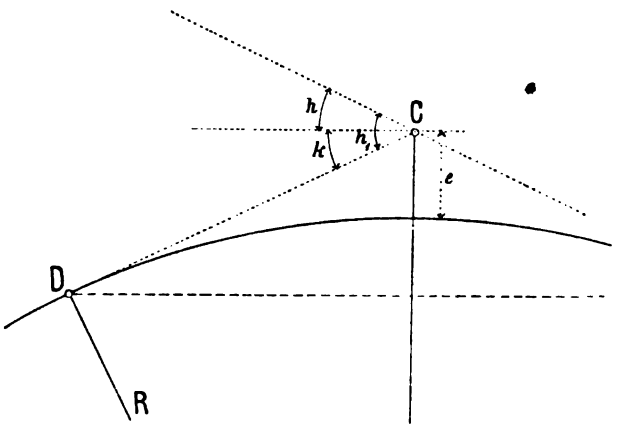


Fig. 104.

da wir nicht durch die Erde sehen können und die Strahlen längs der undurchsichtigen Erdoberfläche, verlängert, in einer Ebene, der Horizontebene, liegen. Dies ändert sich nur etwas, wenn wir uns höher erheben; dann werden nämlich viele früher durch die Erde verdeckten Punkte sichtbar und die von C (Fig. 104) längs der Erde hingleitenden, die berührenden

Strahlen, bilden keine Ebene, sondern einen Kegel. Man nennt diesen den scheinbaren Horizont, die Ebene, welche durch den vertikal unter C auf der Erdoberfläche gelegenen Punkt die Erde berührt, den wahren Horizont.

Die beiden Vertikalebenen durch A, B (Fig. 103) schneiden die Kugel in zwei größten Kreisen ZAA', ZBB', welche durch den lotrecht über dem Beobachter liegenden Punkt Z, dem Zenit, gehen und man nennt den Winkel $AOA' = h$ unter welchen AO über dem Horizont erscheint, die Höhe des Punktes A; ebenso den Winkel $BOB' = h'$ die Höhe des Punktes B. Der Winkel $A'OB'$, welchen die Projektionen OA' beziehungsweise OB' der beiden Richtungen OA, OB untereinander einschließen, ist der Horizontalwinkel zwischen den beiden Punkten.

Statt der Höhe h (dasselbe gilt natürlich von jeder Höhe) kann man auch den Winkel ZOA einführen, welchen die Richtung nach dem Punkte mit der Richtung nach dem Zenite einschließt; diesen Winkel z nennt man die Zenitdistanz des Punktes; und es ist für jeden Punkt

$$z + h = 90°,$$

weil die Richtung nach dem Zenit auf dem Horizont senkrecht steht.

Allerdings kann es vorkommen, daß der anzuvisierende Punkt noch tiefer liegt als der Beobachtungspunkt; dann wird seine Höhe negativ zu nehmen sein; man bezeichnet solche Winkel wohl auch als Tiefenwinkel; dieses ist der Fall beim Punkte C (Fig. 103) der etwa in einer Talweitung zwischen den höher liegenden Punkten A und B liegen möge. Die Zenitdistanz dieses Punktes ist dann größer als 90°; ist seine Höhe h', seine Zenitdistanz z', so ist trotzdem $h' + z' = 90°$, denn es ist h' negativ. Ist beispielsweise $h' = -17°15'$, so wird $z' = 107°15'$, daher mit Rücksicht auf das Zeichen $h' + z' = 90°$. Tiefenwinkel, daher Zenitdistanzen größer als 90° kommen auch vor, wenn der Standpunkt erhöht ist. Legt man durch C (Fig. 104) eine Parallele zum wahren Horizont, so ist für ein Objekt, dessen Höhe über dem wahren Horizont h ist (Zenitdistanz $z = 90° - h$), die Höhe h_1 über dem scheinbaren Horizont größer um einen Winkel k, welcher die Kimmtiefe heißt. Man sieht leicht, daß die Kimmtiefe der Tiefenwinkel des scheinbaren Horizonts ist.

Will man die Lage eines Punktes im Raume absolut bestimmen (nicht gegen einen andern Punkt), so muß man außer seiner Höhe h noch den Horizontalwinkel kennen, welchen OA' mit einer festen Richtung einschließt; als solche wird die Richtung von O gegen Norden oder Süden gewählt. Die Landkarten werden derart angefertigt (beschrieben) und daher auch benützt, daß man, sich auf dieselbe stellend, das Gesicht gegen Norden wendet; dann ist rechts Ost, links West. Bei astronomisch-geodätischen Arbeiten hingegen stellt man sich gewöhnlich mit dem Gesichte gegen Süden gewendet, da die meisten Beobachtungen in dieser Richtung vorgenommen werden. In der durch sie gelegten Ebene erreichen alle Sterne, auch die Sonne, ihre größte Höhe, sie heißt die Meridianebene, die in ihr gelegene Richtung am Horizont (die Nord-Südrichtung) der astronomische Meridian des Ortes, die Punkte, in welchem sie die Horizontlinie trifft, der Südpunkt und der Nordpunkt. Wendet man sich mit dem Gesicht gegen Süden, so

hat man rechts West, links Ost; die Punkte, welche auf dem Umkreise der Horizontlinie um 90° vom Nord- und Südpunkte abstehen, heißen der Ost- und Westpunkt.

Sämtliche Horizontalwinkel werden von der Südrichtung aus gegen rechts herum, d. i. gegen Westen, Norden, Osten von 0° bis 360° gezählt; diesen so gezählten Horizontalwinkel nennt man das Azimut des Punktes. Ist in Fig. 103 OS die Südrichtung, so ist der Winkel $SOA' = A_1$ das Azimut von A, $SOB' = A_2$ das Azimut von B und der Horizontalwinkel zwischen den beiden Objekten w ist gleich der Differenz der Azimute:

$$A'OB' = w = A_2 - A_1.$$

Sei beispielsweise $A_1 = 215°\,35'\,23''$, $A_2 = 284°\,16'\,19''$, so ist der Horizontalwinkel zwischen den beiden Objekten $w = 68°\,40'\,56''$.

43. Gnomon und Kompaß. Das einfachste und älteste Instrument zur Orientierung, d. i. zur Bestimmung der Nord-Süd-Richtung ist der Gnomon, ein vertikaler Stab, dessen Schatten am kürzesten ist, wenn die Sonne am höchsten steht, d. h. wenn sie im Meridian ist, im Azimute 0°. Die Methode ist nicht genau, da die Sonne ziemlich lange nahe dieselbe Höhe beibehält; man beobachtet daher zweckmäßig gleich lange Schatten vor- und nachmittags. Zu diesem Zwecke werden um den Mittelpunkt M (Fig. 105) des Stabes eine Reihe von Kreisen gezogen; dann braucht man nur den Durchgang des Schattens durch die einzelnen Kreise zu notieren; gleich lange Schatten sind dann MS_1, MS_1' in den Punkten, wo das Schattenende den Kreis K_1 trifft; ebenso MS_2 und MS_2'. Zur Erhöhung der Genauigkeit wird in N ein Täfelchen mit einer Öffnung angebracht, welche einen lichten Fleck im Schatten zeigt.

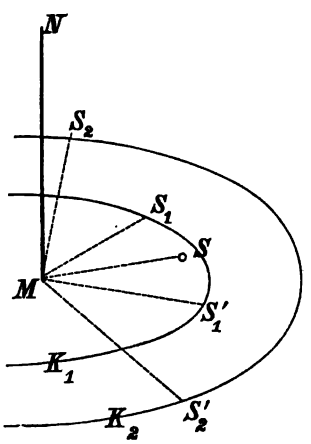


Fig. 105.

Zumeist dort, wo die Sonne nicht sichtbar ist, bei Grubenarbeiten in Schachten und Stollen, aber auch oberirdisch zur raschen Orientierung wird der Kompaß oder die Bussole verwendet, eine Magnetnadel, die mittels eines Achathütchens auf einer Spitze aufgesetzt wird und die sich so stellt, daß das eine Ende, das Nordende, das gewöhnlich blau angelassen ist, gegen Norden zeigt. Allerdings stellt sie sich nicht genau in den astronomischen Meridian, sondern hat eine kleine Abweichung. Man nennt die Vertikalebene, in welcher sich die Magnetnadel stellt, den magnetischen Meridian und den Winkel zwischen dem astronomischen und magnetischen Meridian die Mißweisung oder Deklination der Nadel. Diese ist wohl nicht für alle Punkte und auch nicht für alle Zeiten am selben Punkte dieselbe; kennt man sie aber, so kann man aus der von der Nadel angegebenen Richtung die Richtung des astronomischen Meridians bestimmen. In unseren Gegenden ist z. B. die Deklination der Magnetnadel gegenwärtig 9° von Nord gegen West. Ist daher z. B. das Azimut eines Punktes $A' = 75°$ vom Südende

der Nadel gefunden worden (Fig. 106), so ist das wahre vom Südpunkte gezählte Azimut $A = 75° - 9° = 66°$; allgemein $A = A' - \delta$, wenn δ die Mißweisung der Nadel ist. Oft genügt es aber alle Azimute von der Richtung der Nadel zu zählen; obgleich sie dann sämtlich um δ fehlerhaft sind, so erhält man doch richtige Horizontalwinkel.

Handelt es sich nicht um Winkelmessungen, sondern nur um Orientierungen, so verwendet man mitunter die Orientierungsbussole, eine in einem langen Kästchen eingeschlossene Nadel (vgl. Fig. 185), wobei immer Drehungen vorzunehmen sind, bis die Nadel einspielt.

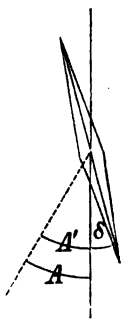


Fig. 106.

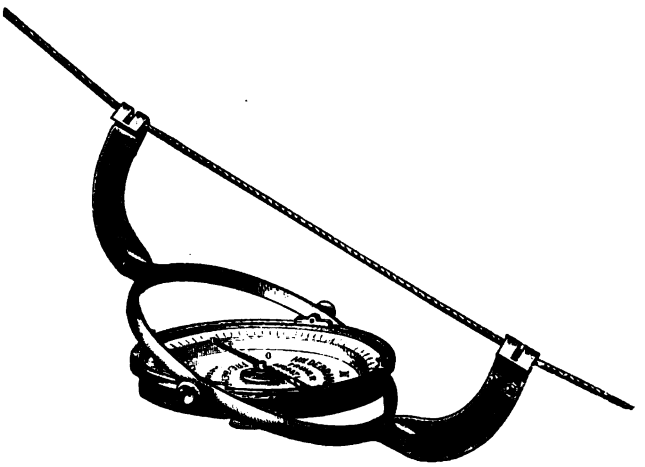


Fig. 107.

Wo der Kompaß nicht horizontal gestellt werden kann (in der Grube), verwendet man das Hängezeug (Fig. 107); ein Ring wird an zwei Metallbügeln aufgehängt; in denselben zwischen Spitzen wird der Kompaß eingehängt, der wenn nötig unten noch beschwert ist und sich daher stets selbsttätig horizontal stellt (Cardansche Aufhängung).

44. Winkelkreuz, Winkeltrommel. Um einen Horizontalwinkel auf dem Felde abzustecken, müssen die beiden Schenkel des Winkels markiert werden. Eine Gerade ist bestimmt durch zwei Punkte und man kann durch Hintübervisieren über die sie markierenden Pflöcke oder Pfähle beliebig viele Punkte erhalten. Ist nun ein Schenkel ausgesteckt und der zweite zu suchen, so wird man in der durch die Größe des Winkels bestimmten Richtung einen Punkt fixieren. Zum Ausstecken gewisser Winkel (90°, 45°, 60°) bedarf es aber keiner Winkelteilungen. Um eine auf einer andern senkrecht stehende Richtung zu erhalten dient das Winkelkreuz oder die Winkelscheibe.* Zwei Brettchen AB, CD (Fig. 108) sind rechtwinklig gegeneinander befestigt und mit einer Handhabe H versehen (oder mit einer Hülse, mit welcher sie auf ein Stockstativ befestigt werden). Zum Visieren

* Dasselbe findet sich bereits beschrieben in „Geometricae theoricae et practicae oder von dem Feldmessen, 14 Bücher, durch Hauptmann Joh. Ardüser, Zürich, 1646", fol. 62 *b*.

dienen die beiden Stifte oder Diopterpaare ab, cd. Visiert man ab in die Richtung der gegebenen Geraden ein, so kann man dann, über cd hinübersehend, die dazu senkrechte Gerade abstecken. Sind die Entfernungen von der Mitte O des Instruments zu den 4 Diopteren gleich groß, so sind die

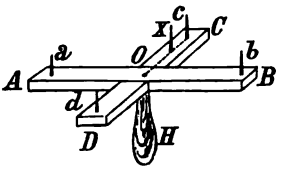


Fig. 108.

Winkel acd, bcd gleich 45° und man kann dann auch diese Winkel ausstecken. Bringt man weiters in x noch einen Stift so an, daß $ox = \frac{1}{2}ax$ ist, so kann das Instrument auch zum Ausstecken von Winkeln von 30° dienen, da Winkel $xab = 30°$ ist.

Zur Brauchbarkeit ist erforderlich, daß die Visuren ab, cd aufeinander senkrecht stehen; man kann dies dadurch prüfen, daß man erst ab in die gegebene Linie einvisiert und über cd aussteckt; dann die neue Linie über ab einvisiert, die erstgegebene muß dann über cd gesehen werden; man hat nämlich hierbei den Winkel boc zweimal nebeneinander aufgetragen und ist derselbe 90°, so muß die Summe 180° sein, daher der zweite Schenkel des zweiten Winkels mit dem Anfangsschenkel zusammenfallen.

Eine allgemeinere Anwendung gestattet die Winkeltrommel (Fig. 109), ein Hohlzylinder von 8—10 *cm* Durchmesser und Höhe, der in zwei aufeinander senkrechten Richtungen Einschnitte als Diopter hat. Besteht die Trommel aus zwei übereinander liegenden Teilen, von denen jeder eine Visur in der Richtung eines Durchmessers gestattet, die aber gegeneinander drehbar sind, so kann man Winkel von beliebiger Größe abstecken, indem die Trommel zunächst mittels der Hülse an einem Stativ befestigt, die untere Visur in eine gegebene Richtung gebracht und durch eine dazu dienende Schraube geklemmt wird, dann der Oberteil um den gegebenen Winkel gedreht wird, zu welchem Behufe eine Stirnteilung dient. Die Diopter des Oberteiles haben hierdurch die gewünschte Richtung, in welcher der zweite Schenkel des Winkels abgesteckt wird. Eine oben angebrachte Bussole gestattet überdies die Lage der Richtungen gegen den Meridian festzulegen. Die Teilungen als richtig vorausgesetzt, handelt es sich nur darum, die fixen Winkel zu kontrollieren, was in derselben Weise wie beim Winkelkreuz geschieht.

Fig. 109.

45. Spiegelinstrumente gestatten die Lösung derartiger Aufgaben durch einmaliges Visieren. Das Spiegellineal (Fig. 110) ist ein Lineal AB, auf welchem die Visierlinie durch zwei Stifte oder Diopter bezeichnet wird und ein Spiegel ab unter 45° aufgestellt ist. Die von dem Punkte C kommenden Strahlen werden gegen B hin reflektiert, wenn COB gleich dem doppelten

Einfallswinkel α, d. i. in diesem Falle 90° ist. Visiert man daher in der Richtung von B gegen A, so sieht man über A hinweg einen in dieser Richtung gelegenen entfernten Gegenstand und im Spiegel einen zweiten in der Richtung OC senkrecht gegen AB befindlichen (Fahnen, Signale).

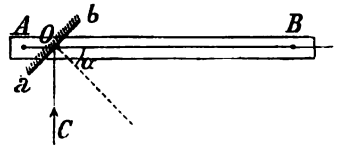


Fig. 110.

Dieses einfache Instrument wird ohne Gehäuse gebraucht. In einem Rohre angebracht, das eine seitliche Öffnung zum Einlassen der Strahlen von C hat, führt es auch den Namen Winkelrohr.

Man kann es auch verwenden, um den Punkt O abzustecken, so daß $\sphericalangle AOC = 90°$ wird; man hat sich hierzu nur in O so lange rechts und links zu bewegen, bis der direkt gesehene Gegenstand A und das Spiegelbild von C sich decken.

Für die Richtigkeit des Instruments ist erforderlich, daß die Spiegelnormale mit der Richtung AB den Winkel von 45° einschließt; die Prüfung erfolgt, indem man zwei rechte Winkel nebeneinander (als Nebenwinkel) absteckt und nachsieht, ob der Endschenkel des zweiten Winkels in der Verlängerung des Anfangsschenkels des ersten Winkels liegt.

Der Winkelspiegel. Fällt auf einen Spiegel S_1 (Fig. 111) Licht von einem Punkte A auf, so werden die Strahlen bei a so reflektiert, daß Einfalls- und Reflexionswinkel einander gleich sind; die bei b auf einen zweiten

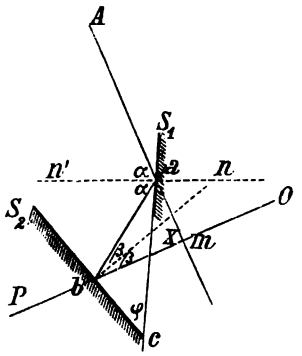


Fig. 111.

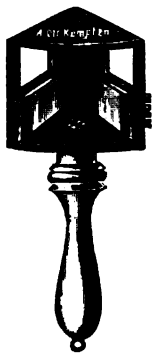


Fig. 112.

Spiegel S_2 auffallenden Strahlen werden neuerdings reflektiert; ist x der Winkel den der nach O austretende Strahl mit der Richtung Aa einschließt, so folgt aus dem Dreiecke mab, in welchem $Aab = 2\alpha$ ein Außenwinkel, $bma = x$ und $abm = 2\beta$, die beiden gegenüberliegenden Innenwinkel sind:

$$x = 2(\alpha - \beta).$$

Im Dreiecke nba ist weiter $n'ab$ ein Außenwinkel, abn und bna sind die gegenüber liegenden Innenwinkel, daher:

$$\alpha = \beta + bna; \qquad \alpha - \beta = bna.$$

Da aber $an \perp S_1$, $bn \perp S_2$ ist, so ist $\sphericalangle bna = \varphi$, gleich dem von den beiden Spiegeln eingeschlossenen Winkel, daher

$$x = 2\varphi.$$

Sieht man von O über den Spiegel S_2 hinüber nach einem entfernten Punkte P, so sieht man in diesem Spiegel gleichzeitig das zweimal reflektierte Bild des Punktes A, wenn $AmP = x$ ist; soll dieser Winkel 90° sein, so müssen die beiden Spiegel unter einem Winkel von 45° gegeneinander geneigt sein. Die Ausführung zeigt Fig. 112; durch die über den Spiegeln befindlichen Ausschnitte kann nach den Gegenständen hinvisiert werden. Der Gegenstand, dessen Spiegelbild beobachtet wird, liegt rechts oder links, je nachdem die Schnittkante der beiden Spiegel links oder rechts vom Beobachter zu liegt; die Strahlen gelangen durch die offene (in der Figur nach vorn gekehrte) weite Öffnung auf den einen und von diesem auf den dem Beobachter gegenüber stehenden Spiegel.

Das Gesichtsfeld des Winkelspiegels ist jedoch nur klein, da sich der ganze Spiegel S_1 für das Auge O in dem Spiegel S_2 nur als schmaler Streifen unter dem Winkel μ (Fig. 113) spiegelt und es wird dadurch etwas erschwert, das gespiegelte Objekt A in den Spiegel hineinzubringen. Das Spiegelbild S_1' von S_1 erscheint aber um so größer, je weiter rechts sich das Auge O befindet. Man wird daher besser tun, rechts an dem Spiegel S_1 vorüber in die weite Öffnung des Instruments auf den Spiegel S_2 zu sehen, wie es der Strahlengang in Fig. 113 darstellt.

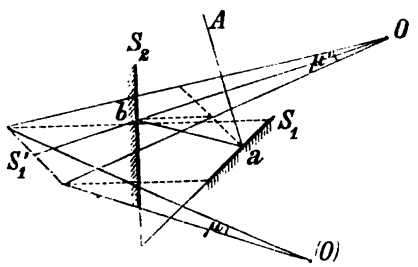


Fig. 113.

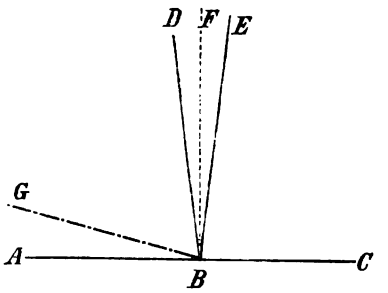


Fig. 114.

Prüfung wie beim Spiegellineal oder indem man (Fig. 114) drei Punkte ABC in gerader Linie und dann von B aus die Winkel CBE und ABD mit dem Spiegel absteckt; gibt der Spiegel rechte Winkel, so fallen BE und BD zusammen (nach BF). Ergibt sich für den von A ausgesteckten Winkel der Punkt D, für den von C ausgesteckten der Punkt E, so sind die Winkel zu klein und man hat mit den in Fig. 112 rechts sichtbaren Korrektionsschräubchen die Neigung zu vergrößern. Ergibt sich hingegen der von C ausgesteckte Punkt in D (gegen A hin), der von A ausgesteckte in E (gegen C hin), so ist der Winkel zwischen den beiden Spiegeln zu groß, daher mittels der Korrektionsschräubchen zu verkleinern.

Das Spiegelkreuz besteht aus zwei unter 90° übereinander gestellten Spiegeln. Liegt der Punkt C (Fig. 115) mit AB in einer Geraden, so werden die von A und B auf C auffallenden Strahlen in dieselbe Richtung CO

A 98386

reflektiert und die Bilder liegen daher in den beiden Spiegeln genau übereinander. Das Instrument dient dazu, einen Punkt C zu bestimmen, der in der Richtung AB liegt. Solange man sich mit dem Instrument nicht genau in der Richtung befindet, werden die beiden Spiegelbilder A', B' zweier Pflöcke nebeneinander zu liegen scheinen (Fig. 116); man bewegt sich dann in der Richtung CO, d. i. senkrecht zu AB so lange hin und her, bis die beiden Spiegelbilder in einer Geraden liegen.

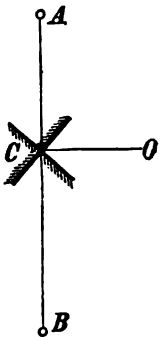


Fig. 115.

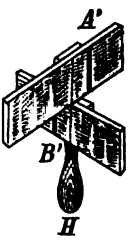


Fig. 116.

Zur Prüfung werden erst die drei Punkte ausgesteckt, dann das Instrument über C gebracht und der eine Spiegel so lange rektifiziert, bis die Bilder in eine Linie fallen.

46. Prismeninstrumente.

Das Winkelprisma. An Stelle der Winkelspiegel wurden von Bauernfeind* Prismen eingeführt, an deren Flächen durch mehrfache Reflexionen Spiegelbilder entstehen. Fällt auf ein gleichschenkliges rechtwinkliges Prisma, dessen Querschnitt ABC (Fig. 117) ist, Licht in der Richtung DE auf, so wird dasselbe nach EF gebrochen und nach zweimaliger Reflexion bei F und G und einer zweiten Brechung bei H nach HL austreten. Bei dem Eintritte ist der Einfallswinkel α, der Brechungswinkel β; bei dem Austritte der Einfallswinkel ε, der Brechungswinkel φ. Wie aus der Figur folgt, ist aber $\beta = \varepsilon$, demnach auch $\alpha = \varphi$. Zieht man durch den Schnittpunkt O der beiden Geraden DE, HL die Parallelen OR, OS zu den Katheten des rechtwinkligen Dreieckes, so treten auch hier die Winkel α, φ auf und es ist

$$DOL = SOR - \alpha + \varphi = 90°.$$

Sieht man von L über das Prisma gegen den Punkt P hin, so sieht man gleichzeitig in derselben Richtung das doppelt gespiegelte Bild von D, desgleichen sieht man von D aus gegen Q blickend, gleichzeitig das doppelt reflektierte Bild eines Punktes L. Das zweimal gespiegelte Bild ist aber außerordentlich lichtschwach, da wohl an G Totalreflexion stattfindet, aber in F wegen des nahe normalen Auffallens sehr viel Licht durchgeht. Diesem

* „Das Prismenkreuz, ein neues einfaches Meßinstrument von Karl Max Bauernfeind, München 1851." Über die allgemeine Theorie der unsymmetrischen dreiseitigen, dann der vier- und fünfseitigen Winkelprismen vgl. auch Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, Bd. I, S. 41—51 und 202—235.

Übelstand wird dadurch abgeholfen, daß die Hypotenusenfläche belegt wird und daher als wirklicher Spiegel wirkt.* (Fig. 118 zeigt die Ausführung.)

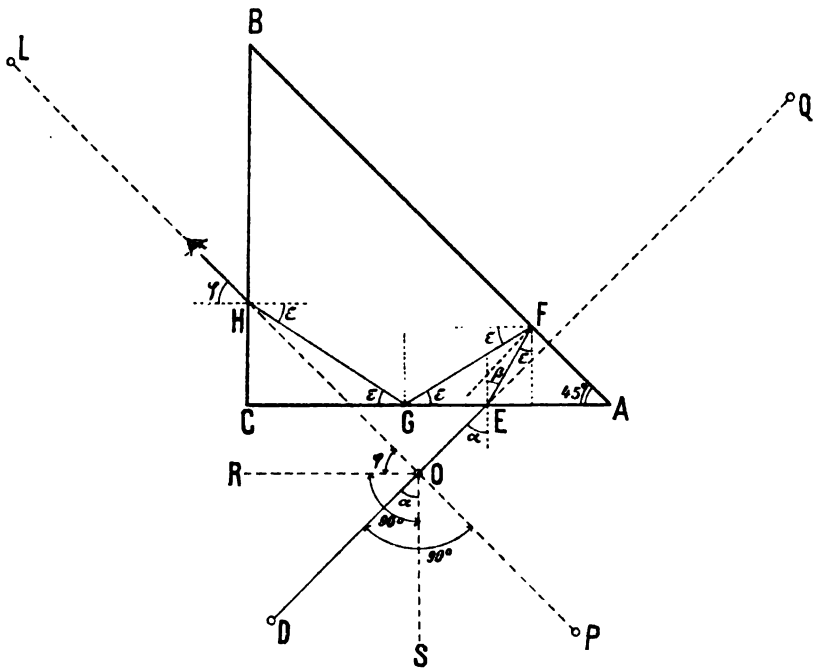


Fig. 117.

Das Prismenkreuz. Fällt auf ein Prisma Licht in der Richtung DE (Fig. 119), so daß der gebrochene Strahl die Hypotenusenfläche trifft, so wird

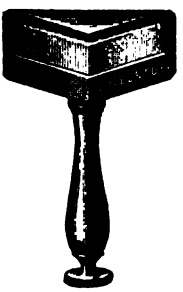


Fig. 118.

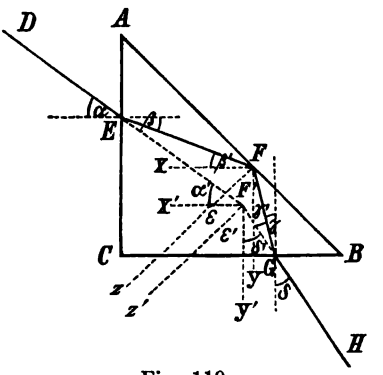


Fig. 119.

er in F total reflektiert, bei G gebrochen und tritt in der Richtung GH aus. Aus der Figur ist zu ersehen, daß $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, wenn $Fx \parallel BC$, $Fy \parallel AC$

* Man sieht überdies ein zweites durch einmalige Reflexion entstandenes, daher etwas helleres Bild (von anderen Gegenständen); dieses liegt aber mehr gegen die Mitte und ändert beim Drehen des Prismas seinen Ort.

ist, und wegen $\delta = \delta'$ auch $\beta' = \gamma'$, demnach $\beta = \gamma$, folglich $\alpha = \delta$. Verlängert man die beiden Strahlen bis zum Schnittpunkte und zieht $F'x'$, $F'y'$ parallel zu den Katheten, so wird $\alpha = \alpha'$, $\delta = \delta'$; halbiert die Linie $F'z'$, den Winkel $x'F'y'$ so ist $\varepsilon = \varepsilon' = 45°$ und $F'z' \parallel Fz$; der Strahl GH tritt daher so aus, als ob er bei F' an einer Fläche reflektiert worden wäre, welche parallel zu AB ist: die Hypotenuse wirkt wie eine spiegelnde Fläche und kann als solche verwendet werden. An Stelle des Spiegelkreuzes kann demnach zu demselben Zwecke und in derselben Weise das Prismenkreuz verwendet werden, bei welchem zwei Prismen so übereinander montiert werden, daß ihre Hypotenusenflächen senkrecht zueinander stehen. Die Ausführung zeigt Fig. 120; das untere Prisma ist fest; das obere kann in seiner Fassung um die Achse c durch die Schräubchen a, b etwas gedreht werden, bis die beiden Hypotenusenflächen (diejenige des oberen Prisma liegt in der Diagonale ab, diejenige des unteren in der dazu senkrechten Diagonale) aufeinander senkrecht stehen. Man sieht rechts vorn in die beiden übereinander befindlichen Prismenflächen und gewahrt in dem oberen Prisma das Bild eines links gelegenen Gegenstandes, in dem unteren dasjenige eines rechts gelegenen, genau wie in Fig. 116.

Fig. 120.

47. Der Spiegelsextant. Ist der Spiegel S_1 (Fig. 111) drehbar, so kann das Instrument auch zum Messen von Winkeln dienen. Wird der Spiegel S_1 (Fig. 121) um einen Winkel γ gedreht, so dreht sich die Spiegelnormale an'' um denselben Winkel; der Einfallswinkel wird daher $\alpha + \gamma$, ebenso groß ist der Reflexionswinkel, daher wird $baA'' = 2(\alpha + \gamma)$, folglich $AaA'' = 2\gamma$. Es gelangen jetzt Strahlen von A'' nach a, von hier wieder nach bO.

Dreht man den Spiegel in entgegengesetzter Richtung um den Winkel φ bis er in die Lage (S_1) parallel S_2 (Fig. 121) gelangt, so wird der Einfallsstrahl $(A)a$ den Winkel $Aa(A) = 2\varphi$ beschrieben haben. Für jede Lage S_1 des Spiegels wird daher der Winkel zwischen den beiden Objekten $PmA = 2\varphi$ sein und man kann die Größe der Drehung $(S_1)aS_1$ zur Messung dieses Winkels benützen.

Der Spiegel S_1 muß ziemlich groß sein, da er sich bei etwas größerem Werte von φ im Spiegel S_2 stark verkürzt darstellt (vgl. Fig. 113); S_2 ist der feste oder kleine Spiegel, S_1 der große Spiegel, welcher drehbar eingerichtet ist. Die Einrichtung zeigt Fig. 122. Mit dem Fernrohr sieht man über den kleinen Spiegel L hinüber gegen den links gelegenen Gegenstand; der große Spiegel C, welcher die von einem zweiten Gegenstande auffallenden Strahlen gegen den Spiegel L und von hier ins Fernrohr wirft, ist an einem einen Nonius tragenden Arme drehbar. Sind die Bilder nahe beisammen, so wird der Arm bei X geklemmt und durch die Feinbewegungsschraube die beiden Bilder vollständig übereinander (zur „Deckung“) gebracht. Um dies zu erleichtern, müssen die Bilder von nahe gleicher Helligkeit sein; sollte dies nicht der

Fall sein, so muß der hellere Gegenstand abgeblendet werden; für den direkt gesehenen Gegenstand dienen die farbigen Blendgläser N hinter dem kleinen Spiegel, für das doppelt reflektierte Bild die Blenden M zwischen dem

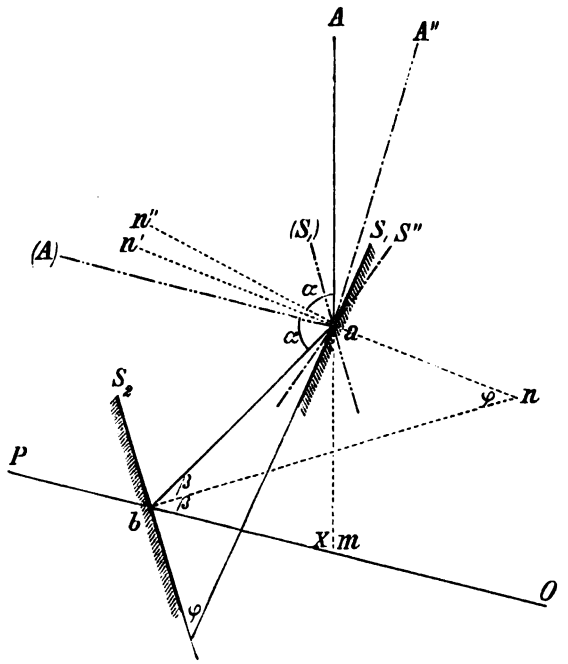


Fig. 121.

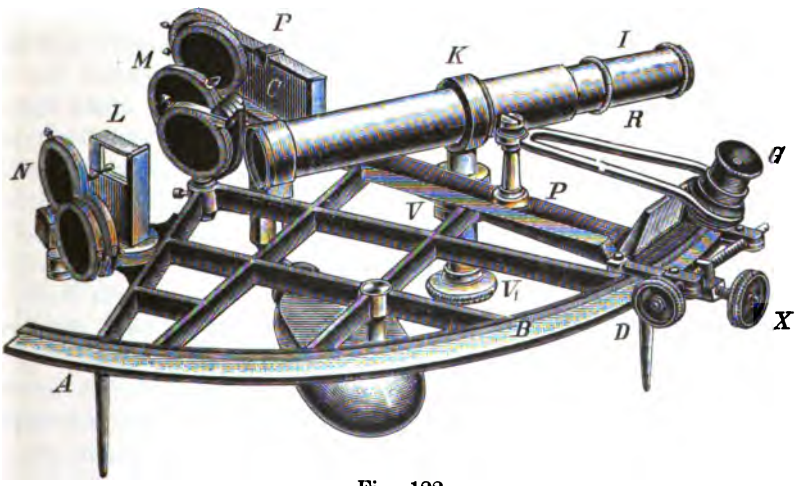


Fig. 122.

großen und kleinen Spiegel. Die sämtlichen Blenden lassen sich um Scharniere zurückschlagen, so daß der Strahlengang völlig ungehindert ist. Um auch in diesem Falle Bilder von bereits nahe gleicher Helligkeit möglichst gleich hell zu machen, ist der Ring K, welcher das Fernrohr trägt, an einem

Stab befestigt, der sich in einer auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehenden Hülse V mittels einer Schraube V_1 heben und senken läßt. Wird das Fernrohr gehoben, so ragt ein größerer Teil des Objektivs über den kleinen Spiegel hinaus, so daß mehr direktes Licht gesehen wird; umgekehrt wird das doppelt reflektierte Bild heller, wenn das Fernrohr gesenkt wird.

Die Teilung umfaßt meist einen Bogen von etwa 60°, daher der Name Sextant; sie wird aber gleich so beziffert, daß nicht der Drehungswinkel, sondern das doppelte desselben, d. i. der Winkel zwischen den beiden Objekten abgelesen wird. Den Ziffern 1°, 2°, 3° . . . 120° entsprechen daher Drehungen des großen Spiegels um $\frac{1}{2}$°, 1°, $1\frac{1}{2}$° . . . 60°, aber Winkeln zwischen den Objekten von 1°, 2°, 3° . . . 120°; ebenso sind alle Angaben des Nonius bereits verdoppelt.

Wenn die Spiegel parallel stehen, so wird man dasselbe Objekt direkt und zweimal gespiegelt sehen und die Bilder müssen sich decken, die Lesung muß dann 0° sein; einen Fehler hiergegen bezeichnet man als den Indexfehler oder Kollimationsfehler des Sextanten. Zu seiner Berichtigung kann der kleine Spiegel mittels Korrektionsschrauben etwas gedreht werden; ein kleiner, noch übrigbleibender Fehler kann bestimmt und in Rechnung gezogen werden. Sei z. B. die Lesung für die Deckung beider Bilder einer Turmspitze (Mittel aus mehreren Lesungen) 6′ 7″ (statt 0), so werden alle Lesungen um diesen Betrag zu groß sein und korrigiert werden müssen. Gewöhnlich sind aber noch Überstriche (Exzedens) jenseits des Nullpunktes. Man kann nämlich für diesen Zweck auch die Sonne benutzen, nur wird man dann nicht Deckung der Bilder, sondern „Ränderberührungen“ beobachten. Berühren sich die Bildränder, so müssen die Mittelpunkte um den doppelten Halbmesser, also den Durchmesser voneinander abstehen, und zwar nach entgegengesetzten Seiten, wenn man die Bilder durcheinander gehen läßt. Wäre kein Indexfehler, so müßte man beiderseits gleiche Lesungen, z. B. 31′ 29·5″ lesen;* hierzu ist daher ein Exzedens von etwas über einem halben Grade nötig; liest man aber auf der einen Seite (im Sinne der Teilung, Lesungen positiv) + 30′ 26″, auf der anderen (am Exzedens, Lesungen negativ) — 32′ 33″, so hat sich das doppelt reflektierte Bild um 62′ 59″ gegen das feste, direkt gesehene Bild verschoben; dies ist der doppelte Durchmesser, daher ist der einfache Durchmesser 31′ 29·5″; da man statt dessen 30′ 26″ las, muß diese Lesung, demnach auch jede andere um 31′ 29·5″ — 30′ 26″ = 1′ 3·5″ vermehrt werden; in diesem Falle wäre der Kollimationsfehler + 1′ 3·5″. Er findet sich übrigens auch als die entgegengesetzte halbe Summe der beiden Lesungen: $-\frac{1}{2}$ (30′ 26″ — 32′ 33″) = $-\frac{1}{2}$ (— 2′ 7″) = + 1′ 3·5″. Wären die Lesungen aber z. B. 33′ 18·5″ (an der Teilung) und — 29′ 40·5″ (am Exzedens) gewesen, so wäre der Indexfehler $-\frac{1}{2}$ (33′ 18·5″ — 29′ 40·5″) = — 1′ 49″ (Durchmesser wie oben).

Die Spiegel müssen senkrecht auf der Sextantenebene und das Fernrohr parallel derselben sein. Man prüft zuerst den großen Spiegel, dann den kleinen, endlich das Fernrohr.

---

* Der Sonnendurchmesser ist etwas veränderlich, im Winter (Sonnennähe) größer, im Sommer (Sonnenferne) kleiner.

a) Prüfung des großen Spiegels. Ein einen horizontalen Faden haltendes Objektivdiopter und ein Okulardiopter, dessen Sehloch genau in derselben Höhe wie der Faden ist, werden auf die Sextantenebene in einer zum großen Spiegel nahe senkrechten Richtung, also am linken Ende des horizontal gestellten Sextanten bei völlig nach rechts gedrehtem Arme CX aufgesetzt. Man bringt es leicht dahin daß man über das Okulardiopter zum Objektivdiopter, in den Spiegel sehend, diese mit ihren Bildern in einer geraden Linie sieht; dies wird aber nur sein, wenn der Spiegel senkrecht auf der Sextantenebene steht. Wird das Bild des Okulardiopters unter oder über dem Faden gesehen, so ist der große Spiegel nach rückwärts beziehungsweise nach vorn übergeneigt. Meist ist ein solcher Fehler nicht vorhanden, der Spiegel schon vom Mechaniker richtig gestellt und genügend befestigt, so daß eine Stellungsänderung, aber auch eine Rektifikation unmöglich ist. Sollte eine solche dennoch nötig werden, so kann sie nur durch Lüften der Befestigungsschrauben und Unterlegen von dünnen Papierblättchen an der rückwärtigen beziehungsweise vorderen Seite erfolgen.

b) Prüfung des kleinen Spiegles. Sind die beiden Spiegel parallel, so gehen die beiden Bilder desselben Objektes in der Nullstellung des Nonius genau durcheinander; sind sie nicht parallel, so gehen sie über- beziehungsweise untereinander vorüber; ist dies der Fall, so muß der kleine Spiegel (nach Berichtigung des großen Spiegels gemäß *a*) justiert werden, wozu die nötigen Schräubchen (3 an der Rückseite des Spiegels) vorhanden sind. Diese Korrektion kann gleichzeitig mit der Wegschaffung eines größeren Indexfehlers geschehen.

c) Die optische Achse des Fernrohrs ist bei Sextanten nicht angegeben; statt dessen ist ein Quadrat aus weiter voneinander abstehenden Fäden ($\frac{1}{2}$ bis 1° Abstand) aufgezogen; die optische Achse geht dann durch den Mittelpunkt dieses Quadrates; ist dieselbe parallel der Sextantenebene, so wird, wenn die Bilder zweier beliebiger Objekte am unteren Faden zur Koinzidenz gebracht werden, diese Koinzidenz auch stattfinden, wenn durch eine kleine Hebung der äußeren (Objektiv-)Seite der Sextanten die Bilder an die oberen Fäden gebracht werden. Auch dieses ist meist genügend genau und sicher hergestellt. Wenn nicht, so wird die Korrektur durch Justierschräubchen bewirkt, welche an dem das Fernrohr haltenden Ringe (in Fig. 122 fehlen dieselben) angebracht sind.

Der Vorzug des Sextanten besteht darin, daß man mit einer einzigen Beobachtung durch das Decken der Bilder den Winkel zwischen zwei Objekten bestimmen kann. Meist ist derselbe daher nur mit einer Handhabe zum Halten versehen; wird derselbe an einem Stativ angebracht, wobei eine Drehung um eine Horizontal- und Vertikalachse es gestattet, den Sextanten in jede beliebige Lage zu bringen, so muß durch entsprechende Gegengewichte das Gewicht desselben ausbalanciert werden.

Um einerseits auch größere Winkel messen zu können und anderseits den Exzentrizitätsfehler (s. Nr. 97) zu eliminieren, haben Pistor und Martins* Vollkreise gewählt und überdies den kleinen Spiegel durch ein Prisma er-

* Der Spiegelsextant wurde von Newton erfunden.

setzt. Diese Instrumente, auch Prismenkreise genannt, haben zwei diametral gegenüberstehende Nonien an dem Arm, welcher den großen Spiegel trägt. Fig. 123 zeigt auch eine andere Anordnung der Blenden, die hier sämtlich unmittelbar vor dem Fernrohrobjektiv sind, aber nur zur Hälfte mit Gläsern versehen sind, so daß nur eines der Bilder abgeblendet wird.

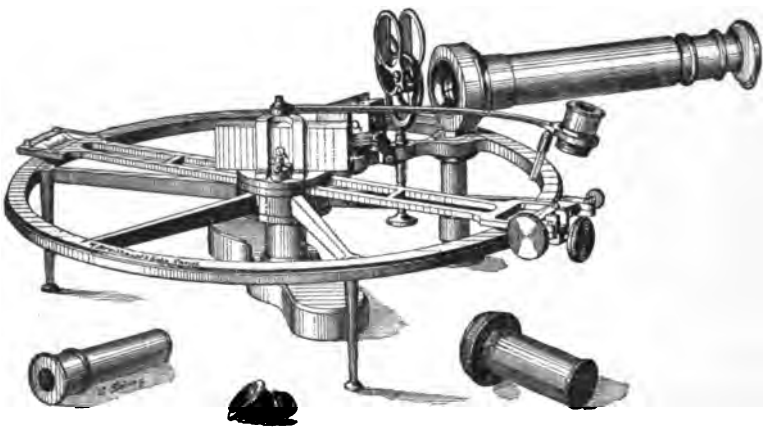
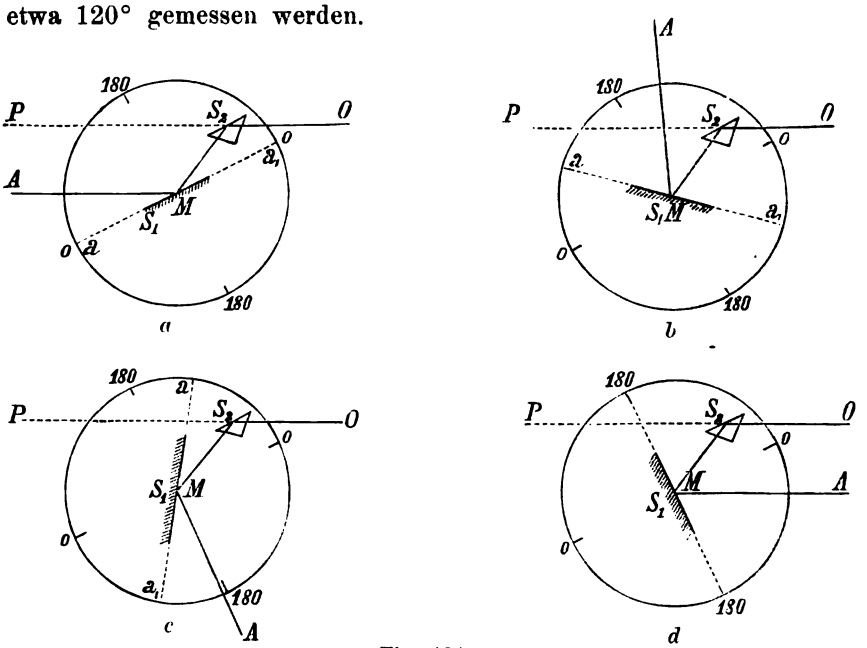


Fig. 123.

Der Prismenkreis muß aber in verschiedener Weise für verschiedene Winkel benutzt werden. Fig. 124 zeigt dies. In Fig. 124*a* ist die spiegelnde Hypotenusenfläche parallel zur Ebene des großen Spiegels, die Lesung daher 0. In der Art Fig. 124*b* (direkt gesehenes Bild links) können Winkel bis etwa 120° gemessen werden.



a *b* *c* *d*

Fig. 124.

Dann würden die von dem rechts gelegenen Gegenstande kommenden Strahlen teils durch das Prisma, teils durch den Kopf des Beobachters verdeckt; es wird daher das rechts gelegene Objekt anvisiert (Fig. 124*c*). In der Nähe von 180° würden die von rückwärts kommenden Strahlen wieder durch den Kopf des Beobachters abgehalten (Fig. 124*d*), weshalb ein prismatisches Okular zu verwenden ist.

Zur Messung von Höhenwinkeln ist die horizontale Richtung erforderlich. Am Schiffe benutzt man dazu die ferne Horizontlinie, doch wird wegen des erhöhten Standpunktes in *C* (Fig. 104) nicht die Höhe h sondern h_1 erhalten, welche um die Kimmtiefe k zu verbessern ist; es ist $h = h_1 - k$.

Auf dem Festland ist der Horizont fast nie so vollkommen frei, daß man denselben benutzen könnte; man verwendet dann einen „künstlichen Horizont", d. i. eine spiegelnde horizontale Fläche, und mißt den Winkel zwischen der Richtung nach dem Objekte *P* und seinem Spiegelbilde *p* (Fig. 125). Als Spiegel dient Quecksilber in einer Schale; dasselbe ist jedoch nie ganz ruhig und unterliegt sowohl rasch zitternden als auch langsam periodischen Schwankungen; die ersteren werden im sogenannten „angequickten Horizont", einer nicht zu dicken Quecksilberschicht in einer mit Salpetersäure abgeriebenen Kupferschale, fast völlig gedämpft. Unabhängig von derartigen Schwankungen ist eine auf einem Dreifuß ruhende eben abgeschliefenen Scheibe aus dunklem Glase, welche durch ein Niveau horizontal zu stellen ist; eine eventuelle Neigung muß besonders berücksichtigt werden.

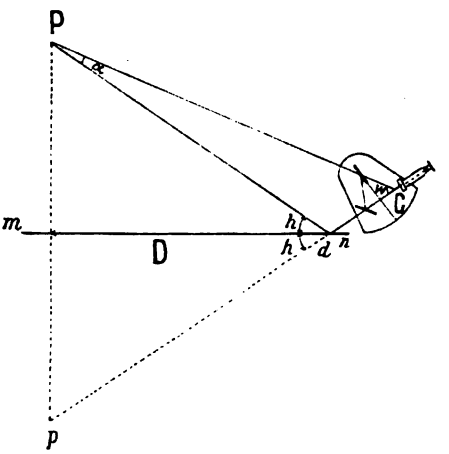


Fig. 125.

Der Sextant wird mit der rechten Hand an dem Griffe gehalten; Fernrohr und Spiegel sind dann zur linken Hand und für den gewöhnlichen Gebrauch wird das direkt anzuvisierende Objekt das von dem künstlichen Horizont entstandene Spiegelbild des zu beobachtenden Objekts sein. Der Beobachter muß seinen Platz in der richtigen Entfernung vom künstlichen Horizonte wählen, damit er das Spiegelbild des Objektes wahrnehmen kann. Ist dieses Spiegelbild *p*, so beobachtet man den Winkel $pnP = 2h$, d. i. die doppelte Höhe.

Bei Beobachtungen der Sonne wird man auch hier die Bilder nicht zur Deckung bringen, sondern man wird Ränderberührungen beobachten. Man stellt den Sextanten auf nahe die doppelte Höhe der Sonne ein, vormittags auf eine etwas größere Höhe, da ja die Sonne steigt, nachmittags auf eine etwas kleinere Höhe. Beginnt man 1 bis 2 Minuten früher zu beobachten, so wird man zwei getrennte Sonnenbilder S_1, Σ_1 sehen, die sich einander nähern, und man notiert die Zeit, zu welcher sich die beiden Bilder S_2, Σ_2 berühren. Weiter gehen dann die Bilder durcheinander (Fig. 126)

würden sich decken S_4, Σ_4, welcher Moment aber nie ganz sicher zu beobachten ist und daher nicht berücksichtigt wird; dann findet wieder eine Berührung der zweiten Ränder statt S_6, Σ_6, welcher Moment wieder notiert wird; schließlich entfernen sich die Bilder wieder voneinander. Am Vor-

Fig. 126.

mittag wird erst die Berührung der oberen Sonnenränder beobachtet, welcher die Berührung der unteren Ränder folgt; nachmittags geht die Berührung der unteren Ränder voran.

Würde die Ebene des Sextanten nicht genau in der Ebene der beiden Objekte (also für Höhenbeobachtungen nicht vertikal) sein, so würden die Bilder auch für den völlig berichtigten Sextanten nebeneinander vorübergehen; der Sextant muß dann solange gedreht werden, und zwar um die festgehaltene Visur nach dem direkt gesehenen Objekte, bis die Deckung stattfindet.

48. Theodolit und Universalinstrument. Einfache Instrumente, welche noch an die älteren Astrolabien erinnern, sind die mit Dioptern versehenen Kompaßinstrumente, sogenannte Feldbussolen. Eine möglichst feingeteilte Bussole ruht auf einem Brettchen und hat an zwei diametral gegenüberstehenden Seiten ein Okular- und ein Objektivdiopter. Eine größere Anzahl von Löchern des ersteren (Fig. 127) gestattet, gegen den Faden des letzteren in verschiedenen Höhen oder Tiefen sehend, die Visur in einer bestimmten Richtung. Durch Klemme und Feinbewegung kann das Instrument genau in diese Richtung gebracht und in derselben festgehalten werden, worauf der Punkt der Teilung abgelesen wird, auf welchen die Magnetnadel zeigt. Man erhält so Azimute vom magnetischen Meridian und aus diesem die Zwischenwinkel.

Bussoleninstrumente dürfen selbstverständlich keine Eisenbestandteile haben und werden ganz aus Messing, Aluminium oder aus Magnalium, einer sehr festen und dauerhaften Aluminiumlegierung (Starke und Kammerer) angefertigt. Die Nadeln sind hochstehende, sogenannte Lamellennadeln, welche sich infolge des Luftwiderstandes, der sich den breiteren Flächen entgegenstellt, rasch beruhigen. Die Teilung ist meist in halbe oder drittel Grade; die Bezifferung wächst von rechts nach links, da hier der Index (Richtung der Nadel) fest ist.

Das Instrument muß selbstverständlich horizontal gestellt werden; zu diesem Zwecke ist auf demselben eine Dosenlibelle und der Oberteil ist mit der auf den Zapfenstativ zu befestigenden Hülse durch Stellschrauben und Gegenfedern verbunden.

Etwas größere Genauigkeit liefern Bussoleninstrumente mit Fernrohr. Ein solches ist in Fig. 128 dargestellt; das mit fixen Fäden zur Distanz-

messung eingerichtete Fernrohr ist um eine horizontale Achse drehbar eingerichtet, so daß es auf verschiedene Höhen eingestellt werden kann; die Ablesung geschieht an einem Gradbogen mittels Lupe. Zur Horizontalstellung

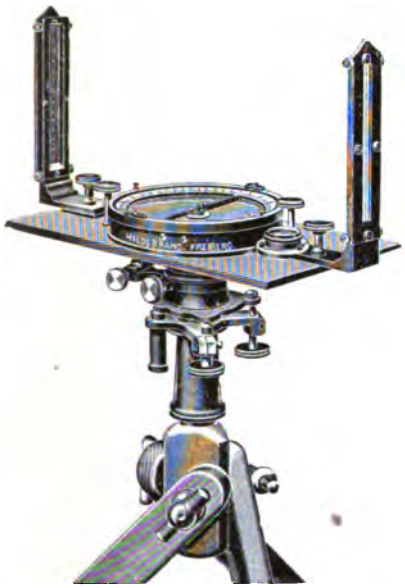


Fig. 127.

Fig. 128.

dient eine seitlich angebrachte Röhrenlibelle. Die Bewegung des Oberteils gegen die auf das Zapfenstativ aufgesteckte Hülse erfolgt um ein Nußgelenk.

Die Untersuchung, ob Bussoleninstrumente keine Eisenbestandteile enthalten, ist wohl beim Bezuge derselben von großen Firmen unnötig. Sollte einmal eine derartige Untersuchung nötig werden, so drehe man das Gehäuse ruhig und langsam um seine Achse; dabei darf die Nadel ihre Richtung nicht ändern; eine Berichtigung eines in diesem Sinne fehlerhaften Instrumentes ist unmöglich, ein solches daher unbrauchbar.

Untersuchung auf Teilungsfehler, Exzentrizität der Nadel sind ebenfalls unnötig; der Messungsfehler, welcher dadurch entsteht, daß die Spitze, auf welcher die Nadel ruht, nicht im Mittelpunkte des Kreises ist (Exzentrizität der Nadel) kann eliminiert werden, indem immer die Stellung beider Nadelenden am Kreise gelesen wird (s. den II. Teil).* Der Kollimationsfehler des Fernrohrs wird nach Nr. 19 berichtigt; die Normalstellung der Bussolenebene gegen die Umdrehungsachse nach $b\beta$, Nr. 33. Der Indexfehler des Vertikalkreises, wenn bei horizontaler Visur die Lesung an demselben nicht 0 ist, kann bestimmt werden, indem man ein Objekt von bekannter Zenitdistanz avisiert, oder man wendet die Methode der Messung der doppelten Zenitdistanzen an (Nr. 49).

---

* Siehe auch dort den Einfluß der Exzentrizität der Visierlinie (Nr. 99). Andere Fehler, wie Exzentrizität des Zapfens, Abweichung der magnetischen Achse der Nadel von deren Stabachse usw., können nicht durch den Beobachter berichtigt werden. Siehe hierüber z. B. Bauernfeind l. c. Bd. I, S. 265 und 283.

Bei den Bussoleninstrumenten mit feingeteiltem Horizontalkreis ist die Ablesung wesentlich an diesem vorzunehmen. Die Bussole wird nur ausnahmsweise verwendet, meist zur Orientierung, vorwiegend bei Grubenarbeiten, da die Beobachtungen an derselben nicht die Genauigkeit derjenigen an den mit Nonien versehenen Kreisen haben. Diese Instrumente sind daher bereits als Theodolite zu bezeichnen und werden Grubentheodolite genannt.

Die allgemeine Einrichtung der Theodolite ist aus Fig. 28 zu ersehen Die einzelnen Teile kehren in verschiedener Ausführung bei den Instrumenten Fig. 129 bis 138 wieder. Mit dem Dreifuß S (Fig. 28) in fester Verbindung ist die hohle Büchse D, auf welcher der Limbus L aufgesetzt ist. In die Büchse D paßt die vertikale Achse V, welche einerseits die Alhidade A oder die Nonien und anderseits die Träger t trägt, auf welchen die Zapfenlager für die Zapfen der Achse HH', des Fernrohres FO und des Höhenkreises HK befestigt sind.

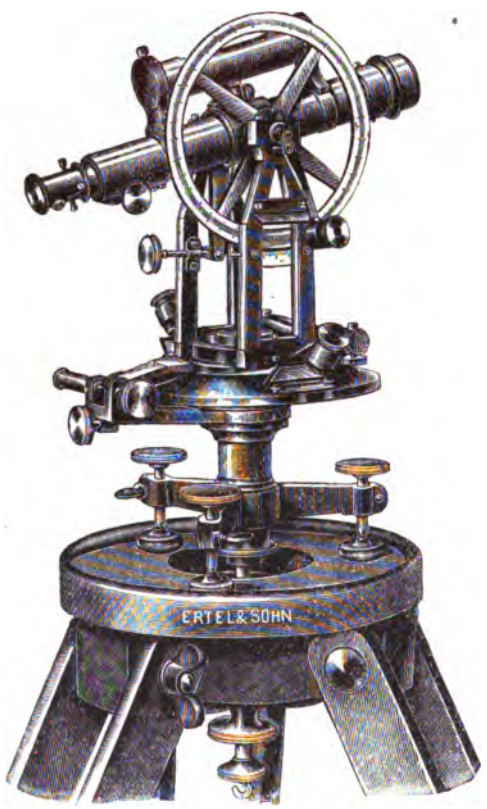


Fig. 129.

Die Verbindung der Oberteile mit dem Dreifuß ist aus Fig. 130 zu ersehen. Die rechte Figur zeigt den Vorgang beim Einsenken der Vertikalachse in die Büchse. Dabei hat man sehr darauf zu achten, daß die zwischen Schraube und Feder kommende Nase, welche zur Feinbewegung dient, nicht durch Druck oder Stoß die Schraube verletzt. Diese muß daher vor dem Einsenken vollständig gelüftet (aber nicht ganz herausgenommen) und die Feder ganz zurückgedrängt werden, worauf die Nase anstandslos in die entstandene Leere eingeführt werden kann. Die mittlere Figur zeigt im Durchschnitt, indem der vordere Teil der Basis entfernt ist, die Verbindung des Instrumentes mit Dreifuß auf dem Stativ (hier auf einem Balken in der Grube) mittels der Herzschraube.

Klemme und Feinbewegung verschiedener Konstruktionen sind aus den einzelnen Abbildungen zu ersehen; besonders gut ist dieselbe für die vertikale Umdrehungsachse aus Fig. 138 zu entnehmen.

Für die Horizontalstellung ist meist eine Libelle auf die horizontale Umdrehungsachse zu setzen, die sogenannte Achsenlibelle. Vor dem Herabfallen wird dieselbe durch eigene Bügel geschützt (vgl. Fig. 135) oder der untere Teil eines Fußes ist zwischen zwei vertikalen, auf den Lagern aufge-

setzten Zapfen (Fig. 131). Die Libelle ist zum Umsetzen und wird so zunächst berichtigt. Zur Horizontalstellung wird dann die Achse zuerst in die Richtung einer Fußschraube gebracht, und nach $b\beta$ Nr. 33 die Stellung der verti-

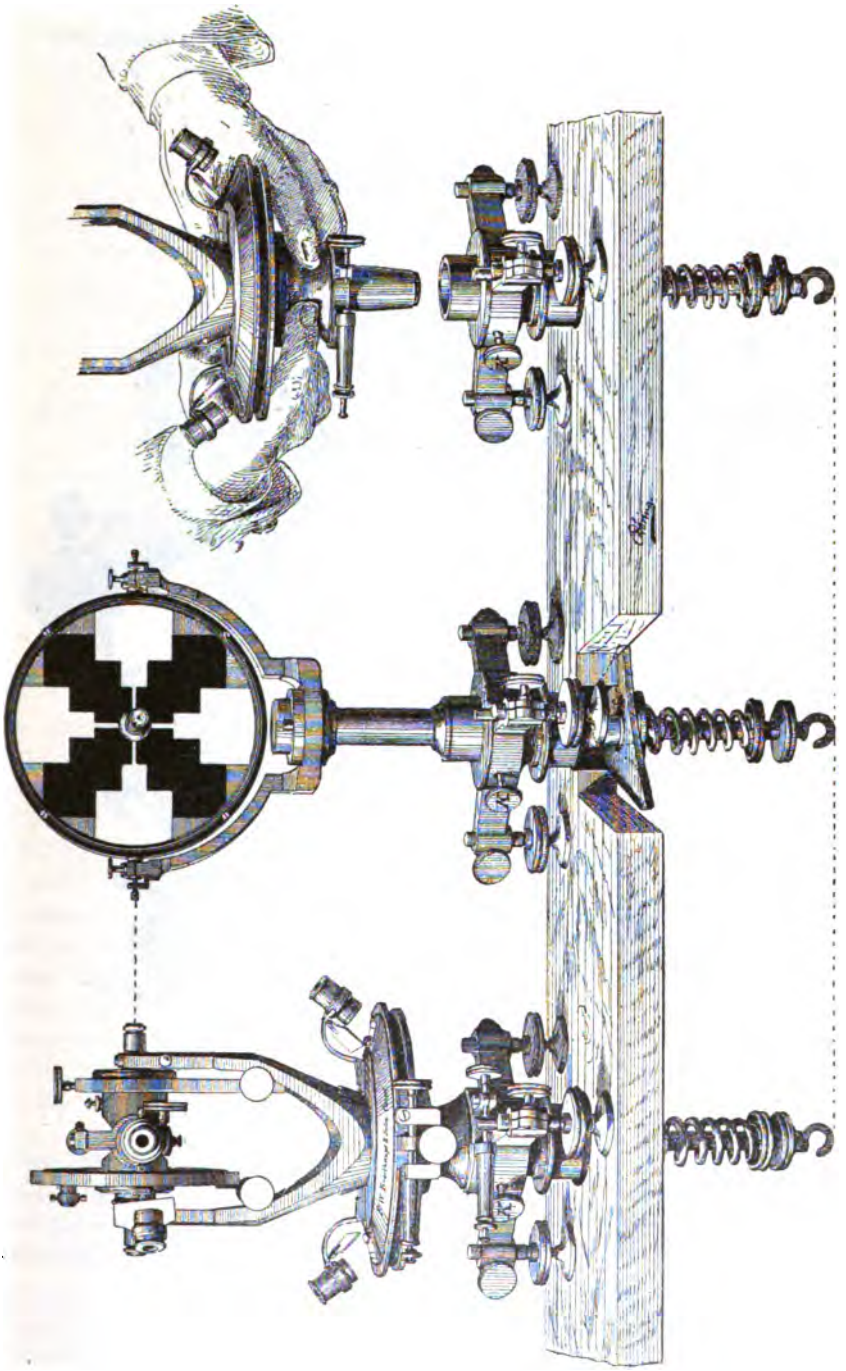


Fig. 130.

kalen Umdrehungsachse und die normale Lage der horizontalen Achse gegen diese erzielt.* Sodann wird die Berichtigung der Vertikalachse und damit des Horizontalkreises noch in einer um 90° gedrehten Stellung nach Nr. 31 vorgenommen (vgl. Fig. 68). Manche Instrumente haben am Horizontalkreise Kreuzlibellen (Fig. 132). Instrumente, die auch zum Distanzmessen und Nivellieren dienen sollen, haben Libellen am Fernrohr (Fig. 129, 132).

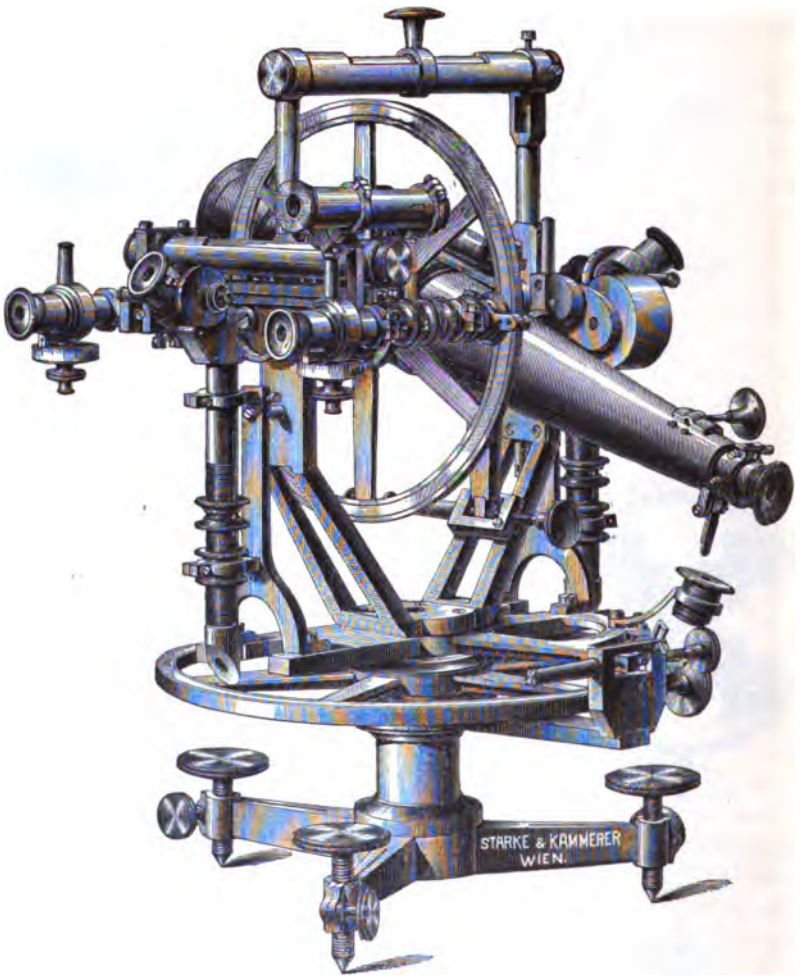


Fig. 131.

Wird bei diesen das Fernrohr horizontal gestellt, so kann es zur Berichtigung der Stellung des Instrumentes wie oben dienen, wobei nur das Fernrohr die Stelle der Horizontalachse vertritt (andere Methoden vgl. beim Nivellieren). In Fig. 141 kann die Alhidadenlibelle (s. unten) denselben Zweck erfüllen.

* Über den Einfluß der Zapfengleichung siehe z. B. J. P. Herr, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Seite 219 oder des Verf. Artikel „Niveau; Niveauprüfer“ in W. Valentiner, Handwörterbuch der Astronomie, Bd. III, 1. Hälfte, Seite 289ff.

Die Einstellung der Objekte erfolgt an den Vertikalfäden des Fernrohrs, welche für diesen Zweck bei der Drehung des Fernrohrs um die horizontale Achse eine vertikale Ebene beschreiben müssen, da sonst die Pointierung an verschiedenen Punkten des Fadens verschiedene Lesungen geben würde.

Für die Ablesung können Nonien mit Lupen oder Mikroskope dienen, und zwar meist zwei diametral gegenüberstehende, zur Elimination des Exzentrizitätsfehlers. In Fig. 129 ist der Horizontalkreis durch zwei Nonien, der Vertikalkreis durch einen solchen abzulesen, ebenso bei Fig. 132. Das Instrument Fig. 141 hat nur einen Vertikalkreis; solche nur zu Höhenmessungen dienenden Instrumente heißen Höheninstrumente. Bei den Instrumenten Fig. 131 und 135 sind beide Kreise mit Mikroskopen abzulesen; diese Mikroskoptheodolite werden auch vorzugsweise Universalinstrumente genannt, da sie bei astronomisch-geodätischen Arbeiten die weitestgehende Verwendung zu allen Aufgaben finden. In Fig. 131 haben die Mikroskope über dem Horizontalkreise prismatische Okulare.

49. Messung von Zenitdistanzen. Soll die Ablesung an Vertikalkreisen genau sein, gleichgültig ob durch Nonien oder Mikroskope, so muß der mit dem Träger verbundene Arm, an welchem die Nonien oder Mikroskope befestigt sind und welcher Mikroskopträger heißt, stets gegen den Horizont dieselbe Lage behalten (horizontal sein), damit eben die Drehung des Kreises immer gegen dieselbe Anfangslage beurteilt wird. Diese konstante Lage gegen eine horizontale Ebene ist aber nicht mehr zu verbürgen, wenn das Instrument um seine vertikale Achse gedreht wird, selbst dann, wenn die vertikale Umdrehungsachse völlig genau gestellt wurde. Um Abweichungen konstatieren und in Rechnung ziehen zu können, ist an dem Mikroskopträger eine Libelle befestigt, oder auch nur aufgesetzt (und zum Umsetzen eingerichtet), welche die Alhidaden- oder Versicherungslibelle genannt wird. Ihre Einrichtung wird aus den Fig. 132 und 133 klar.

In der schematischen Fig. 133 sitzt die Libelle an einem herabreichenden Arme und ist mittels desselben mit dem Mikroskopträger T fest, aber durch die Schräubchen ss rektifizierbar verbunden; ebenso die in Fig. 132 über dem Träger angebrachte Libelle; in Fig. 131 ist die Alhidadenlibelle umsetzbar. Der nach abwärts reichende Arm a (Fig. 133) ist aber nicht fest, sondern zwischen einer Schraube Mb und Gegenfeder b_1 stellbar, so daß Abweichungen weggeschafft werden können. Spielt dann die Libelle vollständig ein, so wäre die Ebene, welche durch die beiden Mikroskope geht, immer horizontal, daher die Lesung am Kreise bei horizontalem Fernrohr immer dieselbe, und die Lesung bei einspielender Alhidadenlibelle in einer anderen Stellung des Fernrohres gäbe in Verbindung mit dieser Lesung die Höhe. Man begnügt sich aber immer den Mikroskopträger sehr nahe horizontal zu stellen und kleine Abweichungen durch Lesung der Alhidadenlibelle in Rechnung zu ziehen. Man nennt dasjenige Mikroskop M (Fig. 134), welches sich auf der Seite des anvisierten Objektes, also des Fernrohrobjektives befindet, das äußere, das andere das innere Mikroskop. Hat man nun mit der vollständig berichtigten Libelle oder durch Umsetzen derselben die Neigung i

gefunden, positiv, wenn das äußere Mikroskop M das höhere ist, so wird man die Lesung um diesen Betrag korrigieren müssen. Ob er zu addieren oder zu subtrahieren ist, hängt aber davon ab, wie die Bezifferung des

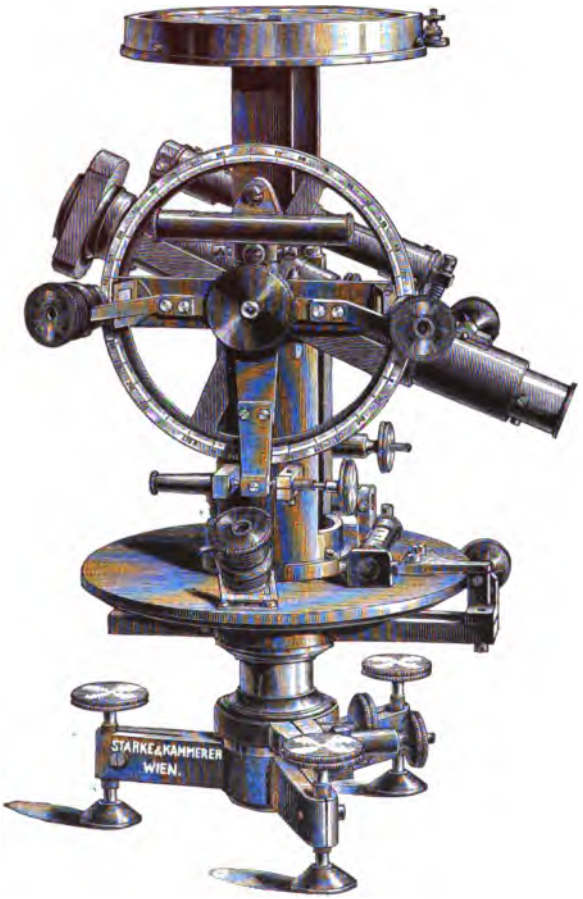


Fig. 132.

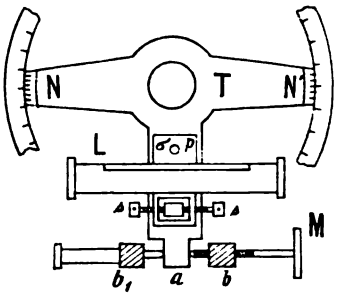


Fig. 133.

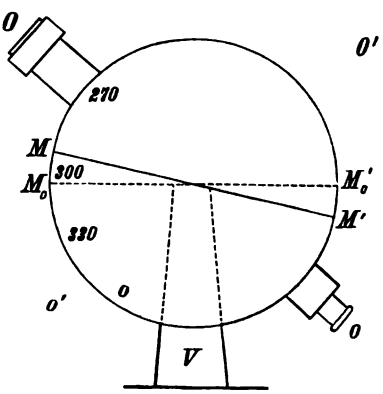


Fig. 134.

Kreises geht. Wachsen die Lesungen gegen das Zenit, so sind dieselben um i zu vergrößern,* denn bei horizontaler Stellung $M_0 M_0'$ des Mikroskopträgers würden die Mikroskope auf Punkte zeigen, die etwas größere Lesungen geben. i ist hingegen abzuziehen, wenn die Lesungen bei Drehung des Fernrohres gegen das Zenit abnehmen.

Die Zenitdistanz würde sich ergeben, wenn man auch die (korrigierte) Lesung bei der Stellung des Fernrohrs gegen das Zenit kennen würde. Dies ist jedoch nicht der Fall. Man kann aber diese Lesung und sofort auch die Zenitdistanz selbst finden, wenn man das Fernrohr um 180° um die Vertikalachse V dreht und das Fernrohr dann wieder auf dasselbe Objekt O richtet. Man bezeichnet die eine Stellung (in diesem Falle Fig. 134 die

* Bei negativem i ist $-i$ zu addieren; steht M tiefer, so wird die korrigierte Lesung kleiner.

erste Stellung) als Kreis links, weil der Beobachter beim Visieren gegen das Objekt den Kreis links vom Fernrohr hat. Dreht man nun das Instrument um die Vertikalachse V um 180°, so kommt das Objektiv nach O', das Okular nach o' und der Kreis hinter das Fernrohr. Da aber ein in O befindliches Objekt anzuvisieren ist, so wird jetzt das Fernrohr gedreht, bis es wieder in die Linie oO kommt und jetzt hat der Beobachter den Kreis auf der rechten Seite; diese Lage wird daher als Kreis rechts bezeichnet. Wenn im ersten Falle die Lesungen bei der Bewegung des Fernrohrs gegen das Zenit zu wachsen, so würden sie im zweiten Falle ebenfalls wachsen, wenn das Fernrohr von O' gegen das Zenit zu bewegt würde, daher abnehmen, wenn es von O zum Zenit bewegt wird (die Kreise sind dabei fortlaufend von 0° bis 360° beziffert). Ist nun die Lesung für die Zenitstellung des Fernrohrs und bei horizontalem Mikroskopträger x (unbekannt) und sind bei

KL (Lesungen wachsen gegen das Zenit): Lesung für die Visur nach O: L_1; Neigung der Mikroskopträger i_1, daher korrigierte Lesung $L_1 + i_1$;

KR (Lesungen nehmen gegen das Zenit ab): Lesung für die Visur nach O: L_2; Neigung der Mikroskopträger i_2, daher korrigierte Lesung $L_2 + i_2$,

so würde sich für die Zenitdistanz, die ja in beiden Lagen dieselbe ist, finden

$$z = x - (L_1 + i_1) \text{ aus der Beobachtung bei KL;}$$
$$z = (L_2 + i_2) - x \text{ aus der Beobachtung bei KR,}$$

daher

$$x = \tfrac{1}{2}[(L_2 + i_2) + (L_1 + i_1)],$$
$$z = \tfrac{1}{2}[(L_2 + i_2) - (L_1 + i_1)].$$

Man kann den Betrag der Zenitdistanz auch durch den Schluß erhalten, daß man ja das Fernrohr nach der Umdrehung um die Vertikalachse erst von O' gegen das Zenit, dann vom Zenit gegen O hin weiter drehen mußte. Die Gesamtbewegung, welche am Kreise als die Differenz der beiden Lesungen $L_2 - L_1$ gefunden würde, ist also gleich der doppelten Zenitdistanz; daher die Zenitdistanz gleich der halben Differenz der Lesungen. Nur hat man hier nicht die wirklich gemachten, sondern die wegen der Neigung der Mikroskopträger korrigierten Lesungen zu setzen.

Die Einstellungen erfolgen hierbei am Horizontalfaden des Fernrohrs.

Beispiel. Sei bei KL: Lesung 255° 28′ 34·9″; $i_1 = -5{\cdot}3''$.
„ „ KR: „ 221° 7′ 18·5″; $i_2 = +6{\cdot}2''$.*

Hieraus folgt, da die Lesung für die Zenitstellung nahe in der Mitte, etwa 238° sein muß, daß hier die Lesungen bei KL gegen das Zenit zu abnehmen, bei KR zunehmen. Es sind daher die korrigierten Lesungen 255° 28′ 40·2″ und 221° 7′ 24·7″, daher der Zenitpunkt für horizontal gedachten Mikroskopträger 238° 18′ 2·5″ und die Zenitdistanz des beobachteten Objekts 17° 10′ 37·7″.

50. Fernrohr und Umlegevorrichtung.

Das Fernrohr kann zentrisch, d. i. in der Mitte der horizontalen Umdrehungsachse, in der Ebene der Vertikalachse sein (Fig. 129, 130, 131), in

* Der Mikroskopträger hat sich dabei wenig verändert, da das früher äußere Mikroskop jetzt das innere sein wird.

welchem Falle aber, bei niedrigen Trägern, das Fernrohr nicht durch das Zenit geschlagen werden könnte. Hohe Stützen verringern aber die Stabilität, weshalb man etwas längere Fernrohre seitlich, exzentrisch lagert (Fig. 138), oder zentrisch als gebrochene Fernrohre (Fig. 135). Zur größeren Bequemlichkeit bei der Beobachtung wird übrigens auch bei geraden Fernrohren mitunter ein prismatisches Okular genommen (Fig. 138). Bei exzentrischen Fernrohren muß insbesondere für eine gute Äquilibrierung gesorgt

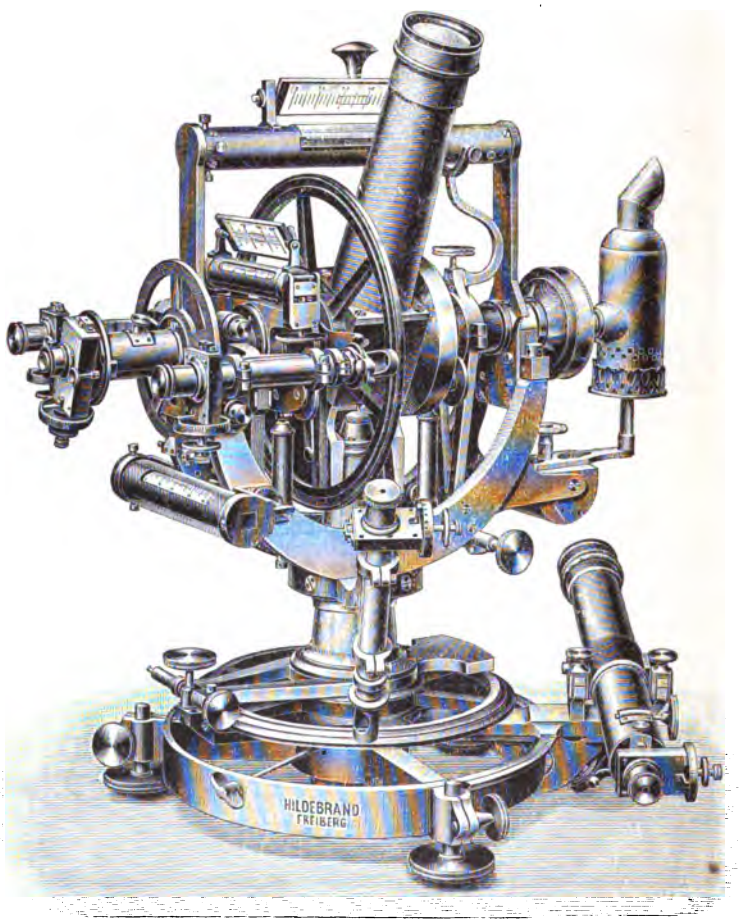


Fig. 135.

sein, damit nicht ein einseitiger Druck ausgeübt werde. Es werden zu diesem Zwecke entweder Gegengewichte angebracht oder aber, der Kreis ist, wie in Fig. 138, sehr massiv.

Die Umlegevorrichtung. Bei vielen Instrumenten kann die Horizontalachse samt Fernrohr, Vertikalkreis und Mikroskopträgern aus den Lagern gehoben und umgelegt werden wie in Fig. 138. Vgl. die Bestimmung des Kollimationsfehlers Nr. 19. Da aber diese Teile ziemlich schwer sind, das Einlegen aber äußerst ruhig, ohne Druck und Stoß erfolgen muß, so dient hierzu eine eigene Vorrichtung. Die Achse ruht nämlich außer auf den

Trägern t (Fig. 136) noch auf zwei inneren Trägern t', aber nicht mittels Zapfen, sondern auf je zwei Rollen, die durch starke in t' eingesenkte Federn an die Achse gedrückt werden. Dadurch wird zunächst die Hauptlast des Oberteils nicht auf die zarten Zapfen, sondern auf starke Federn übertragen, deren Spannung jedoch so abgeglichen sein muß, daß die Achse noch mit einem schwachen Druck auf den Lagern t aufliegt. Der Träger T_1 von t' geht nun durch die hohle Achse in die Büchse D und ruht hier auf einem Exzenter E (einer Kreisscheibe, deren Mittelpunkt o etwas tiefer als der Drehpunkt ist), welches durch eine Kurbel K gedreht werden kann. Wird dieselbe um 180° gedreht, so wird t' herausgehoben; dann kann das ganze Instrument um die Vertikalachse um 180° gewendet und wieder durch Umdrehen der Kurbel niedergelassen werden. Dabei wird die Nase des Mikroskopträgers (in Fig. 138 ist übrigens der Kreis durch eine Nase mit dem Träger t befestigt und die Nonien sind mit dem Fernrohre beweglich; daher sitzt auch die Alhidadenlibelle oben auf dem Kreise) zwischen die auf der andern Seite angebrachten Schraube und Gegenfeder gelangen weshalb wieder beim Niederlassen entsprechende Vorsicht nötig ist. Das Niederlassen hat überhaupt langsam zu erfolgen, um jeden Stoß zu vermeiden, da sonst der Zweck der Umlegung vereitelt würde.

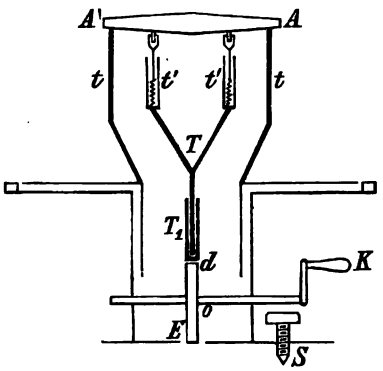


Fig. 136.

51. Der Repetitionstheodolit. Vor Einführung der Mikroskopablesungen hatte man bei den mit Fadenkreuzen versehenen Fernrohren die Erfahrung gemacht, daß die Einstellung weit schärfer möglich war als die Ablesung mit den Nonien. Um nun die Genauigkeit der Winkelmessungen zu erhöhen, führte Reichenbach die Repetition ein. Wenn es möglich ist,

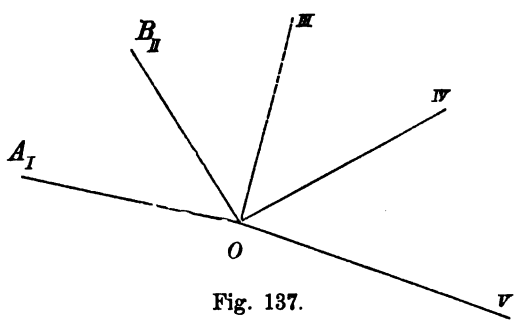


Fig. 137.

die Visur aus der Lage OI (Fig. 137), in welcher der Horizontalkreis abgelesen wurde, in die Lage OII zu bringen, dann ohne abzulesen das Fernrohr mit dem Horizontalkreis in die Lage OI zurückzuführen, so daß jetzt Punkt II der Teilung auf I zu liegen kommt, jetzt den Horizontalkreis festzuhalten und das Fernrohr wieder nach OII zu drehen, so daß es

über einen Teilstrich *III* des Kreises kommt, der aber in der Richtung *OII* liegt und dieses Verfahren beliebig oft zu wiederholen, zu „repetieren", so hat man den Winkel *AOB* mehrmal auf dem Kreise gemessen. War z. B. in der Richtung *OI* die Lesung 34° 15′ 26″ und liest man nach der vierten Repetition 254° 26′ 8″, so wäre der Winkel *IOV* gleich 220° 10′ 42″, daher der Winkel $IOII = 55° 2' 40{\cdot}5''$; hätte man daher sofort bei *II* gelesen, so wäre die Lesung 89° 18′ 6·5″ gewesen; dieses wurde aber

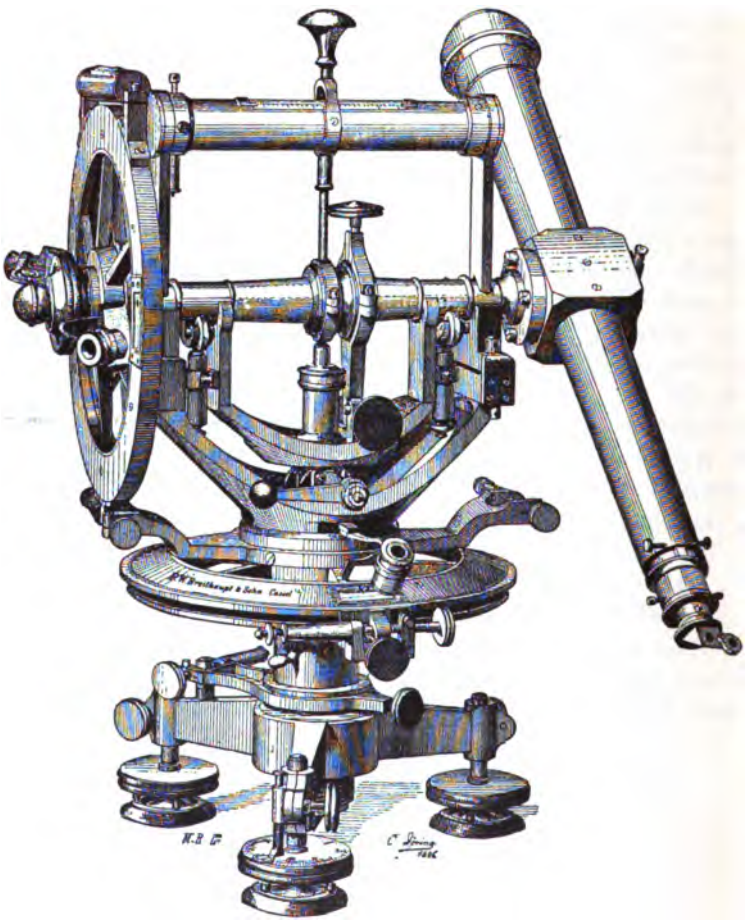


Fig. 138.

unterlassen; der Kreis wurde mit dem Fernrohre wieder nach *I* gedreht (auf das linke Objekt *A* visiert), dann der Kreis mit der Lesung 89° 18′ 6·5″ festgehalten und das Fernrohr wieder nach *B* geführt. Diesmal hätte man die Lesung 144° 20′ 47·0″ machen müssen; dies geschah wieder nicht, sondern zunächst wurde der Vorgang wiederholt. Die nächste Lesung hätte lauten müssen 199° 23′ 27·5″, aber erst die nächste 254° 26′ 8″ wurde tatsächlich gemacht. Ist nun aber der mögliche Lesefehler mit Nonien 5″, so könnte der Winkel *IOII* bei einer einfachen Messung um 10″ fehlerhaft werden. Um den-

selben Betrag würde aber, da man wieder nur zwei Lesungen macht, bei der Repetition nunmehr der ganze Winkel IOV fehlerhaft, da ja die jedesmalige Einstellung auf eines der beiden Objekte als viel schärfer, etwa nur mit einem Fehler von 1″ behaftet, anzusehen ist. Ist aber der Winkel IOV um 10″ fehlerhaft, so wird der vierte Teil $IOII$ nur um 2·5″ unrichtig, also wesentlich genauer.

Hierzu bedarf es nur einer einfachen, besonderen Einrichtung, durch welche sich der Repetitionstheodolit von den anderen unterscheidet. Die Büchse D (Fig. 28), in welcher die vertikale Umdrehungsachse des Instruments liegt, ist selbst wieder eine (hohle) vertikale Umdrehungsachse, welche in einer zweiten Büchse D^1 liegt und in ihr durch Klemme und Feinbewegung gedreht werden kann (in Fig. 138 die untere unmittelbar über dem Dreifuß befindliche). Beim Gebrauche wird zunächst unten geklemmt, d. h. der Horizontalkreis mit dem Dreifuß verbunden und der Theodolit in gewöhnlicher Weise gebraucht: das linke Objekt anvisiert, der Kreis gelesen, dann das rechte Objekt anvisiert. Dann wird oben geklemmt, aber nicht gelesen,* sondern nunmehr unten gelüftet und der ganze Oberteil mit dem Horizontalkreis wieder auf das linke Objekt zurückgeführt und dieser scharf eingestellt. Jetzt wird wieder unten geklemmt** (der Kreis fixiert), oben gelüftet und auf das rechtsseitige Objekt scharf eingestellt. Für jede folgende Repetition wiederholt sich der Vorgang: Es wird oben geklemmt (der Kreis mit dem Fernrohr verbunden), unten gelüftet und das linke Objekt A eingestellt; dann unten geklemmt, der Kreis mit dem Dreifuß verbunden, oben gelüftet und auf das rechtsseitige Objekt B eingestellt. Hat man die gewünschte Anzahl (n) Repetitionen, so wird nach der letzten Einstellung auf das rechtsseitige Objekt der Kreis gelesen.

Bei Mikroskopen wird diese Einrichtung nicht mehr verwendet, weil die Ablesung an den Mikroskopen dieselbe Genauigkeit liefert wie die Einstellung des Fernrohrs auf die Objekte. Neuerdings wird wieder den Repetitionsbeobachtungen gegenüber den Satzbeobachtungen (s. Nr. 101) das Wort geredet.

52. Das Durchgangsinstrument.

Ist das Instrument im Horizonte nicht drehbar, sondern nur in einem einzigen Vertikalkreise, so entsteht das Durchgangs- oder Passageninstrument. Auf zwei festen, vertikalen Säulen (Fig. 139) sind die Lager für die Horizontalachse AB, welche Fernrohr CD und Kreis E trägt. Das Fernrohr kann zentrisch mit prismatischem Okular oder exzentrisch oder wie in Fig. 140 ein gebrochenes Fernrohr sein. Bei den kleinen gebräuchlichen Durchgangsinstrumenten findet man durchwegs die Form Fig. 140. Der Kreis wird dabei nur als Einstellkreis benutzt und wird mit Nonien und Lupe abgelesen. Hat das Instrument einen fein geteilten Kreis, so

* Zur Erhöhung der Genauigkeit wird allerdings jedesmal oder nach je zwei Repetitionen gelesen und zur Ableitung des Resultates werden alle Lesungen berücksichtigt (vgl. Nr. 101).

** Klemmung findet eigentlich vor der Einstellung statt, da diese durch die Feinbewegungsschraube bewirkt wird.

entsteht der Meridiankreis. Rechts ist eine Beleuchtungslampe, die ihre Strahlen (wie auch bei dem Universalinstrumente Fig. 135) durch die hohle Achse hindurchsendet. Das Instrument Fig. 140 hat ein umsetzbares Hängeniveau, eine Umlegevorrichtung, ganz analog der oben (Nr. 50) beschriebenen, bei welcher nur der untere Teil der Stützen t' ausgebaucht ist, um für das Hängeniveau Platz zu lassen.

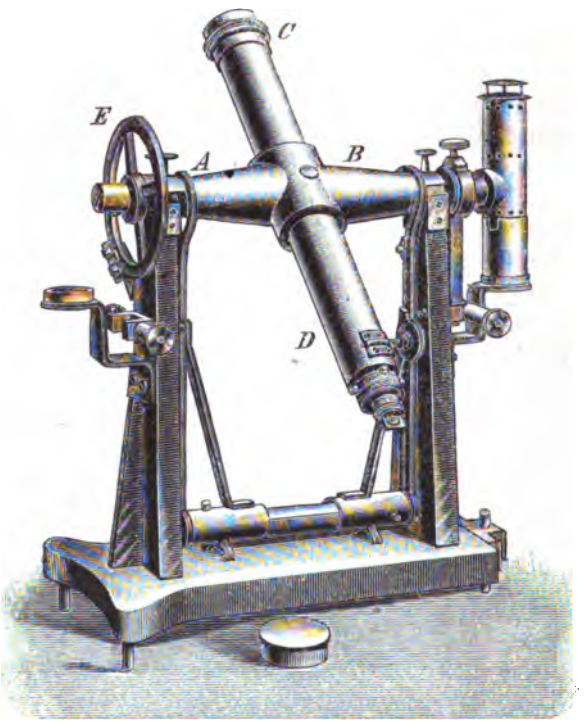


Fig. 139.

Neigung der Achse, Kollimationsfehler des Fernrohrs werden auf die bereits beschriebene Art ermittelt.

53. Höhenmessung. Die Messung des lotrechten Abstands der Punkte von einer als Grundebene angenommenen Horizontalebene erfordert entweder die Kenntnis des Höhenwinkels und der Entfernung des Punktes oder aber die Messung des lotrechten Abstands über einer mit genügender Genauigkeit hergestellten horizontalen Visur. Die erstgenannte Methode heißt die trigonometrische Höhenmessung; die zweite Methode das Nivellieren.

Für die trigonometrische Höhenmessung kann jeder Theodolit oder jedes Universalinstrument verwendet werden, indem man mittels desselben die Höhen- oder Tiefenwinkel bestimmt, wenn die Entfernung der Punkte entweder ebenfalls auf trigonometrischem Wege durch die Berechnung der Dreiecke oder aber durch Distanzmesser bekannt wird (s. hierzu auch die Tachymetrie Nr. 59). Doch hat man auch, wenn es sich nur um die Höhenmessung handelt, eigene Instrumente, die bereits erwähnten Höhen-

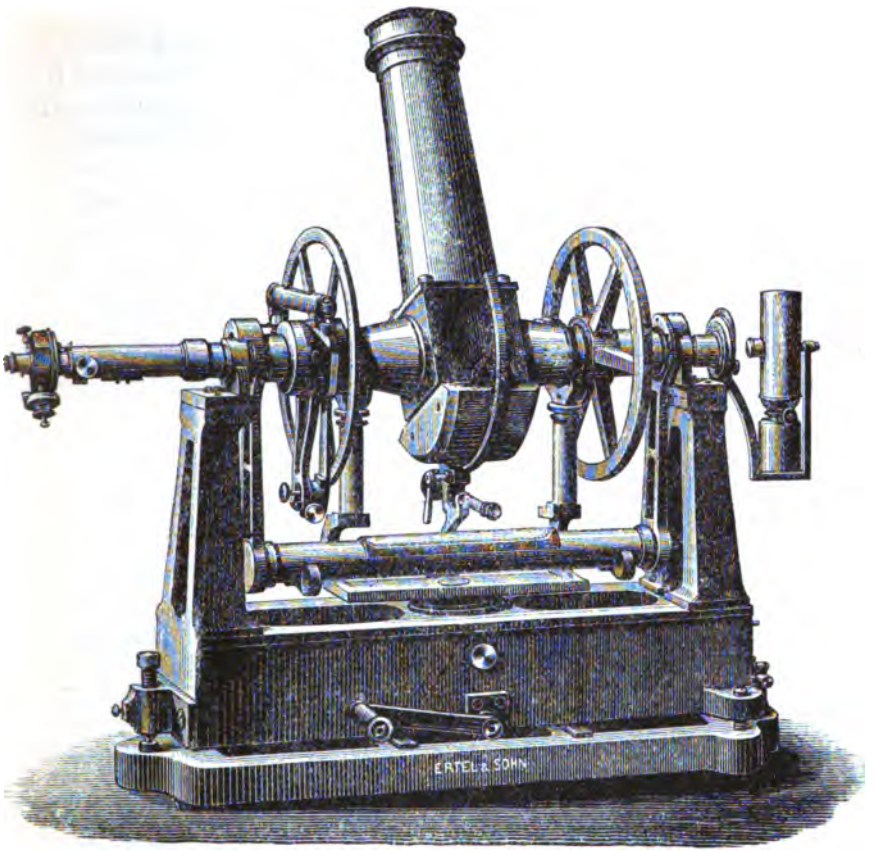


Fig. 140.

Fig. 141.

kreise; ein Beispiel eines solchen ist in Fig. 141 dargestellt,* ein mittels eines Nußgelenkes auf ein Zapfenstativ aufstellbares Instrument; Nonienträger des Höhenkreises mit fester Alhidadenlibelle; Instrument um eine vertikale Achse drehbar, jedoch ohne Lesung der Horizontalwinkel.

54. Nivellierinstrumente. Für das Nivellieren ist es erforderlich, eine horizontale Visur an einem Beobachtungsorte P (Fig. 142) herzustellen und zu bestimmen, um wie viel ein anderer Punkt l über P_1, d. i. über der horizontalen Visur PP_1, liegt. Zu diesem Zwecke wird in l eine geteilte

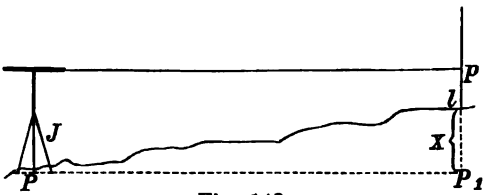


Fig. 142.

Latte vertikal aufgestellt** und beobachtet, welcher Teil derselben zwischen dem Punkte l und dem Punkte p, in welchem die horizontale Visur trifft, enthalten ist. Ist dieser Abschnitt l und ist h die Höhe des Instrumentes J, die sogenannte Instrumentenhöhe, so ist der Höhenunterschied

$$x = h - l.$$

Ergibt sich x positiv, so ist der anvisierte Punkt höher, für negative x ist er tiefer.

Beispiel: Sei die Instrumentenhöhe $h = 1{\cdot}5\,m$ und der Lattenabschnitt $l = 86\,cm$, so ist $x = +64\,cm$. Man nennt diese Methode das Nivellieren aus dem Ende. Es erfordert die Kenntnis der Instrumentenhöhe, welche allerdings nahe konstant ist, aber immerhin kleinen Schwankungen durch die Art der Aufstellung unterworfen sein kann.

Von dieser ist man unabhängig beim Nivellieren aus der Mitte. Auf den Instrumentenstand I (Fig. 143) wird die horizontale Visur her-

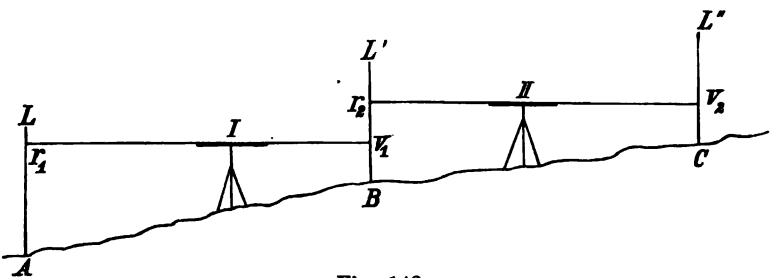


Fig. 143.

* Das zur Ermittlung von Baumhöhen verwendete sogenannte Dendrometer ist ein mit einem Lot versehenes Diopter. Bringt man an dem Hängebogen (Fig. 59*a* und 60) bei M und N statt der Anfhängeringe ein Okular- und ein Objektivdiopter an, so gibt die Abweichung des Lotes OL von der Vertikalen die Neigung der Absehenlinie MN.

** Die Methode des Nivellierens mit geteilter Latte soll schon bei den Griechen geübt worden sein (s. A. Laussedat, Recherches, Tom. I, Paris 1898, S. 16).

gestellt und die Lattenabschnitte auf einer in dem Punkte A und auf einer in dem Punkte B aufgestellten Latte bestimmt; seien diese Abschnitte r_1, v_1, so ist der Höhenunterschied zwischen A und B $r_1 - v_1$. Von einem zweiten Aufstellungspunkte II wird wieder zurück und vor visiert und es werden die Lattenlesungen r_2, v_2 ermittelt; dann ist die Höhendifferenz zwischen C und B: $r_2 - v_2$ usw. Der Gesamthöhenunterschied bei den sukzessiven Aufstellungen in den Punkten I, II, III... wird daher

$$H = (r_1 - v_1) + (r_2 - v_2) + (r_3 - v_3) \ldots$$

Selbstverständlich sind diese Differenzen mit den entsprechenden Zeichen zu nehmen; ist eine Differenz negativ, so bedeutet dieses, daß der folgende Punkt tiefer als der vorhergehende ist.

Beispiel: Es seien die Lattenlesungen bei der Visur

	zurück (r)	vor (v)	so wird $r - v$
in Standpunkt I	75·3	46·5	+ 28·8
II	68·7	35·2	+ 33·5
III	59·8	62·4	— 2·6
IV	37·6	51·8	— 14·2
V	114·7	92·5	+ 22·2

daher der Höhenunterschied zwischen dem ersten und letzten anvisierten Punkte . . . . . $H = + 67{\cdot}7$ *cm*.

Die Formel für H läßt sich übrigens auch schreiben

$$H = (r_1 + r_2 + r_3 \ldots) - (v_1 + v_2 + v_3 \ldots) = \Sigma r - \Sigma v,$$

wo Σr die Summe aller Lesungen für „Visur zurück“ und Σv die Summe aller Lesungen für „Visur vor“ bedeutet; in dieser Form wird die Rechnung einfacher. Bildet man dies für das vorige Beispiel, so erhält man

$$\Sigma r = 356{\cdot}1; \quad \Sigma v = 288{\cdot}4; \quad H = + 67{\cdot}7\ cm,$$

d. h. der Endpunkt ist um 67·7 *cm* höher als der Anfangspunkt.

Die Entfernung, in welcher man sich aufstellt, ist dabei ganz gleichgültig und läßt man sich nur von praktischen Erwägungen leiten. In der Ebene können die Standpunkte I, II... weiter voneinander sein, in stärker ansteigendem Terrain wird man sie näher wählen müssen, um nicht zu lange Latten verwenden zu müssen. 80—100 *m* Distanz in ebenem Terrain wird dabei das passendste sein, weil man auf diese Entfernung noch die Teilstriche der Latte im Fernrohr genügend genau bei nicht allzu großen Instrumenten lesen kann. Beim Nivellieren aus der Mitte wird man die Zielweiten möglichst nahe gleich nehmen, d. h. den Standpunkt des Nivellierinstruments in der Mitte zwischen den beiden Lattenaufstellungen.

Auf große Entfernungen wird auch auf die Krümmung der Erdoberfläche Rücksicht genommen werden müssen, da die Horizontale im Aufstellungspunkte immer eine Tangente zur Oberfläche ist (Fig. 144).* Ist die Länge der zu messenden Strecke mehrere Kilometer, so bedarf es dazu sehr vieler

---

Vgl. Nr. 109.

Aufstellungen, im Durchschnitt 10—15 pro *km*; sollen sich daher die Fehler nicht summieren, so muß auf jede einzelne Beobachtung die äußerste Sorgfalt verwendet werden, wie dies beim Präzisionsnivellement der Fall ist.

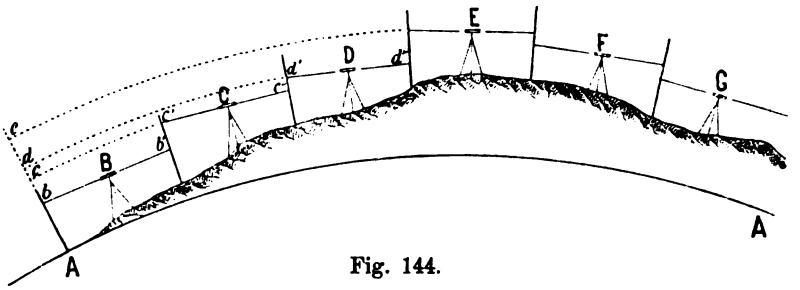


Fig. 144.

Zu den einfachsten Instrumenten zur Herstellung der horizontalen Visur gehört die Kanalwage. Man visiert dabei direkt über den Flüssigkeitsspiegel bei *mn* (Fig. 61) hinüber. Ebenso einfach ist die von Hartmann angegebene Pendelwage, welche neuerer Zeit wieder als Pendelnivellierinstrument konstruiert wird; Fig. 145 zeigt ein solches von Starke und Kammerer, wobei die Visur durch ein um eine horizontale Achse drehbares kleines Fernrohr hergestellt wird, das durch ein daran befestigtes Pendel horizontal gestellt wird.

Fig. 145.

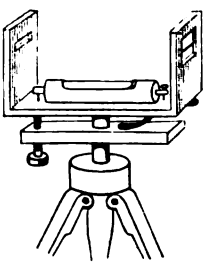


Fig. 146.

Fig. 147.

Etwas genauer ist das mit einer Libelle versehene Nivellierdiopter (Fig. 146). Mittels einer Schraube und Gegenfeder wird der Oberteil so

lange verstellt, bis die berichtigte Libelle einspielt; die Visur über die Diopter muß dann horizontal sein. Hierher gehören auch die von Starke und Kammerer konstruierten Taschennivellierdiopter, welche an Stelle der einfachen Diopter ein Fernrohr ohne Vergrößerung mit einem Fadenkreuz in der Mitte zum Vor- und Rückwärtsvisieren haben (Fig. 147).

Für genaue Beobachtungen ist aber die Verbindung eines mäßig stark vergrößernden Fernrohrs mit einer guten Libelle erforderlich. Diese vorzugsweise als „Nivellierinstrumente" bezeichneten Instrumente* können dabei noch sehr verschieden eingerichtet sein, wobei wesentlich darauf zu sehen ist, daß die theoretischen Forderungen, welche an das Instrument zu stellen sind: horizontale Lage der Visur in jeder Lage des Fernrohrs bei einspielender Libelle (man verwendet hier ausschließlich Libellen mit dem Nullpunkt in der Mitte) durch Rektifikation des Instruments leicht und sicher zu erreichen sind.

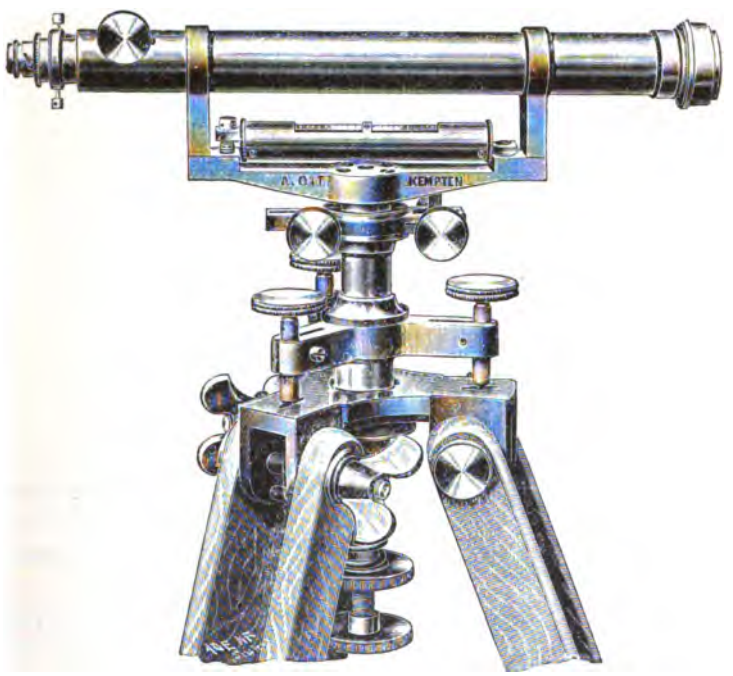


Fig. 148.

Auf die bei jedem Instrumente vorhandenen Teile: Stativ, Dreifuß, Klemme und Feinbewegung wird im weiteren nicht Rücksicht genommen; sie sind nach dem früheren ohne weiteres verständlich. Die Einteilung in

* Auch diese Methode des Nivellierens ist schon ziemlich alt. Liesganig hatte ein Instrument mit festem Fernrohr und fester (rektifizierbarer) Libelle, um eine Horizontalachse und an einem Gradbogen in Höhe drehbar (Joh. Tob. Mayer, „Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie", Göttingen 1792, II. Teil, S. 574). Ein ebenso einfaches Instrument war das Sissonsche (ibid. S. 579). Mayer beschreibt auch die minder genauen Pendelinstrumente von Picard (S. 586) und Huygens (S. 589).

„kleine“ und „große“ Nivellierinstrumente ist theoretisch völlig belanglos, wenn sie auch praktisch für die erreichbare Genauigkeit nicht gleichgültig ist.

Man kann die Nivellierinstrumente in die folgenden Hauptgruppen teilen, deren Typen im folgenden durch je eine Figur dargestellt sind:

a) Fernrohr und Libelle fest mit dem Dreifuß verbunden (Fig. 148);

b) Fernrohr und Libelle fest miteinander verbunden, aber miteinander um die Fernrohrachse zu drehen (daher meist mit Reversionslibellen) und aus den Lagern herauszuheben und umzulegen (Fig. 149);*

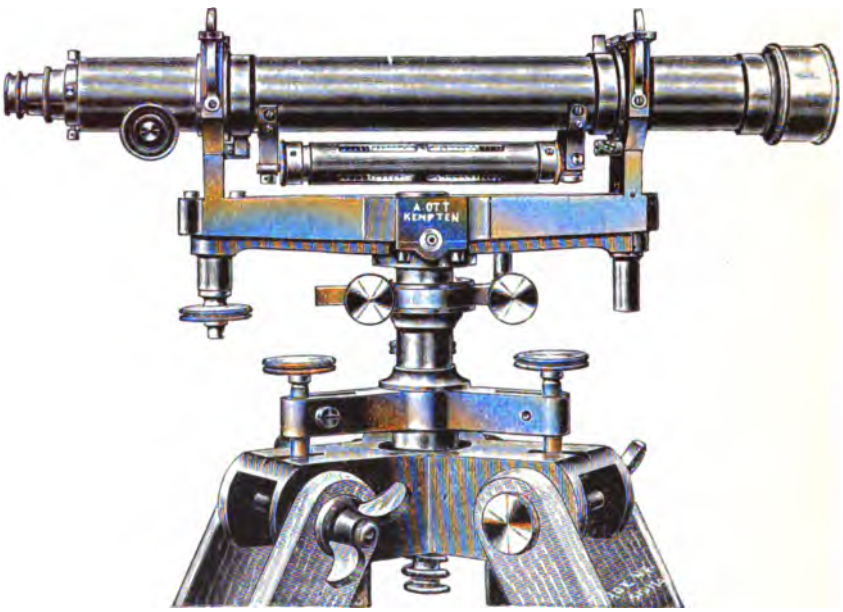


Fig. 149.

c) Libelle fest mit dem Dreifuß verbunden, Fernrohr zum Herausheben und Umlegen (Fig. 150);

d) Fernrohr umzulegen; Libelle aufzusetzen (meist mit Horizontalkreis und vertikalem Gradbogen versehen (Fig. 151).

Bei den Gruppen *b*), *c*) und *d*) ist aber ein wesentliches Erfordernis, daß die Ringe, mit denen das Fernrohr in den Lagern liegt und auf welche die Libelle aufzusetzen ist, genau gleiche Durchmesser haben, damit beim Umlegen des Fernrohrs die Neigung desselben unverändert bleibt.

Nebst der Hauptlibelle, welche zum Nivellieren dient, haben übrigens viele dieser Instrumente zum raschen Horizontalstellen noch eine zweite am Stativ feste Libelle, oft nur eine Dosenlibelle, mitunter zwei Kreuzlibellen, wodurch das wiederholte Drehen um die Vertikalachse behufs Vertikalstellen derselben erspart wird.

---

* Bei dem abgebildeten Instrumente ist übrigens durch Schraube und Gegenfeder der ganze Oberteil um eine horizontale Achse innerhalb mäßiger Grenzen drehbar (kippbares Fernrohr), die Größe der Drehung aber nicht an der Schraube zu lesen (keine Mikrometerschraube).

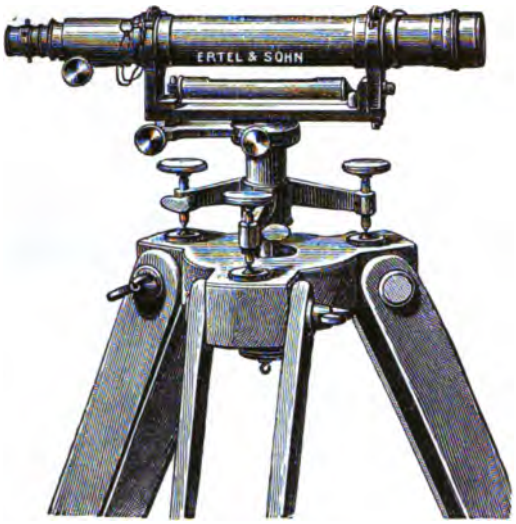


Fig. 150.

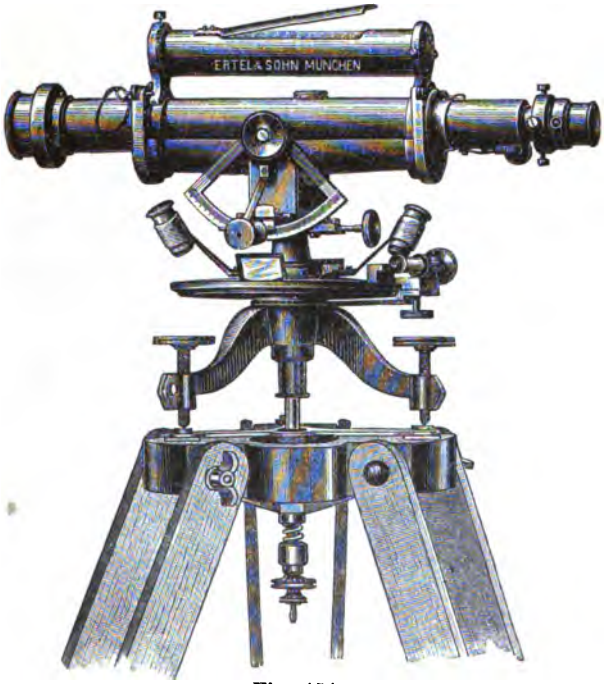


Fig. 151.

Eine besondere Methode des Nivellierens hat Stampfer durch Einführung seiner Meßschraube, der sogenannten Tangentenschraube (oder Trommelkippschraube), eingeführt.* Trifft nämlich die horizontale Visur den

* Theoretisch und praktische Anleitung zum Nivellieren von S. Stampfer, 10. Auflage von Doležal. Die Einführung mehrerer Horizontalfäden im Fernrohr rührt

Boden oder geht sie über der Latte vorüber, so wird das Fernrohr an der Tangentenschraube so weit gehoben oder gesenkt, bis man einen bestimmten Teil der Latte im Gesichtsfelde erhält und kann dann an dieser ablesen.

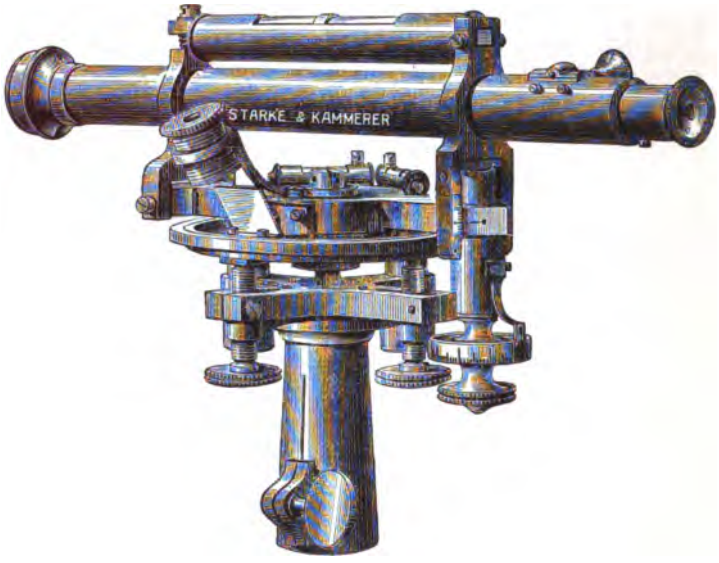


Fig. 152.

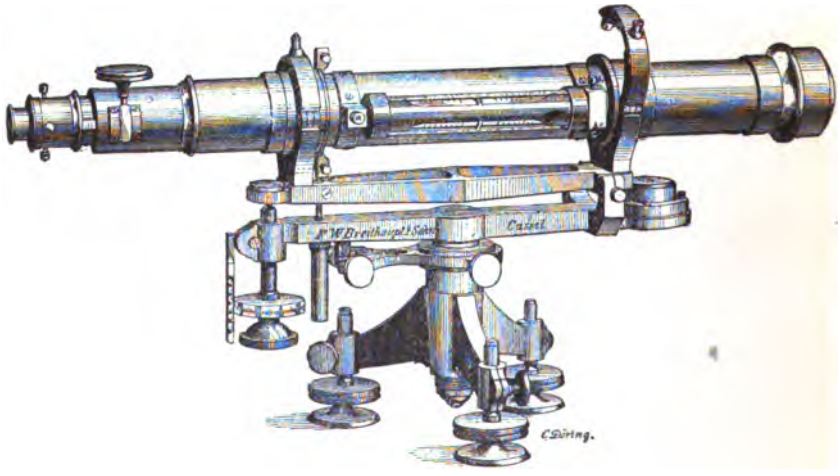


Fig. 153.

bereits von Ferd. Ritter v. Mittis, „Das Nivellement mit einem neu erfundenen Instrument, Wien 1831", her. In seiner ursprünglichen Form brachte er statt einer Libelle drei nebeneinander an, die unter bestimmten Winkeln gegeneinander geneigt waren; das Fernrohr sollte mit der mittleren horizontal, mit der einen auf einen bestimmten Höhenwinkel, mit der andern auf einen bestimmten Tiefenwinkel gestellt werden (l. c. S. 8). Dieselben ersetzt er dann durch drei Horizontalfäden im Fernrohr, von denen der mittlere die horizontale Visur, die beiden anderen bestimmte Höhen- und Tiefenwinkel gaben.

Die Schraube kann an jedem der angeführten Instrumententypen angebracht werden. Fig. 152 zeigt ein Instrument des Typus *a* (festes Fernrohr und

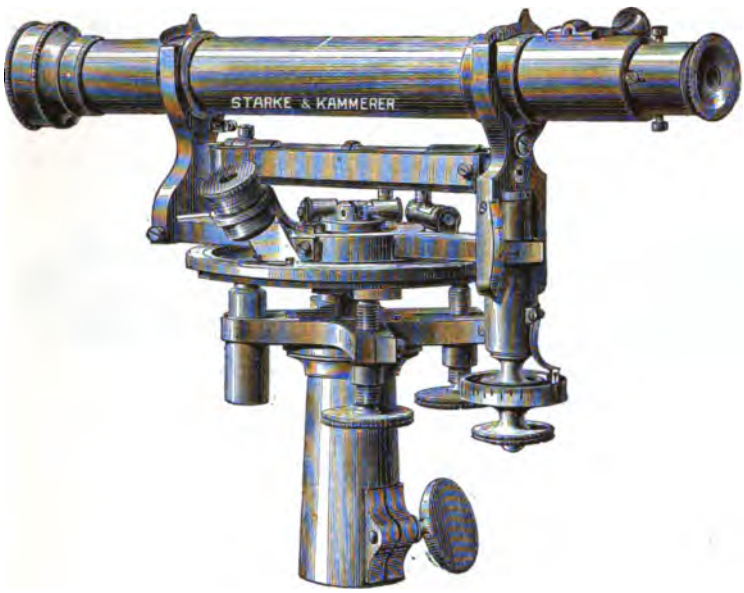


Fig. 154.

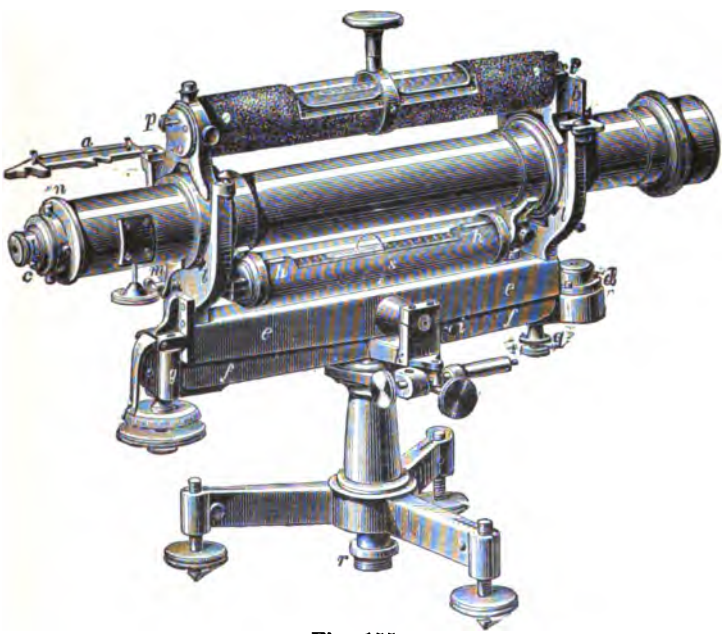


Fig. 155.

feste Libelle), Fig. 153 ein solches vom Typus *b* (Fernrohr mit Reversionslibelle gemeinschaftlich umlegbar), Fig. 154 ein Instrument der Gruppe *c*

(Libelle fest, Fernrohr umlegbar), Fig. 155 ein solches der Gruppe *d* (Fernrohr umlegbar, Libelle aufzusetzen).

Die Achse, um welche dabei das Fernrohr zu kippen ist, ist bei den Starkeschen und Breithauptschen Instrumenten an dem der Schraube entgegengesetzten Ende, bei den Hildebrandtschen und Ottschen zentrisch über der vertikalen Umdrehungsachse.

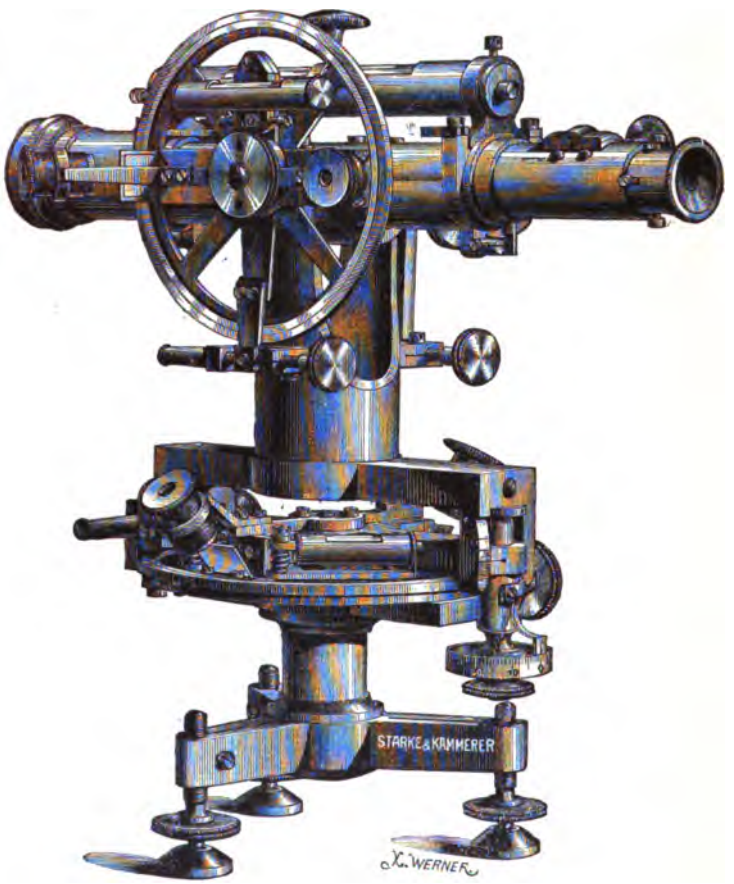


Fig. 156.

Viele dieser Instrumente sind mit Horizontalkreisen, Höhenkreisen oder Sektoren versehen; namentlich die Höhenkreise sind hierbei in vielen Fällen erwünschte Ergänzungen, da die Nivellierinstrumente ohne Vertikalbögen nur eine beschränkte Verwendung auf wenig geneigtem Terrain haben. Für stark geneigtes Terrain müßten die Stände sehr nahe beisammen sein. Natürlich kann auch jedes Universalinstrument als Nivellierinstrument verwendet werden, wenn auf das Fernrohr eine Libelle aufgesetzt wird (vgl. die Fig. 129 und 132). Doch werden eigene Universal-Nivellierinstrumente gebaut, bei denen Horizontal- und Vertikalkreis fein geteilt, durch Nonien abzulesen sind, das Hauptgewicht aber auf Nivellement und Distanzmessung gelegt ist; deshalb ist mit dem Vertikalkreise nicht das Fernrohr, sondern eine

Wiege fest verbunden, die zwei Lager trägt, in welche das mit zwei Stahlzapfen versehene Fernrohr eingelegt wird, auf welches auch die zum Nivellieren dienende Libelle aufzusetzen ist. Ein solches Instrument mit Tangentenschraube zur Hebung und Senkung des ganzen Oberteils zeigt Fig. 156. Obzwar ein übermäßiger Druck nicht zu befürchten ist, wenn die Schraube auf Zug wirkt und durch eine genügend starke Feder der Druck des Instrumentes kompensiert wird, ist doch bei einer auf Druck wirkenden Schraube eine zentrisch über dem Mittelpunkte des Horizontalkreises angebrachte Drehungsachse vorzuziehen. Breithaupt hat bei seinen für das

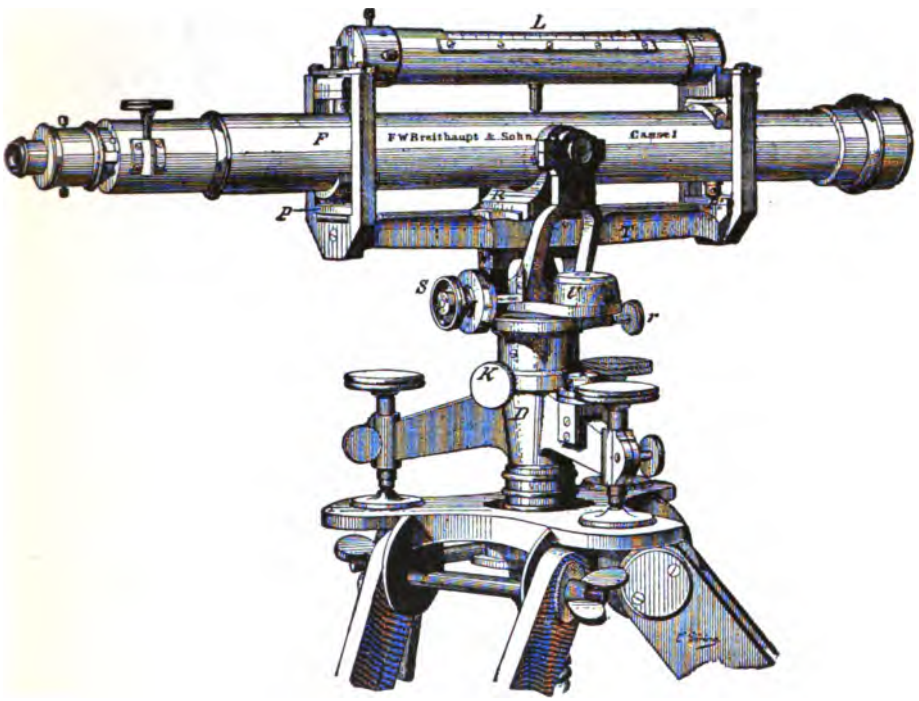


Fig. 157.

Präzisionsnivellement dienenden Instrumenten (System Seibt-Breithaupt) den Träger T (Fig. 157) von Fernrohr und Libelle um eine Achse s in dem Bocke B mittels der Schraube S drehbar (vgl. auch das Hildebrandtsche Instrument, Fig. 155). Diese Einrichtung, Meßschraube in der Mitte des Instruments, findet sich bei den Instrumenten in Sachsen (seit 1884) und Bayern.*

Die französischen und belgischen Instrumente haben ein Stativ mit sphärischer Kalotte (Fig. 158), welches bereits S. 22 erwähnt und im Durchschnitte in Fig. 25 dargestellt wurde. S ist die Tangentenschraube; die Libelle M wird durch Q gelesen; die Prismen (Fig. 67) sind bei b, N und L angebracht.

* A. Ritter v. Kalmár, „Bericht über das Präzisionsnivellement in Europa, vorgelegt der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung bei der Versammlung in Genf 1893".

55. Die Berichtigung der Nivellierinstrumente erstreckt sich auf drei Punkte: 1. Die Libelle muß rektifiziert sein; 2. der Kollimationsfehler des Fernrohrs muß Null sein; 3. Visur und Libelle (Tangente am Spielpunkte) müssen parallel sein.

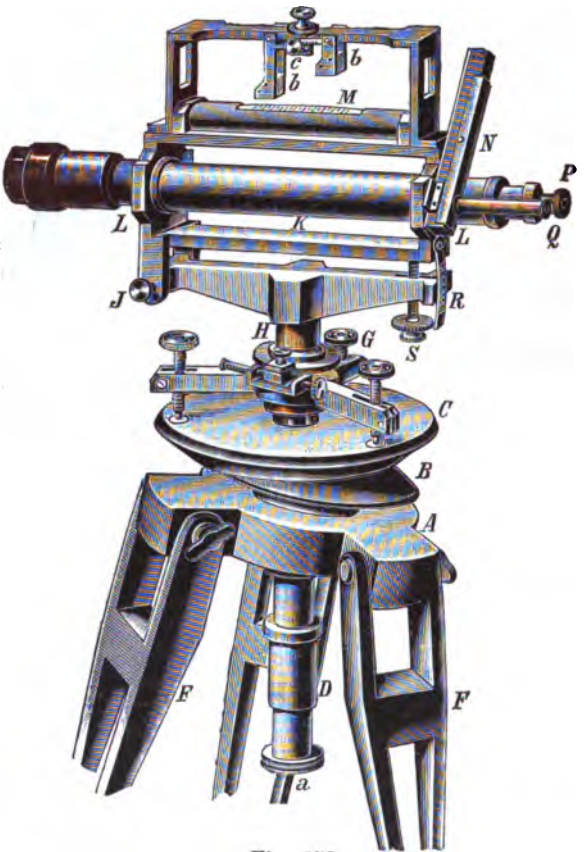


Fig. 158.

Im Falle *d* ist die Berichtigung am einfachsten: Die Libelle wird für sich durch Umsetzen auf dem Fernrohr (Nr. 33) berichtigt; ebenso der Kollimationsfehler des Fernrohrs für sich (Nr. 19). Visur und Libelle sind dann schon parallel* und spielt die Libelle ein, so ist die Visur horizontal.

Im Falle *b* wird die Libelle durch Umsetzen derselben mit dem Fernrohr (welches die Basis der Libelle bildet) rektifiziert (Nr 33); der Kollimationsfehler nach Nr. 19, wobei sich allerdings die Libelle mitdreht.

Im Falle *c* kann der Kollimationsfehler weggeschafft werden, ebenso im Falle *a*, wenn das Fernrohr um seine geometrische Achse drehbar ist; dann hat man nur noch die Libelle zur Kollimationslinie parallel zu stellen, was ebenso wie in dem im folgenden beschriebenen Falle *a* geschieht.

---

* Für die Berücksichtigung der Zapfengleichung vgl. z. B. Hartner-Wastler, Niedere Geodäsie, 7. Auflage, S. 676.

Wenn im Falle *a* das Fernrohr nicht um seine geometrische Achse drehbar ist, so ist für die Berichtigung entweder die Libelle parallel zur Kollimationslinie oder diese parallel zur Libelle zu stellen. Dieses geschieht, indem man den Höhenunterschied zweier Punkte P und P_1 (Fig. 142) zuerst durch Aufstellung des Instruments in P, dann in P_1 bestimmt. Sind nämlich Kollimationslinie und Libelle parallel, so wird für die einspielende Libelle die Visur horizontal und man wird in beiden Fällen dieselbe Höhe erhalten. Geht aber z. B. bei einspielender Libelle die Visur zu hoch, so erhält man verschiedene Resultate.

Sei für die Aufstellung des Instruments in P:

Instrumentenhöhe $J = 1{\cdot}56\ cm$, Lesung der Latte in P_1 $l = 0{\cdot}68\ cm$,

für die Aufstellung des Instruments in P_1:

Instrumentenhöhe $J_1 = 1{\cdot}62\ cm$, Lesung der Latte in P $l_1 = 2{\cdot}56\ cm$,

so würde folgen:

$$x' = J - l = 0{\cdot}88\ cm, \quad x'' = l_1 - J_1 = 0{\cdot}94\ cm;$$

der wahre Höhenunterschied wäre das Mittel $0{\cdot}91\ cm$ und die Visur geht um $3\ cm$ zu hoch; man müßte im ersten Falle $0{\cdot}65\ cm$, im zweiten Falle $2{\cdot}53\ cm$ lesen, welche beide in Verbindung mit der Instrumentenhöhe den richtigen Wert $0{\cdot}91\ cm$ geben. Man kann nun beim zweiten Stande des Instruments sofort bei ungeänderter, einspielender Libelle die Fadenplatte durch ihre Korrektionsschrauben so lange verschieben, bis der Lattenstrich $2{\cdot}53\ cm$ am Faden erscheint. Man kann aber bequemer so verfahren (und wenn bereits der Kollimationsfehler des Fernrohrs weggeschafft ist, so muß dieser Weg gewählt werden), daß man das Fernrohr entweder mittels der Schrauben des Dreifußes oder mittels der Tangentenschraube (oder einer analogen Stellschraube) auf den Teilstrich $2{\cdot}53\ cm$ stellt und die jetzt nicht mehr einspielende Libelle mittels ihrer Korrektionsschräubchen so verstellt, daß sie wieder zum Einspielen kommt (die Libelle wird parallel zur Visur gestellt).* Die Instrumentenhöhe ist dabei die Höhe des Fernrohrs

---

* Allgemein: Ist z der Betrag an der Latte, um welchen die Visur zu hoch geht (geht sie zu tief, so wird z negativ), so wäre die richtige Lattenlesung $l - z$ im ersten, $l_1 - z$ im zweiten Falle, daher

$$x = h - (l - z) = (l_1 - z) - h_1,$$

folglich

$$x = \tfrac{1}{2}[(h - h_1) - (l - l_1)]; \quad z = \tfrac{1}{2}[(l + l_1) - (h + h_1)].$$

Um von der Instrumentenhöhe unabhängig zu sein, kann man die Nivellierung aus der Mitte mit einer Nivellierung aus einem Punkte nahe dem Ende verbinden. Wenn man nämlich das Instrument genau in der Mitte aufstellt, so wird der Fehler in der Visur herausfallen, weil die Lesungen der beiden Latten um denselben Betrag fehlerhaft sind. Stellt man sich in der Nähe der Endpunkte auf und liest beidemal beide Latten, so kann z ebenfalls bestimmt werden. Es ist nämlich für die Aufstellung nahe A (Fig. 143) $h = r_1 - (v_1 - z)$ und für die Aufstellung nahe an B $h = (r_1' - z) - v_1'$, weil bei sehr naher Aufstellung und dem geringen Fehler in der Richtung der horizontalen Visur ein Fehler in r_1 und v_1' nicht gemacht wird. Daher:

$$h = \tfrac{1}{2}[(r_1 + r_1') - (v_1 + v_1')] \text{ und } z = \tfrac{1}{2}[(r_1' - v_1') - (r_1 - v_1)].$$

über dem Pflock, auf welchem die Latte aufgestellt wird und muß daher auch stets so gemessen werden.

In allen Fällen muß überdies der eine Faden im Fernrohr horizontal sein, da sonst eine verschiedene Lattenlesung auftreten würde, wenn man die Latte an verschiedenen Punkten des Fadens pointieren würde. Zu diesem Zwecke hat das in seinen Lagern drehbare Fernrohr eine Nase, in welcher sich eine Schraube befindet, die in der richtigen Lage des Fadens gegen einen Anschlag stößt. Man kann die Horizontalität des Fadens dadurch prüfen, daß man das Fernrohr auf einen entfernten Punkt einstellt und dann langsam im Horizonte dreht; dabei muß das Objekt am Faden bleiben. Ein Fehler kann durch die Anschlagschraube korrigiert werden.

56. Die Latten. Von Wichtigkeit für das Nivellement sowie für die Distanzmessung sind noch die Latten. Zum Nivellement werden sie vertikal gestellt, für die Distanzmessung entweder vertikal oder senkrecht zur Visur; für den ersten Zweck dienen Dosenlibellen (vgl. Fig. 62) oder Senkel (Fig. 159). An zwei Handhaben (Fig. 159) wird die Latte von einem Gehilfen gehalten; soll die Latte senkrecht zur Visur des Distanzmessers gehalten werden, so wird ein Diopter (Fig. 161) angebracht, so daß es horizontal steht, wenn die Latte vertikal ist und der Gehilfe visiert mittels desselben gegen den Beobachter am Instrumente.

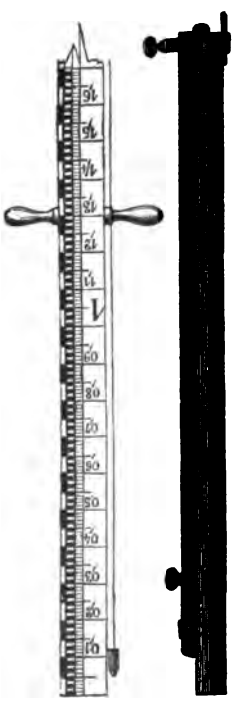


Fig. 159.

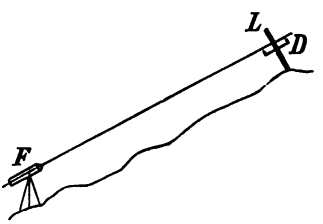


Fig. 161.

Fig. 160.

Die Latten sind überall Holzlatten, auf einer oder auch beiden Seiten geteilt. Versuche mit Stahllatten in den Niederlanden haben keine guten Resultate ergeben. In Belgien, Frankreich und Italien sind noch sogenannte Kompensationslatten französischer Konstruktion in Verwendung, welche in ihrem Innern ihrer ganzen Länge nach einen Eisen- und einen Messingstab als Vergleichsmaßstab und Thermometer eingelegt haben.*

Die Teilungen der Latten müssen so angebracht werden, daß sie leicht im Fernrohr wahrzunehmen sind. Es sind daher abwechselnd 1 *cm* breite, schwarze und weiße oder rote und weiße Felder aufgetragen. Im übrigen ist die Teilungsart mannigfaltig. Durch Untersuchungen in Bayern wurde konstatiert, daß die durch Anstreichen erzeugten dunklen Felder um zirka 50 μ (1 $\mu = 0{\cdot}001$ *mm*) breiter werden als die weißen. Der Einfluß auf die Messung fällt aber weg, wenn zwei Felderreihen nebeneinander liegen, so daß die hellen Felder der einen Reihe den dunklen der andern Reihe entsprechen. Auch die dreieckige Form der Marken (vgl. Fig. 172) schützt gegen diesen Übelstand und erleichtert übrigens das Orientieren.

Die Teilung ist überall nach dem metrischen System, nur in Dänemark ist die zweite Seite in dänische Fuß, in Rußland in Saschen geteilt. Bei den französischen Kompensationslatten ist die eine Seite der einen von zwei zusammengehörigen Latten nach einer von den wahren *mm* nur wenig abweichenden Teilung geteilt, so daß dadurch eine wirksame Kontrolle gegen Lesefehler liegt.** Die Entfernung der Teilstriche für die Präzisionslatten schwankt zwischen 2 *mm* (Frankreich, Belgien, teilweise Deutschland und Italien) und 10 *mm* (Österreich, Rußland, teilweise Deutschland und Italien).

Die Teilungen werden direkt im Fernrohr abgelesen, weshalb die Zahlen umgekehrt angeschrieben sind, da das Fernrohr verkehrte Bilder gibt; Latten für die Distanzmessung haben zwei Zielscheiben (Fig. 160) in konstanter Entfernung; oder aber es kann ihre Distanz variiert werden, wobei an der Rückseite eine Teilung ist, an welcher der die Latte haltende Gehilfe die Entfernung der Zielpunkte ablesen kann. Der Bequemlichkeit des Transports halber, werden lange Latten zum Auseinanderschieben oder zum Umklappen eingerichtet, wobei besondere Einrichtungen getroffen sind, um sie beim Ausdehnen zu ihrer vollen Länge gegen unrichtige Stellung zu schützen.

Der Querschnitt der Latten ist viereckig, dreieckig, H- oder T-förmig.

Das Vertikalhalten der Latten wird dem Gehilfen dadurch erleichtert, daß an derselben ein oder zwei mit Eisenspitzen versehene Füße angebracht sind. Beim Präzisionsnivellement wird die Latte übrigens, um sie gegen etwaige Höhenänderungen beim Umdrehen (da sie von zwei Ständen beob-

* A. Ritter v. Kalmár, „Bericht über das Präzisionsnivellement in Europa 1893“ (S. 6). Ertel verfertigt jetzt auch sogenannte Nivellierbänder aus präparierter Leinwand, mit Teilung von *cm* zu *cm*, welche wie Meßbänder aufgerollt, leicht zu transportieren sind und beim Gebrauche auf eine beliebige Latte mit Reißstiften befestigt werden. Für das Präzisionsnivellement sind dieselben allerdings nicht verwendbar. Etwas besser dürften die von Hildebrandt als Basisbänder bezeichneten Stahlbänder sein, die etwa 7 *m* lang, aber nur von *m* zu *m* gelocht sind, so daß Visurtäfelchen in diese Löcher einschnappen können, wodurch sie zur Distanzmessung mit festem Lattenabschnitt (zwischen 1 und 7 *m*, aber nur in einer ganzen Zahl von Metern) dienen können.

** A. Ritter v. Kalmár, l. c. S. 7.

achtet wird) zu schützen, auf eigene Sockel gestellt. Fig. 162 zeigt die Form der beim österreichischen Präzisionsnivellement verwendeten Latten; sie haben H-förmigen Querschnitt, unten einen Eisenbeschlag, in welchen eine halbkugelförmige Höhlung eingedreht ist, welche auf den oberen Knopf

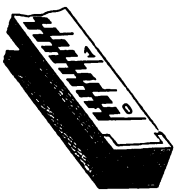


Fig. 162.

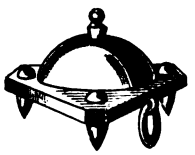


Fig. 163.

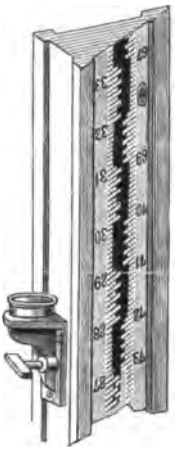


Fig. 164.

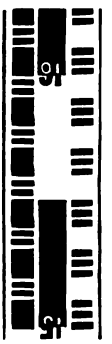


Fig. 165.

des Sockels (Fig. 163) aufgestellt wird, der mit seinen drei Eisenspitzen ins Erdreich eingedrückt wird. Fig. 164 zeigt die dreikantige Latte des dänischen Präzisionsnivellements, Fig. 165 die Teilung der beim Nivellement des preußischen geodätischen Instituts verwendeten Latten.

e) Höhenmessung mit dem Barometer.

57. Quecksilber-Barometer und Aneroide. Die Größe des Luftdruckes kann durch eine Quecksilbersäule in einer Glasröhre, welche oben geschlossen und luftleer ist (Torricellisches Vacuum), gemessen werden. Da aber der Luftdruck von der Höhe der drückenden Luftsäule abhängig ist, so wird derselbe in größeren Höhen kleiner und man kann aus dem Stande des Barometers auf die Höhe des Standpunktes schließen.

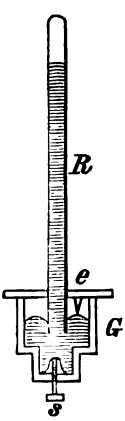


Fig. 166.

Soll die Beobachtung jedoch brauchbar sein, so muß die das Quecksilber enthaltende Röhre R (Fig. 166) weit, mindestens 8 *mm* Querschnitt haben, da für geringere Weiten die Kapillardepression des Quecksilbers nicht zu vernachlässigen ist.* Es muß ferner das durch das Fallen des Quecksilbers in der Röhre hervorgerufene Steigen desselben im äußeren Gefäße berücksichtigt werden; man nimmt allerdings dieses Gefäß G möglichst weit, damit eine aus der Röhre in dasselbe fließende Quecksilbermenge das

* In zu engen Röhren (Kapillar- oder Haarröhrchen) werden benetzende Flüssigkeiten wie Wasser gehoben (Kapillarelevation), nicht benetzende wie Quecksilber herabgedrückt (Kapillardepression).

Niveau nicht zu sehr hebt, aber für große Höhen, wobei das Quecksilber selbst um 200—300 *mm* fallen kann, wird das Steigen in dem Gefäße 5 bis 10 *mm* und mehr betragen können, ein Betrag, der durchaus nicht zu vernachlässigen ist. Man kann denselben durch Rechnung bestimmen, wenn das Querschnittsverhältnis der Röhre und des Gefäßes bekannt ist; einfacher ist es, wie bei den Fortinschen Gefäßbarometern, das Quecksilber in dem Gefäße durch einen Lederboden, der durch eine Schraube *s* gehoben oder gesenkt werden kann, wieder auf dasselbe Niveau zu bringen, welches durch eine sich im Quecksilber spiegelnde Elfenbeinspitze *e* angegeben wird.

Für Höhenmessungen sind aber diese Barometer nicht praktisch. Sie sind wegen der großen Menge des Quecksilbers schwer und müssen auf das sorgfältigste transportiert werden, da die geringste Luftblase, welche in der Röhre *R* über das Quecksilber kommt, die Ablesung vollkommen fälscht.

Man verwendet daher statt derselben die Metallbarometer, auch Aneroide oder Holosterikbarometer genannt,* von denen drei verschiedene Typen im Gebrauche sind: Das Vidi-Bourdonsche, bei welchem durch die Variation des Luftdruckes die Krümmung einer kreisförmig gebogenen, innen hohlen Röhre geändert wird; das Naudetsche und das Goldschmidsche, bestehend aus einer hermetisch geschlossenen, flach zylindrischen Metallbüchse, deren Bodenflächen aus sehr elastischem Wellblech hergestellt werden. Der wachsende Luftdruck drückt den Boden etwas ein; bei abnehmendem Luftdruck wird er durch den inneren Druck nach außen gepreßt. Das Vidi-Bourdonsche und das Naudetsche haben zur Übertragung der außerordentlich geringen Veränderungen Hebelübersetzungen. Bei dem Naudetschen sitzt die Dose *D* (Fig. 167) mittels eines Säulchens *a*

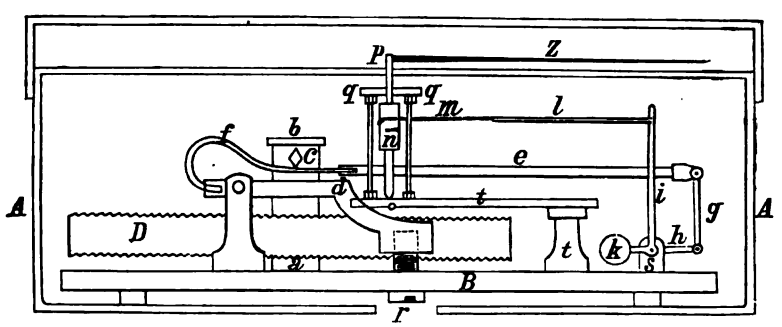


Fig. 167.

auf der Bodenplatte und hat oben ein Säulchen *b*, das durch einen Querstift *c* eine Feder *f* nach abwärts drückt, welche in dem bei *o* drehbaren Metalllager *d* befestigt ist. Die Bewegung der Feder *f* überträgt sich, stark vergrößert, durch ein Zwischenstück *e* auf einen Winkelhebel *ghi*, der durch ein kleines Gegengewicht *k* (oder durch eine Feder) vor dem Hinüberfallen auf der Seite von *h* geschützt ist. Bei *lm* wirkt nun ein Kettchen auf die

* Als Vorläufer derselben sieht Laussedat „Recherches etc." ein von Conté im Bulletin de la société philomatique de Paris beschriebenes Metallbarometer an, welches aber keine zufriedenstellenden Resultate gab (l. c. S. 337).

Welle n, so daß hierdurch eine drehende Bewegung des Zeigers Z entsteht, welche auf einer Skala den zugehörigen Druck abzulesen gestattet. Das Lager d ist aber nicht fest, sondern durch eine von außen zugängliche Schraube r zu heben und zu senken. Hebt man d, so wird die Feder bei f gesenkt und damit die Spitze e gehoben, wodurch der Zeiger sich nach der einen Seite dreht; die entgegengesetzte Drehung erfolgt, wenn d gesenkt wird. Dieses dient dazu, den Zeiger auf einen gewissen Teilstrich der Skala einzustellen. Diese wird empirisch durch Vergleichung mit einem Quecksilberbarometer hergestellt.

Bei dem Goldschmidschen werden Veränderungen in der Stellung der Deckplatte von D (Fig. 168) mittels des Säulchens b und der damit fest verbundenen Spitze σ durch eine einmalige Hebelübersetzung auf einen Arm übertragen, der bis zu dem Zylindermantel des Gehäuses reicht, wo die Spitze p des Hebels an einem mit Glas gedeckten Ausschnitte sichtbar ist

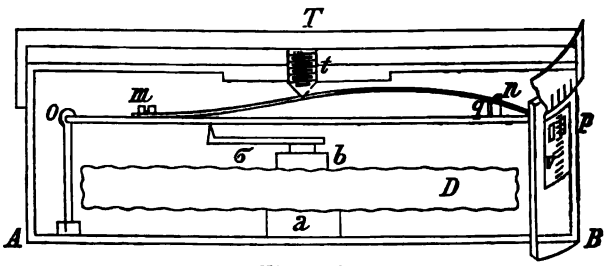


Fig. 168.

und an einer feinen Skala auf dem Glase mittels einer Lupe abgelesen werden kann. Unterabteilungen werden durch eine Mikrometerschraube t gemessen, welche gegen eine Feder mn* drückt, die bei m an dem Hebel op festgenietet und bei n etwas zur Seite gebogen ist, so daß zwei feine Marken, welche an den Enden bei p und v angebracht sind, nebeneinander vorübergeführt werden können. Schraube t und Befestigungspunkt m der Feder sind so angeordnet, daß einer Umdrehung der Schraube die Verschiebung der Marke an v um einen Teilstrich der Skala zur Folge hat; die Trommel T der Schraube bildet gleichzeitig den äußeren Deckel des Gehäuses und trägt die Stirnteilung in 100 Teile, welche an einer Marke des Gehäuses abgelesen wird. Da $o\sigma = \frac{1}{5}\, op$ gewählt ist und für die Skala 10 mm in 16 Teile geteilt sind, so entspricht 1^p der Skala $= \frac{5}{8}\, mm$ einer Hebung oder Senkung von b um $\frac{1}{8}\, mm$, so daß man an der Trommel noch Stellungsänderungen von $\frac{1}{800}\, mm$ ablesen kann. Diese Ablesung entspricht aber keineswegs der Millimeterteilung des Quecksilberbarometers und erfordert ebenfalls eine empirische Bezifferung.

Ein starkes Steigen des Luftdruckes bewirkt ein Sinken von b, kann also dem Instrumente nicht schädlich werden, wohl aber ein starkes Fallen, weil dann die Feder mn gegen die Schraube t gepreßt werden kann. Es ist daher gut, diese Schraube namentlich für den Transport stark zu lüften,

* Ein übermäßiges Entfernen der Feder vom Hebel ist dadurch gehemmt, daß sich die Feder in einem Ausschnitte des Säulchens q bewegt, das auf dem Hebel op sitzt.

dann das Instrument umzudrehen, so daß der Hebel *op* mit der Feder *mn* an *t* auffällt. Für die Benutzung wird es dann wieder umgekehrt, die Schraube *t* eingeschraubt, bis sie den Hebel *mn* bewegt, was an der gegenseitigen Verschiebung der beiden Marken kenntlich ist.

Die einfachsten und genauesten sind die Naudetschen; die Goldschmidschen werden meist zu touristischen Zwecken verwendet und erhalten dann an Stelle der Teilung, welche den Luftdruck in *mm* Quecksilber gibt, eine direkte Angabe der Höhen.

Die Naudetschen haben eine ziemlich starke Zeigerbewegung; 1 *mm* Quecksilberdruck erzeugt bei den Aneroiden von gebräuchlicher Größe eine Drehung des Zeigers um fast 2—2½ *mm*. Will man jedoch eine der Ablesung entsprechende Genauigkeit erhalten, so muß auf die Temperatur Rücksicht genommen werden. Die Temperaturkorrektion wird durch Beobachtungen ermittelt.

Die Teilung erstreckt sich gewöhnlich über ein Intervall, das etwa 120—150 *mm* Quecksilber entspricht. Hat man mit einem derartigen Instrumente in größeren Höhen zu beobachten, so reicht die Teilung nicht mehr aus und es muß die Stütze *d* (Fig. 167), welche die Feder *f* hält, verstellt werden. Kommt man in eine bereits hoch gelegene Gegend und hat man in noch größeren Höhen zu beobachten, so wird man gut tun, den Zeiger um etwa 50 oder 100 *mm* zu verstellen. Liegt z. B. die Ausgangsstation in 500 *m* Seehöhe, in welcher der mittlere Barometerstand etwa 715 *mm* ist, so wird man, den Zeiger um 50 *mm* verstellend, einen mittleren Barometerstand von 765 *mm* lesen und hat dann alle abgelesenen Barometerstände um 50 *mm* zu vermindern. Einer Lesung von 680 *mm* wird daher in diesem Falle der wirkliche Stand 630 *mm*, d. h. (ohne Rücksicht auf Barometerschwankungen und Temperaturkorrektion) die Seehöhe von ungefähr 1520 *m* entsprechen.

Besser sind für solche Fälle Barometer, bei denen die Bewegung des Zeigers im ganzen Kreise unbeschränkt ist (nicht durch das an der Skala angebrachte Thermometer behindert), so daß der Zeiger nach einer vollen Umdrehung die Teilung nochmals passieren kann. Nur hat man dann die Teilstriche für diese Stellung des Zeigers mit einer zweiten Bezifferung zu versehen. Sollte eine Verstellung nötig sein, so muß die neue Stellung durch Vergleichung mit einem Standbarometer (Quecksilberbarometer) oder einem Siedethermometer genau ermittelt werden, da unmittelbar nach der Verstellung noch nicht die Ruhelage erreicht ist, daher die Korrektion nicht rund gleich der vorgenommenen Verstellung (50 *mm*) sein wird. Ergibt sich z. B. durch eine Reihe von Vergleichungen durch mehrere Tage diese Korrektion gleich −49·57 *mm*, so ist natürlich diese stets zu verwenden. Man wird aber diese Reduktion erst bei den schließlichen Beobachtungen berücksichtigen und bei den Beobachtungen stets (wie bei allen Arten von Beobachtungen) die Zahl notieren, die man unmittelbar am Instrumente abliest.

58. Das Siedethermometer oder Thermobarometer. Da der Siedepunkt des Wassers vom Luftdrucke abhängt, so wird derselbe in größeren Höhen niedriger sein; wenn man daher ein in Zehntelgrade genau geteiltes Thermometer in einem eigenen Siedegefäße zum Sieden bringt und die

Temperatur des Dampfes bestimmt, so kann man aus dem Siedepunkte den Luftdruck* oder die Höhe bestimmen. Das Siedegefäß Fig. 169 besteht im Prinzipe aus einem Gefäß mit Doppelmantel, so daß die Dämpfe des bei *A* zum Sieden gebrachten Wassers erst durch den äußeren Mantel *B* durchströmen müssen ehe sie durch die Ausströmungsröhren *r* ins Freie gelangen; dadurch schützt er die in *C* befindlichen Dämpfe vor Abkühlung. Das Thermometergefäß *T* ist in diesen Dämpfen und darf nicht ins Wasser hineinragen, da die Temperatur des Wassers noch von seinem Salzgehalte abhängt, die Temperatur des Dampfes jedoch nur vom Luftdruck. Auch die Thermometerröhre selbst soll bis nahe zum Siedpunkt im Gefäße sein, so daß nur ein kurzes Stück zur Ablesung herausragt, damit möglichst das ganze Quecksilber die Temperatur des siedenden Wassers erhält. Die Genauigkeit der Vergleichung ersieht man daraus, daß einer Erniedrigung des Siedepunktes um 0·1° (vgl. die Tafel im Anhange)

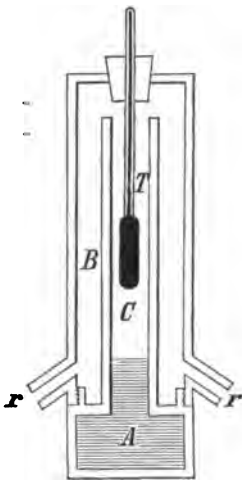


Fig. 169.

bei 88° 90° 92° 94° 96° 98° 100°

eine Änderung des Barometerstandes

um 1·91 2·00 2·12 2·26 2·41 2·57 2·73 *mm*

entspricht. Man muß jedoch hierzu vorzügliche, alte Thermometer nehmen,** da erfahrungsgemäß die Fundamentalpunkte anfänglich etwas sinken und erst nach mehreren Jahren konstant werden.*** Anderseits ist das Verfahren aber immerhin etwas umständlich, weshalb es, namentlich auf Forschungsreisen, d. i. dort, wo man überhaupt keine Quecksilberbarometer zur Vergleichung der Aneroide mitnehmen kann, doch nur zeitweise zur Bestimmung der sogenannten „Standkorrektion" des Aneroids (die Differenz der Lesung gegen den wirklich herrschenden Luftdruck) benutzt wird.

Aneroide selbst sind nur verläßlich, wo es sich um Vergleichung der Höhen mit anderen bereits bekannten handelt, was auf Forschungsreisen nicht der Fall ist. Hartl schließt den hieraus resultierenden Fehler auf 100—150 *m* und auch darüber. Wenn auch diese Zahl vielleicht doch zu

* Auf diese Methode hat schon Fahrenheit (Phil. trcts, Bd. 33, S. 179) hingewiesen; sie scheint jedoch zum erstenmale erst von Wollaston (Phil. trcts für 1817) ausgeführt worden zu sein, der ein in der Nähe des Siedepunktes geteiltes Thermometer verwendete, bei welchem 1° F. = 3·98 engl. Linien, d. i. nahe 12 *mm* betrug. Dieses Intervall war in 100 Teile geteilt und ein Nonius gab noch 0·001° F. (vgl. Schultz-Montanus, „Systematisches Handbuch der gesamten Land- und Erdmessung", Bd. II, S. 326). Weiters wäre hier die verdienstliche Arbeit von J. W. Gintl „Das Höhenmessen mit dem Thermometer", Wien 1835, zu erwähnen.

** Besondere Verdienste um die Konstruktion derartiger genauer Thermometer hat sich bereits Morstadt um 1820 erworben.

*** Übrigens ist auch der bei Siedeversuchen nach längerer Pause erhaltene Siedepunkt etwas zu hoch und erfordert es eines andauernden Siedens durch mehrere Stunden, bis man den sogenannten „maximal deprimierten Siedepunkt" erhält. Vgl. hierfür die unten erwähnte Schrift von Hartl.

hoch gegriffen ist,* so sind die aus bloßen Barometermessungen gefolgerten Höhen doch mit beträchtlichen Ungenauigkeiten behaftet, wenn die Standkorrektion des Aneroids nicht wiederholt ermittelt wird. Auf Forschungsreisen kann dieser Vergleich von Zeit zu Zeit nur mit Siedethermometern geschehen. Aus 17jährigen Vergleichen (1876—1893) kommt Hartl zu dem Schlusse,** „daß die Siedethermometer in Bezug auf Genauigkeit den Reiseheberbarometern mindestens gleichwertig sind", wie dies auch schon Wild, Jordan u. a. fanden. „Das Siedethermometer gehört daher mit zu den unentbehrlichen Ausrüstungsgegenständen eines Forschungsreisenden, der barometrische Höhenmessungen vornehmen will . . ., dazu gehört aber: 1. Daß das zu verwendende Siedethermometer durch eingehende Untersuchungen geprüft und dessen Teilungskorrektion für jedes Skalenintervall ermittelt wurde, welches bei Verwendung des Instruments in Betracht kommt; 2. daß man in jenen Fällen, wo man richtige Luftdruckangaben (nicht nur Luftdruckdifferenzen) benötigt, die Mittel besitzt, den jeweiligen Wert der Standkorrektion des Thermometers durch öftere Vergleiche mit Quecksilberbarometern und Interpolation für die Zwischenzeit mit hinreichender Genauigkeit zu ermitteln."

f) Die Tachymetrie.

59. Im vorhergehenden wurden bereits wiederholt Einrichtungen erwähnt, welche aus dem Bestreben hervorgingen, mit demselben Instrumente möglichst viele Aufgaben zu lösen. Eigene Instrumente, welche dazu dienen sollen, die Horizontalrichtungen, Höhenkoten (das sind die vertikalen Abstände) und Entfernungen gleichzeitig aus demselben Standpunkte, und zwar möglichst schnell, wenn möglich ohne Rechnung zu geben, werden mit dem Namen Schnellmesser oder Tachymeter belegt. Als Porro 1852 in Mailand und Moinot 1865 in Paris diese Methode gleichzeitiger Ermittlung dreier Koordinaten als Celerimensura, später Tacheometrie genannt, beziehungsweise Levés des plans à la Stadia*** als eine neue, bedeutsame Entdeckung auf dem Gebiete der Vermessungskunde publizierte, wurde dieselbe mit großem Beifall aufgenommen und erst Bauernfeind machte darauf aufmerksam, daß diese Methoden lange vorher in Bayern — und ebenso mag es wohl auch anderwärts gewesen sein — ohne Einführung eines

* Ich führe hier einige Zahlen an, welche ich im Sommer 1903 im Salzkammergute gelegentlich erhielt, wobei das Aneroid zweimal verstellt wurde, die Standkorrektion nur durch Vergleichung mit einem Heberbarometer vorgenommen werden konnte und Temperaturreduktionen nicht vorgenommen wurden (als Höhenvergleichskoten dienten die Angaben der Generalstabskarte):

		Höhe	Berechnete Höhe	Korrektion
1903, August 17.:	Reinfalzalm	1020 *m*	1004 *m*	+16 *m*
September 1.:	„	1020 *m*	999 *m*	+21 *m*
„ 2.:	Siriuskogel	598 *m*	579 *m*	+19 *m*
„ 5.:	Predigtstuhl	1276 *m*	1241 *m*	+35 *m*
„ 6.:	Schafbergspitze	1780 *m*	1776 *m*	+4 *m*

** Hartl, „Vergleiche von Quecksilberbarometern mit Siedethermometern." Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, Bd. XII, S. 58.

*** J. Moinot, „Levés des plans à la Stadia, Périgueux 1865", hat aber auch bereits ein anallatisches Rohr nach Porro. Der Name „Stadia" bedeutet italienisch „die Latte".

eigenen Namens eingebürgert waren.* Die besondere Vorliebe für etwas angeblich neues, namentlich wenn es sich unter einem vielversprechenden Namen darbietet, scheint in der niederen Geodäsie jedenfalls eine größere Rolle als in anderen Zweigen der angewandten Mathematik zu spielen. Jedes Universalinstrument mit einem distanzmessenden Fernrohr, mit einem an diesem anzubringenden Niveau und einer Orientierungsbussole am Horizontalkreis ist ein vollkommen brauchbares Tachymeter. Allerdings wird es in dem Maße, als es seinem Namen gerecht werden soll und zum schnellen Beobachten, namentlich aber zur Ersparung jeder Rechnung dienen soll, minder genaue Resultate geben.

Das Instrument von Porro hatte auch tatsächlich geteilte Kreise, die aber sehr klein und in einem Würfel verborgen waren (daher Klepszykel oder kürzer Kleps genannt) und mikroskopisch abgelesen wurden, einen anallatischen Distanzmesser, jedoch mit mehreren Fäden und wegen der Kleinheit des Gesichtsfeldes ein mehrteiliges sogenanntes Argusokular.**

Die weiteren Umwandlungen, welchen das Instrument behufs Umgehung der Rechnung unterworfen wurde, sind sehr mannigfaltig. Sei O (Fig. 170) der Beobachtungspunkt, P der anvisierte Punkt, so gibt die Messung der

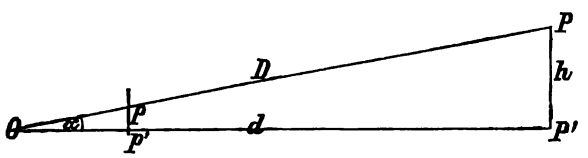


Fig. 170.

Horizontalwinkel beziehungsweise des Azimuts seine Richtung, der Distanzmesser seine Entfernung D und aus dem gemessenen Höhenwinkel lassen sich die Höhe h und die Horizontaldistanz d trigonometrisch bestimmen. Es ist

$$d = D \cos \alpha; \quad h = D \sin \alpha.$$

D selbst ist, wie in Nr. 41 gezeigt wurde, von der Länge g des Lattenabschnittes und je nach der Stellung der Latte auch von dem Neigungswinkel der Latte gegen die Visur, daher bei lotrechter Latte von der Neigung α der Visur gegen den Horizont abhängig. Ganz allgemein wird dann

$$d = C.A.g, \quad h = C.B.g,$$

wobei C eine Konstante ist, die von der Entfernung der Fäden abhängt und A, B zwei Faktoren bedeuten, die nur vom Neigungswinkel α abhängig

---

* Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, Bd. I, S. 495. Interessant ist auch die Bemerkung von Netto in seinem „Lehrbuch des Aufnehmens mit dem Meßtisch", Berlin 1822, S. 196. „Ferner habe ich das Diopterfernrohr mit einer Vorrichtung zum Nivellieren und einer besonderen Teilung versehen, die bei Höhenmessungen die trigonometrische Berechnung erspart und durch eine einfache Multiplikation die Höhe gibt." Worin diese Einrichtung bestand, wird aber nicht auseinandergesetzt.

** Eine Beschreibung des Klepszykels s. C. Werner, „Die Tacheometrie und deren Anwendung auf Tracestudien, Wien 1883", Fig. 16.

sind. Die Distanz der Fäden wird gewöhnlich so genommen, daß $C = 100$ wird und dann ist

$$d = A\,(100\,.\,g); \quad h = B\,.\,(100\,g),$$

wo 100 g der in Metern ausgedrückte Lattenabschnitt in Zentimetern ist. Um die Rechnung zu vereinfachen, wurden Tafeln konstruiert, welche den Wert von A und B (oder gleich $A_0 = \log A$ und $B_0 = \log B$) für die aufeinanderfolgenden Werte von α geben.*

Beispiel: Für ein Instrument mit der Konstante $C = 100$ sei der gelesene Höhenwinkel $\alpha = 22° 24'$ und bei vertikal gestellter Latte der Lattenabschnitt $g = 124{\cdot}6$ *cm*. Für den angegebenen Höhenwinkel findet man durch Rechnung oder aus den Tafeln

$$A = 0{\cdot}8582 \qquad B = 0{\cdot}3537$$
$$A_0 = \log A = 9{\cdot}9336 \quad B_0 = \log B = 9{\cdot}5487,$$

damit wird

$$d = 0{\cdot}8582 \times 124{\cdot}6 = 106{\cdot}9\ m; \quad h = 0{\cdot}3537 \times 124{\cdot}6 = 44{\cdot}1\ m.$$

Für die Multiplikation kann man sich des logarithmischen Rechenschiebers bedienen. Zwei Maßstäbe A und B (Fig. 171), welche z. B. in *mm* geteilt sind, tragen bei 30 *mm* = 0·30 *dm*, 48 *mm* = 0·48 *dm* usw. die Zahlen 1, 2 . . .; allgemein bei den

Teilstrichen $T = 0{\cdot}000,\ 0{\cdot}301,\ 0{\cdot}477,\ 0{\cdot}602,\ 0{\cdot}699,\ 0{\cdot}778\ \ldots$
die Zahlen $Z = \quad 1 \quad\ 2 \quad\ 3 \quad\ 4 \quad\ 5 \quad\ 6 \quad \ldots$

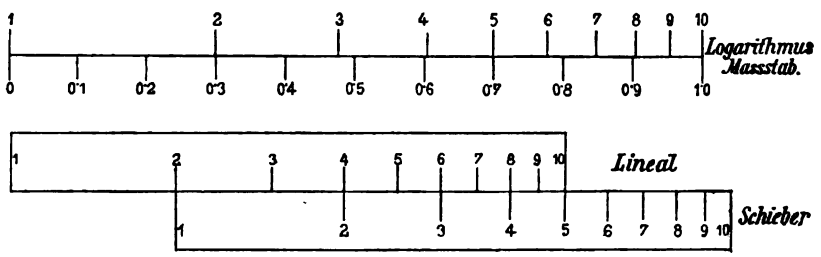


Fig. 171.

Wie man sieht, ist $T = \log Z$, d. h. die Abstände vom Anfangspunkte der Teilung sind die Logarithmen der an dieser Stelle stehenden Zahlen. Schiebt man den zweiten Maßstab (den Schieber) nach rechts, bis sein Anfangspunkt zur Zahl $Z = 2$ des ersten Maßstabes (Lineal) kommt, so wird die Zahl $Z_1 = 4$ des Schiebers auf den Punkt $Z = 8$ des Lineals fallen. Denn vom Anfangspunkte des Lineals bis zum Punkte $Z = 2$ sind 0·301, von hier (Anfangspunkt des Schiebers) bis zu dessen Punkt $Z_1 = 4$ sind 0·602 *dm*; die Länge der beiden Strecken zusammen ist daher $0{\cdot}301 + 0{\cdot}602 = 0{\cdot}903$ vom Anfangspunkte des Lineals; dort steht aber die Zahl $Z_1 = 8$.

* G. Starke, „Logarithmisch-tachymetrische Tafeln für den Gebrauch der logarithmischen Tachymeter, Wien 1885"; Louis Pons, „Tables tachéometriques, donnant aussi rapidement que la règle logarithmique tous les calcules nécessaires à l'emploi du tachéomètre, Paris 1891".

Hat man allgemein das Produkt ab zu bilden, so sucht man die Zahl $Z = a$ am Lineal auf; bis dahin sind $T = (\log a)$ Einheiten, legt man dort den Endpunkt des Schiebers auf und sucht die Zahl $Z_1 = b$ auf diesem, so liegt diese um $T_1 = (\log b)$ Einheiten weiter als der Anfangspunkt des Schiebers, daher um $T + T_1 = \log a + \log b$ Einheiten vom Anfangspunkte des Lineals entfernt. Da aber $\log a + \log b = \log ab$ ist, so steht dort am Lineal die Zahl ab. Natürlich kann der Schieber auch zur Division verwendet werden. Will man $m : n$ bilden, so sucht man am Lineal m, am Schieber n auf, bringt diese Zahlen zur Koinzidenz und sieht nach, wo der Anfangspunkt des Schiebers hinfällt. Z. B. 10 : 5, wird 10 am Lineal, 5 am Schieber zur Koinzidenz gebracht; man findet den Anfangspunkt des Schiebers bei 2 des Lineals, dies der Quotient. Oder man sucht m und n auf dem Lineal auf, bringt den Anfangspunkt des Schiebers nach n und sieht nach, welche Zahl des Schiebers mit der Zahl m des Lineales koinzidiert; z. B. 10 : 2, wird 10 und 2 am Lineal aufgesucht, der Anfangspunkt des Schiebers auf 2 gestellt; der Zahl 10 des Lineals entspricht 5 des Schiebers; dies der Quotient.

Denselben Vorteil gewährt die logarithmische Latte (Fig. 172). Bei ihr sind umgekehrt an den Teilpunkten 1, 2, 3 . . . deren Logarithmen angeschrieben. Die Latte gibt rechts Dezimeter, die linke Teilung beginnt daher mit 1·0 beim ersten Dezimeter = 10 *cm*, hat 2·0, angedeutet durch zwei Punkte, beim zehnten Dezimeter = 100 *cm* usw. (die Bezifferung umgekehrt, da sie im umkehrenden Fernrohre betrachtet wird). Der Lattenabschnitt muß hier stets vom Nullpunkt der Latte, der 1 *dm* höher als der Teilpunkt 1·0 liegt, genommen werden. Ist der abgelesene Lattenabschnitt λ ($\lambda = \log$ Lattenabschnitt), so wird

$$\log d = \log A + \lambda, \qquad \log h = \log B + \lambda,$$

oder

$$\log d = A_0 + \lambda, \qquad \log h = B_0 + \lambda$$

erhalten.

Die Rechnung kann noch in anderer Weise umgangen werden: Bringt man an dem in O (Fig. 170) aufgestellten Instrumente drei mit derselben Teilung (z. B. Zentimeter) versehene Maßstäbe Op, Op', $p'p$ an ($p'p \perp Op'$), so entsteht ein dem Dreiecke OPP' der Natur ähnliches Dreieck Opp'; sucht man die am Distanzmesser erhobene Distanz OP in Metern auf dem Zentimetermaßstabe Op auf, schiebt den Schieber pp' an, während das Fernrohr noch auf P eingestellt ist, so geben die an den Maßstäben Op', pp' abgelesenen Zentimeter sofort die Horizontaldistanz OP' und die Erhebung $P'P$ in Metern. Nach diesem Prinzip ist das Tachymeter von Kreuter konstruiert.* Die Teilung des Fernrohrmaßstabes A (Fig. 173) beginnt an

---

* „Das neue Tacheometer aus dem Reichenbachschen mathematisch-mechanischen Institute von T. Ertel und Sohn in München, von Fr. Kreuter, Brünn 1876." Eine diesem ähnliche an einem Meßtisch angebrachte Einrichtung, bestehend aus drei Linealen, von denen das eine horizontal, das zweite vertikal, das dritte schräg in eine bestimmte Visur gebracht werden konnte, beschreibt Daniel Schwendter „Geometricae practicae novae et auctae tractatus, Nürnberg," im dritten Traktatus S. 4; seine Anwendung auf die Höhenmessung, ebenda S. 40.

der Drehungsachse des Fernrohrs; der Horizontalmaßstab B ist mit der senkrecht dazu gestellten Stange aus einem Stück

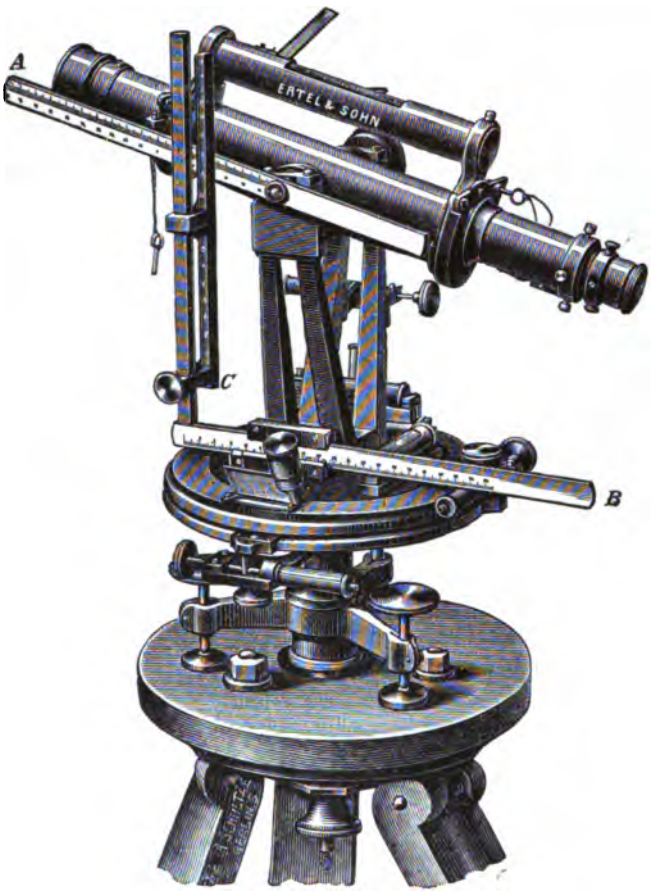


Fig. 173.

gearbeitet und die Bezifferung von B geht von der Vertikalstange aus nach rechts und ist derart, daß, wenn der Fernrohrmaßstab horizontal ist, an beiden Maßstäben dieselbe Lesung erfolgt. Bei schiefer Stellung des Fernrohrs ist demnach die an B gemachte Lesung die Projektion der an A gemachten. Der mit B verbundene vertikale Stab trägt den Maßstab C, welcher bei paralleler Lage von A und B die Lesung 0 gibt, demnach bei geneigter Stellung sofort die Höhe pp', also die Erhebung des anvisierten Punktes im verjüngten Maße. Ein Vertikalkreis ist daher bei diesem Instrumente entbehrlich.*

Fig. 172.

* Die Zahl der im Laufe der Zeit konstruierten und mit den verschiedensten Namen belegten Tachymeter ist außerordentlich groß. Man vergleiche hierüber A. Laussedat, Recherches, Bd. I, S. 199 ff.

Eine etwas kompliziertere Form, bei der auch auf die Konstante $\frac{1}{2}f$ (S. 88) Rücksicht genommen ist, hat neuerdings Breithaupt gewählt.*

In anderer Weise ist die Aufgabe bei den neuen Tachymetern von Tichy und Starke gelöst. Schreibt man

$A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{1}{b}$, $\log a = a_0$, $\log b = b_0$, also $a_0 = -A_0$, $b_0 = -B_0$,

so wird

$$d = C\frac{g}{a}; \quad h = C\frac{g}{b}; \quad \log d = \lambda - a_0; \quad \log h = \lambda - b_0.$$

Für das obige Beispiel wäre

$$a = \frac{1}{0{\cdot}8582} = 1{\cdot}165; \quad b = \frac{1}{0{\cdot}3537} = 2{\cdot}827;$$

$$a_0 = \log a = 0{\cdot}0664; \quad b_0 = \log b = 0{\cdot}4513.$$

Bei dem Tachymeter von Tichy und Starke trägt der Vertikalkreis nebst der gewöhnlichen Gradteilung, die sich nur über einen Quadranten zu beiden Seiten des oberen Nonius (Fig. 174) erstreckt, noch zwei andere Teilungen, die zweite an dem einen seitlichen Nonius gibt für jeden Winkel α, d. h. zu jeder Einstellung sofort den Wert von a_0, die dritte an dem andern seitlichen Nonius gibt ebenso den Wert von b_0. Die Lesung hat natürlich geradeso wie die Winkel α selbst bei einspielender Alhidadenlibelle zu erfolgen, denn die Werte a_0 und b_0 sind jene, welche der bei einspielender Libelle gemachten Lesung von α entsprechen. Die Bezeichnung der Werte a_0 und b_0 ist derart, daß die Charakteristik des Logarithmus, die stets Null ist, weggelassen ist und der Teilung die drei ersten Dezimalen entnommen werden (wobei aber die dritte Dezimale nur bis 0·03 ersichtlich, von da ab zu schätzen ist). Für das obige Beispiel würde man ablesen 066 und 451, entsprechend den Logarithmen 0·066 und 0·451. Unter Anwendung der logarithmischen Latte, welche die Lesung $\lambda = 2{\cdot}0955$ (entsprechend der Lattenlänge $g = 124{\cdot}6$ *cm*) geben würde, erhielte man

$$\log d = 2{\cdot}095 - 0{\cdot}066; \quad \log h = 2{\cdot}095 - 0{\cdot}451.$$

Man kann den Vorgang noch anders vereinfachen. Denkt man sich an einer gleichmäßig geteilten Latte den Lattenabschnitt L gelesen, welcher dem Abstande A Revolutionen der Mikrometerschraube entspricht, so wird einer Revolution der Lattenabschnitt $g = \frac{L}{A}$ entsprechen. Wählt man nun für den konstanten Lattenabschnitt denjenigen, welcher sich im Fernrohre zwischen zwei Fäden darstellen würde, welche um 1^R voneinander abstehen, so wäre in der Formel für d dieser Wert von g einzuführen und man erhielte dann $d = CA.\frac{L}{A} = CL$, wenn man die Meßschraube auf jenen Wert A^R einstellt, welcher durch den zum Höhenwinkel α gehörigen Wert

* Der Puller-Breithauptsche Schnellmesser, ein Schiebetachymeter für lotrechte Lattenstellung, Kassel 1902. Von anderen ist z. B. Wagners Tachygraphometer nichts anderes als eine Verbindung des Tachymeters mit dem Meßtische.

von A gegeben ist. Desgleichen wäre wenn L' der Lattenabschnitt ist, welcher zwischen den Fäden erscheint, wenn die Schraube auf B^R gestellt

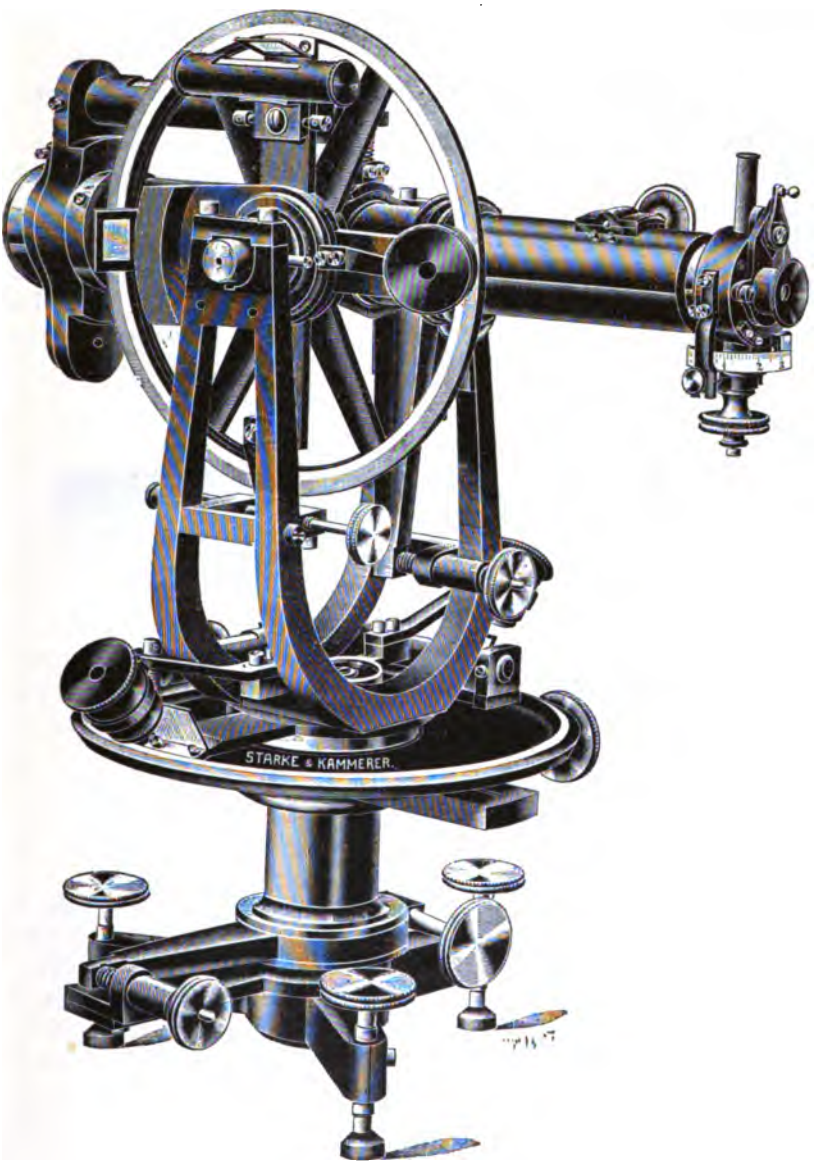


Fig. 174.

ist, $g = L' : B'$ und $h = CL'$.* In der Praxis wird man daher so verfahren,

* Gehört die Konstante $C = 100$ zu einem Intervall $= \rho^R$, so wird, wie man leicht sieht, $g = \rho \frac{L}{A'}$, $g = \rho \frac{L'}{B'}$, daher wird dann $d = (\rho\, C)\, L$; $h = (\rho\, C)\, L'$; für $C = 100$, $\rho = 5$ wäre $d = 500\, L$, $h = 500\, L'$.

daß der Höhenkreis nebst einer Teilung für den Höhenwinkel α noch die beiden zu den Höhenwinkeln gehörigen Werte von A und B gibt, dann stellt man die Meßschraube auf A und liest den Lattenabschnitt L, nachher auf B und liest den Lattenabschnitt L', welche unmittelbar d und h geben.

g) Instrumente zum Einzeichnen der Aufnahmen.

60. Punkte werden durch kleine Kreise bezeichnet. Sollten an demselben mehrere Linien gezeichnet werden, so wird das Anlegen durch feine Pikiernadeln oder Anschlagnadeln erleichtert, welche normal zur Zeichnungsfläche eingestochen werden. Zum Einzeichnen der durch Rechnung bestimmten oder mit dem Distanzmesser ermittelten Horizontaldistanzen im verjüngten Maße dienen die Transversalmaßstäbe (Fig. 43). Die Längen werden mittels eines gewöhnlichen Zirkels oder mittels des Stangenzirkels

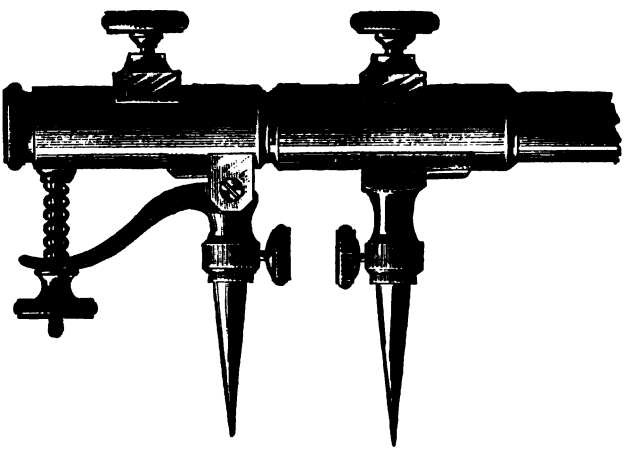


Fig. 175.

(Fig. 175) übertragen. Für genaue Messungen muß die eine Zirkelspitze durch eine Schraube verstellbar sein, wie dies in Fig. 175 ersichtlich ist.

Zum Übertragen von Winkeln dient der Transporteur (Fig. 176). Der Mittelpunkt ist durch ein auf einer Glasplatte eingeritztes Kreuz bezeichnet, die Richtung des einen Schenkels ist an den Enden des Halbkreises durch zwei feine Striche markiert, mit welchen die Nullpunkte der beiden von 0 bis 180° fortschreitenden Teilungen zusammenfallen. Der bewegliche Arm, welcher mittels eines Nonius an der Kreisteilung auf den gewünschten Teilstrich eingestellt wird, trägt ein langes Lineal, längs dessen der zweite gesuchte Schenkel des Winkels gezogen wird.

Zur Erreichung einer größeren Genauigkeit hat Hartl den Rolltransporteur* konstruiert. An einem entsprechend langen Arme A (Fig. 177), der an einem Endpunkte zentrisch über den Winkelscheitel aufgesetzt und

* H. Hartl, „Die Landesvermessung in Griechenland", Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, Bd. XII.

um diesen Punkt gedreht wird, befindet sich auf der anderen Seite eine Rolle, welche sich beim Drehen des Armes auf dem Papiere als Kreislinie abwickelt. Für die Länge 1 des Radius ist die Länge des Bogens von 1° gleich 0·017; hat also der Arm 30 *cm* Länge, so würde 1° einem Bogen

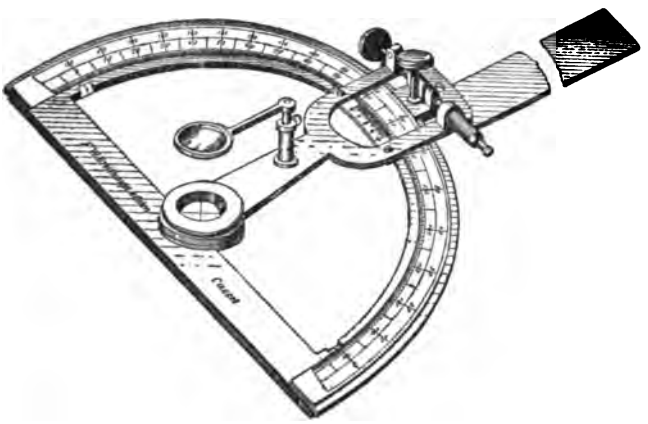


Fig. 176.

von 0·51 *cm* entsprechen. Wäre daher der Umfang der Rolle 5·1 *cm* (Durchmesser etwa 1·63 *cm*), so würde bei einer ganzen Drehung der Rolle am Papiere diese sich um 10° aus ihrer ursprünglichen Lage gedreht haben; ist die Rolle in 100 Teile geteilt, so entspricht 1 Teil $= \frac{1}{10}°$ und kann man noch an einem Nonius Sechstel von diesen Teilen erhalten, so gibt

Fig. 177.

dieser Nonius Sechzigstelgrade d. h. Minuten. Die Zahl der vollen Umdrehungen, d. i. die Zehner der Grade werden an einer zweiten Rolle, die nicht auf dem Papiere aufliegt sondern durch eine Zahnradübersetzung von der ersten Rolle bewegt wird, abgelesen. Um einen Teilstrich genau gleich 1′ ($1^R = 10°$) zu machen, kann natürlich nicht der Umfang des Rades, wohl aber die Länge des Lineals geändert werden. Ist der Wert eines Teilstriches an der Trommel zu groß, so braucht man nur das Lineal etwas zu verlängern und umgekehrt muß dasselbe verkürzt werden, wenn sich herausstellt, daß der Wert eines Teiles zu klein ist. Diese Änderung der Länge wird bei *A*

vorgenommen, indem hier der die Rolle tragende (linke) Teil an dem auf den Winkelscheitel aufzulegenden (rechten) Teile verschiebbar ist. Bei A ist auch in dem Ausschnitte zwischen den beiden Schienen des fixen Armes eine auf das Papier herabreichende Marke sichtbar, welche auf den Anfangsschenkel des Winkels gelegt wird und an welcher nach der abgeschlossenen Drehung, welche an der Trommel abgelesen wurde, die Marke für den Endschenkel gemacht wird.

Einfacher und ebenso genau ist die Übertragung der Winkel mittels einer Sehnentafel; man entnimmt derselben den Wert der Sehne (für den Halbmesser 1) für den gesuchten Winkel und multipliziert ihn mit dem angenommenen Kreishalbmesser. Ist O (Fig. 178) der Mittelpunkt, OA der eine Schenkel des Winkels und sei dieser z. B. 35° 26·7′, so entnimmt man der Tafel die zugehörige Sehne für den Halbmesser 1 gleich 0·6088; beschreibt man daher mit dem Halbmesser = 10 *cm* den Bogen Ax, nimmt die diesem Halbmesser entsprechende Sehnenlänge $10 \times 0{\cdot}6088 = 6{\cdot}088$ *cm* in den Zirkel, durchschneidet mit derselben in B, so ist BOA der gesuchte Winkel. Je größer man den Halbmesser OA des Bogens nimmt, desto genauer wird der Winkel erhalten.*

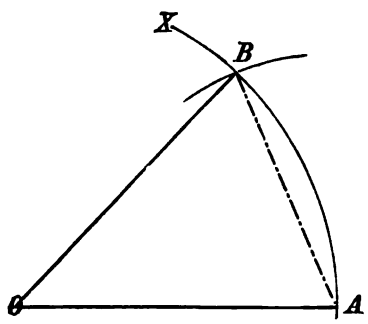


Fig. 178.

Die Übertragungen geschehen mit einem Stangenzirkel mit mikrometrischer Bewegung einer Spitze und Lupen an beiden Enden.

Zum Zeichnen dient ein Reißbrett, das mit Zeichenpapier bespannt wird; um dasselbe straff zu spannen, wird es auf der dem Brette anliegenden Seite mit Wasser befeuchtet, wodurch es sich etwas dehnt und dann an den Rändern mit arabischem Gummi befestigt. Luftblasen, die zwischen Papier und Zeichenbrett haften, müssen durch Streichen von der Mitte gegen den Rand zu entfernt werden; sollte das Papier nicht gleichmäßig gedehnt sein, so muß es dort, wo es zu wenig gedehnt ist und daher vom Brette absteht, was namentlich oft an den Ecken vorkommt, noch etwas befeuchtet werden. Manche befeuchten es auf beiden Seiten, was bei gut geleimten Papieren vorteilhaft ist; meist wird es durch Bestreichen mit etwas schwacher Eiweislösung an der dem Brette anliegenden Seite zum schwachen Haften an demselben gebracht.

61. Der Meßtisch. Wird das Zeichenbrett horizontal so an einem Dreifuß befestigt, daß irgend ein beliebiger Punkt desselben vertikal über einen Punkt des Feldes gebracht werden kann, so entsteht der Meßtisch. Auf diesem werden aber nicht die mit Winkelmeßinstrumenten beobachteten

* Eine Sehnentafel für den Halbmesser 500 gibt hiefür z. B. Netto in seinem „Lehrbuch des Aufnehmens mit dem Meßtisch und Anleitung zur Lösung trigonometrischer Aufgaben", Berlin 1822, S. 78—111. Man kann dazu natürlich jede Tafel der natürlichen Sinus verwenden, welche aber jetzt nur mehr selten den Logarithmentafeln beigegeben werden. Es ist daher im Anhange eine solche hinzugefügt.

Winkel übertragen, sondern direkt die Linien durch Anlegen eines Lineals in der betreffenden Richtung und Einzeichnen derselben, erhalten. Zum Meßtisch gehört daher ein Lineal, über welches visiert werden kann, das Diopterlineal oder Kippregel, Perspektivlineal und eine Vorrichtung, um einen Punkt desselben über einen Punkt des Feldes zu bringen, die bereits beschriebene Lotgabel; überdies eine Bussole, um den Tisch richtig zu orientieren.

Der Meßtisch, Mensula Praetoriana,* von Joh. Praetorius angegeben, ist ein Zeichenbrett, das auf einem Stativ verschiebbar (ursprünglich durch ein sogenanntes Schiebekreuz) und drehbar befestigt sein muß.** Fig. 179 zeigt den älteren Krafftschen Meßtisch, der nach den Angaben von Winkler v. Brückenbrand konstruiert wurde, von unten gesehen. Der Zentralzapfen

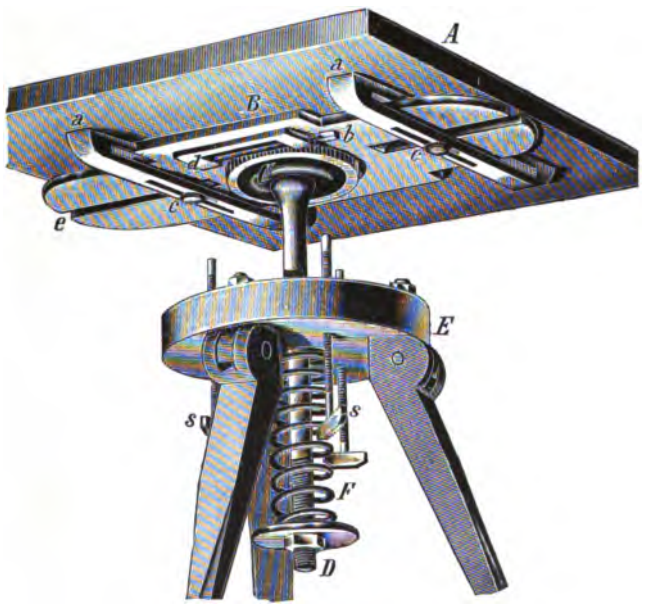


Fig. 179.

trägt ein Nußgelenk, dessen Lager in einem Brette liegt, das mittels einer Schraube ohne Ende um den Zapfen drehbar, auf der Platte *B* ruht, welche

* Daniel Schwendter, „Geometricae practicae novae et auctae tractatus", Nürnberg s. a., nennt im Traktatus III den Meßtisch die „Mensula Praetoriana". Er beschreibt denselben mit Kompaß und Diopterlineal (überdies mit einer dem Kreuterschen Tachymeter ähnlichen Einrichtung) und gibt im Traktatus IV eine Art Distanzmesser (vgl. S. 85).

** Der von Netto (Lehrbuch des Aufnehmens mit dem Meßtisch, Berlin 1822) beschriebene, damals bei der sächsischen Landesaufnahme verwendete „Lehmannsche Meßtisch" hat nur eine drehende Bewegung um einen Zentralzapfen, Feinbewegung mittels Schraube ohne Ende, aber kein Schiebekreuz; ebenso der von Joh. Tob. Mayer in seinem „Gründlichen und ausführlichen Unterricht zur praktischen Geometrie", 2. Aufl., Göttingen 1792, beschriebene. Hingegen hatte der Marinonische Meßtisch „De re ichnographica cujus hodierna praxis exponitur, Viennae 1751" das Tischblatt drehbar und in Nuten verschiebbar, eine für die damalige Zeit wohl überflüssige Genauigkeit. „Im Grunde

in zwei aufeinander senkrechten Richtungen in den Ausschnitten der Leisten *a* verschiebbar ist. Diese tragen das eigentliche Brett, das aus hartem Holze, am besten aus zwei Lagen mit in normaler Richtung sich kreuzender Faserung, angefertigt ist. Ein Punkt des Brettes wird mit der Lotgabel über den korrespondierenden Punkt des Feldes gebracht und eine Linie desselben durch eine Visur oder die Nord-Süd-Richtung mittels der Orientierungsbussole in die richtige Lage gebracht. Wird im Anfange der Arbeit der Tisch so lange gedreht, bis die Nadel im Kästchen einspielt, und in dieser Richtung eine Linie gezogen (zu welchem Zwecke die Orientierungsbussole häufig an der Kippregel angebracht ist [Fig. 185]), so kann in einem andern Punkte die Bussole wieder an diese Linie gelegt und nunmehr das Brett so lange gedreht werden, bis die Nadel einspielt. Ist das Brett orientiert, so wird die Zentralschraube schwach angezogen und der Tisch durch die drei Stellschrauben *s* mittels einer Libelle horizontal gestellt, schließlich wird die Zentralschraube fest angezogen.*

Bei dem Meßtisch von Starke und Kammerer (Fig. 180) ruht das Zeichenbrett auf der Wendescheibe deren Einrichtung zum Drehen ganz analog derjenigen bei Winkelmeßinstrumenten (Klemme und Feinbewegung) ist. Zur Verschiebung kommt die Tischplatte mit drei Zapfen in die großen kreisförmigen Löcher der Wendescheibe und wird hier erst dann festgeklemmt, wenn der Meßtischpunkt richtig über den Feldpunkt gestellt ist.

Die Meßtischplatte selbst besteht aus zwei nahe übereinanderliegenden Platten *A, B* (Fig. 181), welche durch seitliche Leisten verbunden sind. In dem sehr flachen prismatischen Hohlraume sind Plättchen *a*, welche die erwähnten Zapfen tragen, die in die Löcher der Wendescheibe *C* kommen. Dadurch wird erreicht, daß nur die untere Platte angepreßt wird und daher die obere Platte mit dem Zeichenblatt vor Verspannungen geschützt bleibt.

---

scheint mir die dazugehörige Vorrichtung etwas zusammengesetzt, ... durch gehörige Verrückung der Beine des Stativs läßt sich diese Absicht immer mit hinreichender Genauigkeit erreichen" sagt J. T. Mayer l. c., Bd. I, S. 413.

Brander, „Der neue geometrische Universalmeßtisch, Augsburg 1772", hatte eine Einrichtung zum Messen von Horizontalwinkeln beigegeben, denselben überdies durch einen seitlich angebrachten Höhenkreis zum Höhenmesser eingerichtet (J. T. Mayer, ebenda, S. 414). Ein „verbesserter Meßtisch für Freunde der praktischen Geometrie, Frankfurt und Leipzig 1789", wurde von einem ungenannten Verfasser mit Verschiebung des Tischblattes und Drehung mittels Schraube ohne Ende eingerichtet.

Wie unvollkommene Meßtische noch im Anfange des XIX. Jahrhunderts auftreten, geht z. B. aus Schultz-Montanus „Systematisches Handbuch der gesamten Land- und Erdmessung und ebener und sphärischer Trigonometrie, auch Beschreibung der neueren brauchbaren Meßinstrumente, Berlin 1819", hervor, der zwei Meßtische beschreibt, von denen dem einen „die Vorrichtungen fehlen, um einen Punkt oder eine Linie auf dem Meßtisch über einen gleichnamigen Punkt oder eine gleichnamige Linie auf dem Felde zu orientieren" (S. 177), dem zweiten hingegen „geht eine andere gute Vorrichtung ab, nämlich die zum Horizontalstellen" (S. 180), von denen beiden er aber behauptet, daß sie „jeder unparteiische für die natürlichsten und brauchbarsten halten wird" (S. 173).

Im Gegensatze hierzu führte aber schon 1825 Bodin beim Meßtisch die sphärische Kalotte ein, welche früher, (Fig. 25) beschrieben wurde.

* Die grobe Orientierung muß vor dem Aufsetzen des Brettes auf die Stellschrauben erfolgen, damit die Bewegung der Schraube ohne Ende nicht durch letztere behindert wird.

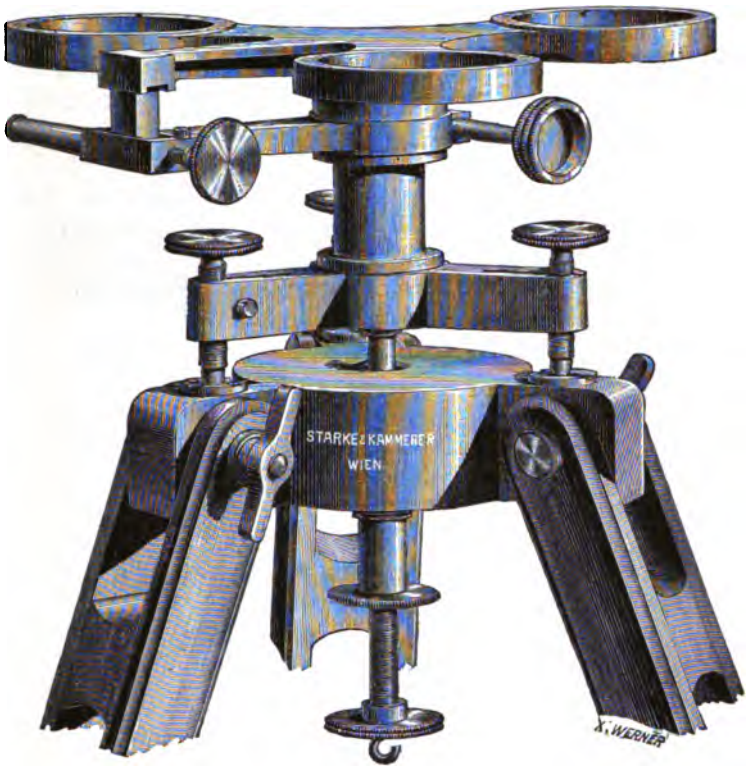


Fig. 180.

Fig. 181.

Fig. 182.

Der Bauernfeindsche Meßtisch, welcher aus dem Geyerschen hervorging,* unterscheidet sich im wesentlichen von diesem durch die seitliche Verschiebung. Der Dreifuß steht nicht unmittelbar auf dem Stativ, sondern auf einem gußeisernen Untersatz (Fig. 182), der vollständig eben geschliffen auf der ebenfalls eben geschliffenen Kopfplatte des Stativs ruht; die Kopfplatte hat einen genügend großen Ausschnitt, um

* Bauernfeind, „Elemente der Vermessungskunde", Bd. I, S. 240.

bei dieser Verschiebung dem Zentralzapfen des Meßtisches kein Hindernis darzubieten. Beim Bauernfeindschen Meßtisch geschieht aber die Verschiebung nicht mit freier Hand, sondern der mittlere Teil des Untersatzes ist wesentlich breiter und wird durch drei gegen ihn wirkende Schrauben, deren Muttern auf dem Stativkopfe befestigt sind, bewegt.

62. Diopterlineal, Kippregel. Jedes Lineal, das mit einer Visiervorrichtung versehen ist, kann zum Zeichnen von Richtungen auf dem Meßtisch verwendet werden, nur muß die Visierlinie normal über der Linealkante, jedenfalls in einer zu derselben parallelen Vertikalebene liegen. Die älteste Einrichtung dieser Art ist das Diopterlineal (Fig. 30).* Wird das Diopter durch ein Fernrohr ersetzt, dessen Kollimationslinie natürlich wieder parallel über der Linealkante liegen muß, und wird das Fernrohr um eine horizontale Achse drehbar eingerichtet, so entsteht das Lineal mit kippbarem Fernrohr, die Kippregel

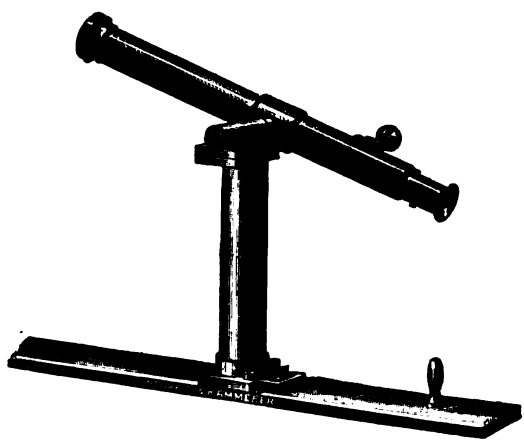


Fig. 183.

oder Perspektivlineal (eigentlich Fernrohrlineal). Ein solches einfachster Konstruktion zeigt Fig. 183; eine Handhabe dient zur Bewegung des Lineals; Säule mit Fernrohr sind stets rektifizierbar an dem Lineal aufgesetzt, indem

* Netto (Lehrbuch des Aufnehmens mit dem Meßtisch, Berlin 1822) beschreibt ein solches Lineal, bei welchem die Diopter nicht auf dem Lineal selbst sind, sondern an einer prismatischen mit dem Lineale parallelen Stange getragen werden, welche an einer Säule in einer zur Zeichnungsfläche senkrechten Ebene gekippt werden kann, daher der Name Kippregel (S. 32). Dagegen hatte schon Brander (Der neue geometrische Universalmeßtisch, Augsburg 1772) statt der Diopter ein Fernrohr mit Glasmikrometer (Joh. Tob. Mayer Gründlicher und ausführlicher Unterricht in der praktischen Geometrie, Göttingen 1792, Bd. I, S. 414); dieses war aber nicht zum Kippen. Ebenso beschreibt J. L. Hogreve, „Praktische Anweisung zum planimetrischen Vermessen der Feldmarken und wie davon die Karten auszuarbeiten, zu berechnen und die Vermeßregeln einzurichten sind, Hannover 1797", ein Diopterlineal ohne Kippvorrichtung (S. 38), aber mit Orientierungsbussole; auch das von ihm beschriebene Astrolabium (ebenda S. 31) ist ein in halbe Grade geteilter Transporteur, der mittels Nonius noch Minuten geben sollte, im Mittelpunkte ein in horizontaler Linie drehbares nicht kippbares „Diopterlineal mit Fernrohr", in dessen Brennpunkt „ein dünn geschliffenes Glas mit einem Kreuzschnitt" durch Schräubchen rektifizierbar".

die an der Säule befestigten Leisten mittels zweier Schrauben (σ_1 σ_2 Fig. 184*b*), welche gegen die am Lineale feste Nase *p* drücken, am Lineale verschiebbar, die vertikale Säule und damit das Fernrohr so lange zu drehen gestatten, bis die Visur parallel zur Linealkante liegt. In dieser Lage werden erst die Fixierungsschrauben angezogen. In Fig. 184*a* wird diese Parallelstellung dadurch erzielt, daß die Säule bei gelüfteten Schräubchen σ_1, σ_2 um σ gedreht werden kann, weshalb σ_1, σ_2 durch Schlitze gehen. Fig. 184 *c*, *d*, *e*

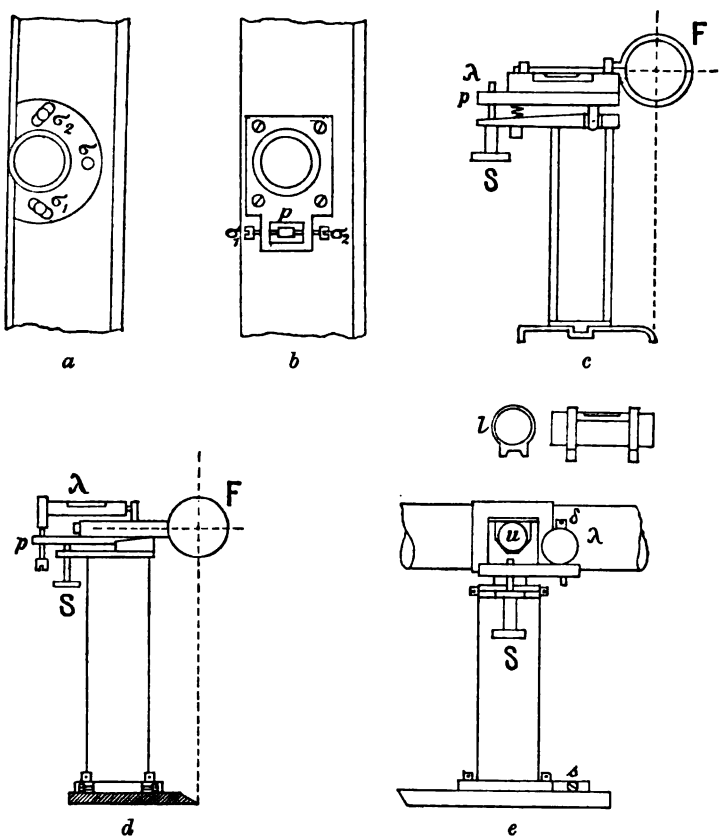


Fig. 184.

zeigt überdies schematisch die Einrichtungen zum Horizontalstellen der horizontalen Drehungsachse des Fernrohrs mittels der Libelle λ. In Fig. 184 *c* wird durch die Schraube *S* die Platte *p* gehoben oder gesenkt, und damit Fernrohrachse und Libelle, die miteinander fest verbunden sind; in Fig. 184 *d* kann die Libelle unabhängig vom Fernrohr verstellt werden; das Perspektivlineal in Fig. 184 *e* hat nebst einer festen Libelle λ eine auf der Achse *u* umsetzbare *l*. Fig. 185 zeigt ein Breithauptsches Lineal mit Orientierungsbussole, Dosenlibelle, mit Gradbogen und Libelle am Fernrohr zum Nivellieren. Fig. 186 und 187 zeigen Perspektivlineale mit Einrichtungen zum Horizontalstellen der Drehungsachse des Fernrohrs; bei Fig. 186 wird dies dadurch erreicht, daß das Lineal um seine Kante durch die rückwärts am Fuße

sichtbare Schraube gedreht werden kann. Allgemeiner und besser ist die Horizontalachse durch eine aufsetzbare Libelle horizontal zu stellen, wie dies bei dem Instrumente Fig. 187, welches übrigens Reversionslibelle am Fernrohr, Höhenkreis mit Alhidadenlibelle und distanzmessendes Fernrohr (Tachymeterkippregel) hat, der Fall ist.

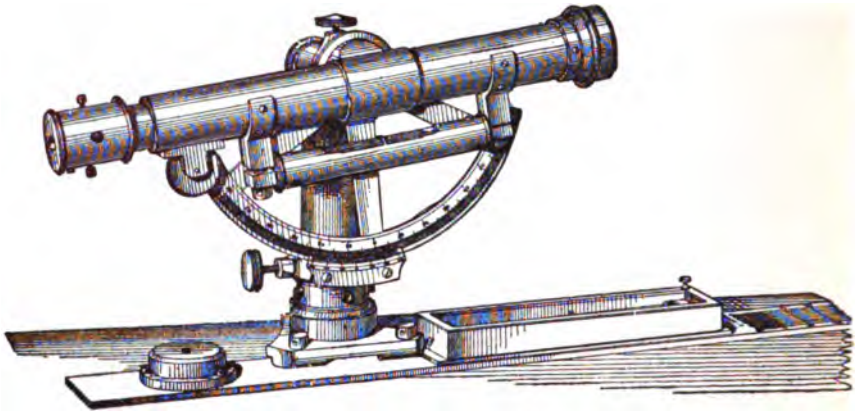


Fig. 185.

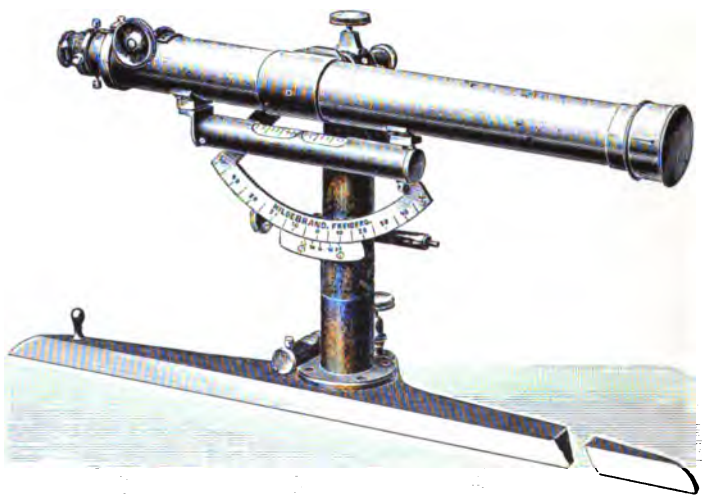


Fig. 186.

Berichtigung. *a*) Perspektivlineale werden zumeist mit umsetzbarer Libelle konstruiert; die Berichtigung ist dann einfach. Es wird zunächst die Libelle rektifiziert und mit dieser rektifizierten Libelle die Achse horizontal gestellt. Mitunter ist nebst dieser eine feste Libelle neben der horizontalen Drehungsachse. In diesem Falle wird das Verfahren dadurch einfacher, daß die Achse zunächst mittels einer umsetzbaren Libelle horizontal gestellt und die feste Libelle zum Einspielen gebracht wird. Ist dies geschehen, so kann

sie für einige Zeit verwendet werden, z. B. um die horizontale Lage der Achse im Laufe einer Beobachtungsreihe zu kontrollieren, wodurch man von Schwankungen in der Lage des Meßtisches unabhängig wird.

b) Um zu untersuchen, ob die Kollimationslinie des Fernrohrs senkrecht zur Drehachse *u* (Fig. 184 *e*) ist, wird man wie früher (Nr. 19) das Fernrohr umdrehen, d. h. die Achse *u* um 180° drehen und das Fernrohr durchschlagen. Um aber *u* genau um 180° drehen zu können, wird man bei der einen Visur längs der Linealkante eine feine Bleilinie ziehen und

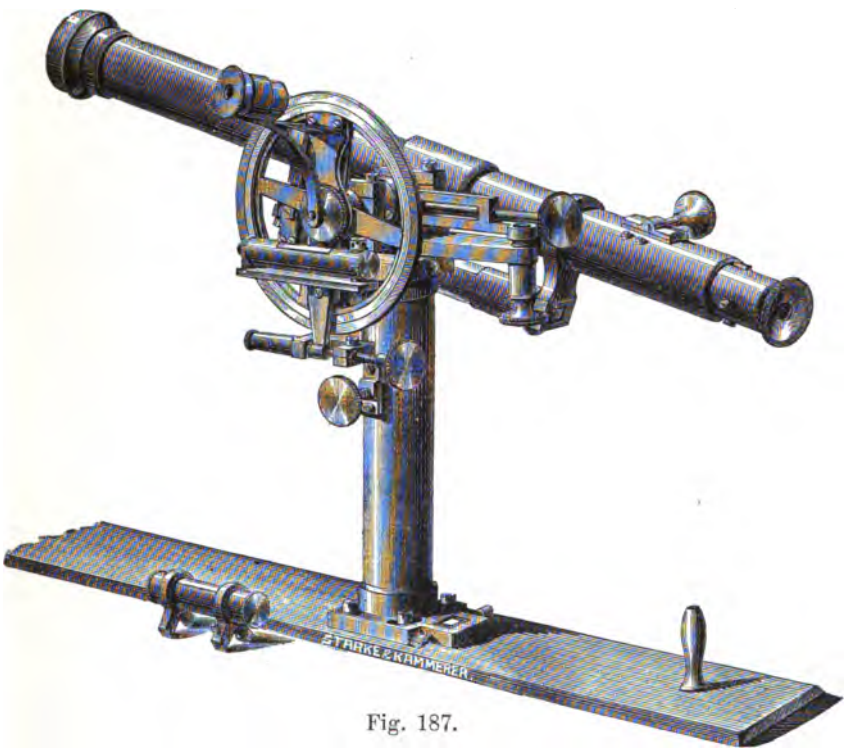


Fig. 187.

das Instrument dann so drehen, daß das Lineal auf der andern Seite der Bleilinie liegt. Erscheint das Objekt nach dem Durchschlagen nicht am Fadenkreuz, so ist dieses, natürlich um den halben Betrag der Abweichung, zu korrigieren.

Ist die Kollimationslinie senkrecht auf der Drehungsachse *u* so beschreibt sie eine Ebene und ist daher *u* horizontal, so ist die von der Kollimationslinie beschriebene Ebene vertikal und beim Pointieren eines vertikalen Objekts werden alle Punkte desselben beim Drehen des Fernrohrs am Faden bleiben müssen; dies ist aber nicht der Fall, wenn *u* nicht horizontal ist. Man kann dies dazu benutzen, um die horizontale Lage der Drehachse *u* zu untersuchen, indem man nämlich einen hohen vertikalen Gegenstand (je höher er ist, desto besser; man kann sich daher ziemlich nahe aufstellen) von unten bis oben anvisiert. Bleibt dabei der Gegenstand am Fernrohr (der Kollimationsfehler muß vorher weggeschafft sein), so ist *u* horizontal. Bleibt aber der Gegenstand nicht am Faden, so muß die Lage der Achse

berichtigt werden. Diese Methode kann angewendet werden, wenn die Horizontalität der Achse überhaupt nicht durch eine Libelle geprüft werden kann.

c) Die Kollimationslinie muß parallel zur Linealkante sein. Um dieses zu prüfen, ist es das einfachste, die Visur durch das Fernrohr mit der Visur über die Linealkante nach demselben Objekte, die man sich dadurch erleichtern kann, daß man zwei feine Pikiernadeln normal zur Tischplatte einsteckt, miteinander zu vergleichen. Die Prüfung wird stets ausreichen, denn bei kleinen Abweichungen im Parallelismus wird der entstehende Fehler unmerklich,* da ja bei allen Visuren derselbe Unterschied der Richtungen stattfindet, also gleichsam die Zeichnung nur um den Winkel zwischen den beiden Ebenen gedreht erscheint und größere Abweichungen lassen sich auf die angegebene Art mit Leichtigkeit konstatieren. Die Wegschaffung des Fehlers geschieht mittels der Fußschrauben σ (Fig. 184 *a*, *b*).

Ein einfacher Meßtisch ist das Skizzierbrettchen; eine Kombination desselben mit einem ebenfalls einfachen Perspektivlineal zeigt Fig. 188, welches Ertel als „Situationsinstrument" bezeichnet. Ein Stockstativ, durch einen Dreifuß gehalten, trägt auf einem Nußgelenk das Detaillierbrettchen, auf welchem ein einfaches Perspektivlineal mit Dosenlibelle und Bussole aufgesetzt wird; das Fernrohr dient zum Distanzmessen und hat zwei fixe Fäden und einen Gradbogen zum Ablesen der Höhenwinkel. [Fig. 189 *a* gibt hiervon eine etwas genauere Abbildung; eine Latte zum Distanzmessen ist ebenfalls beigegeben (Fig. 189 *b*).]

Fig. 188.

Fig. 189 *a*.

Fig. 189 *b*.

* Der Fehler rührt nur davon her, daß der Scheitel durch die Fernrohrvisuren etwas verschoben wird, wenn der Beobachter das Lineal etwas zu sich hinzieht oder wegschiebt.

h) Instrumente zum Übertragen von Zeichnungen.

63. Das Übertragen von Zeichnungen in verkleinertem (verjüngtem) Maßstabe geschieht mittels Quadratnetz. Die gegebene Zeichnung wird mit einem solchen überzogen und ein anderes, kleineres in dem gewünschten Verhältnisse der neuen Zeichnung zugrunde gelegt. Die Maschen werden so enge genommen, daß innerhalb derselben das bloße Augenmaß ausreicht, um ein dem Originale ähnliches Bild zu erhalten. Können auf dem gegebenen Plane die Linien nicht verzeichnet werden, so legt man ein aus feinem Draht verfertigtes oder auf Glas geritztes Quadratnetz auf.

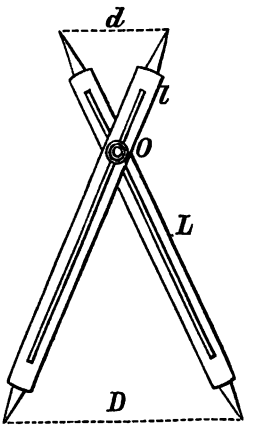


Fig. 190.

Hat das Quadratnetz auf dem gegebenen Plane Seiten von 1 *cm* Länge und will man einen auf die Hälfte verkleinerten Plan, so werden die Seiten des neuen Quadratnetzes $\frac{1}{2}$ *cm* lang genommen. Bei diesem Einzeichnen aus freier Hand müssen immerhin gewisse Punkte gegeneinander vollständig richtig übertragen werden, zu welchem Zwecke man sich des Reduktionszirkels (Proportionalzirkels) bedient.* Dieser ist ein Zirkel, dessen Drehpunkt verschiebbar ist, so daß die Länge der Schenkel geändert werden kann (Fig. 190). Da sich bei jeder beliebigen Zirkelöffnung die Distanz der Zirkelspitzen wie die Längen der Zirkelschenkel verhalten, d. h.

$$D : d = L : l$$

ist, so wird stets

$$d = D . \frac{l}{L}.$$

Ist daher der Drehungspunkt O festgestellt, so wird die Distanz d immer derselbe Bruchteil von D sein; ist z. B. $\frac{l}{L} = \frac{1}{3}$, so wird für alle auf der einen Seite entnommenen Entfernungen D die zugehörige zwischen den anderen Zirkelspitzen $d = \frac{1}{3} D$ sein.

Um ganze Pläne zu übertragen, dient der Storchschnabel oder Pantograph. Eine der jetzt gebräuchlichen Formen ist die folgende:** Ein Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 191) ist an diesen vier Punkten in Charnieren beweglich. Zwei Stifte s und S, der erstere in der Verbindungslinie CD,

---

* Eine Art Proportionalzirkel (mit verschiebbaren Linealen) wurde schon von Just. Byrgius 1600 angegeben. Eine andere Konstruktion, ein bloß drehbarer Zirkel mit geteilten Schenkeln, rührt von Galilei (1610) her; (s. J. T. Mayer, Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, Göttingen 1792, Bd. I, S. 291). Der Gebrauch verschwand aber bald. Mayer sagt: „Meine Absicht war nur die vornehmsten Begriffe von einem Werkzeug beizubringen, welches ehemals bei dem Feldmessen in so großem Ansehen stand" (ebenda S. 290).

** Der älteste Pantograph (von etwas anderer Form) wurde von Christoph Scheiner S. J. in dem Werke „Pantographice, Romae 1631" beschrieben (vgl. Marinoni, De re ichnographica, Viennae 1751, S. 267).

der zweite in der Verlängerung von BC beschreiben, wenn der Punkt A festgehalten wird, ähnliche Figuren, wenn s und S mit A in einer Geraden liegen. Ist dies nämlich für eine Lage der Fall, so bleiben sie stets in dieser Lage: bei der Verschiebung nach $AB'C'D'$ bleibt auch $As'S'$ in einer Geraden und es verhält sich stets

$$As : AS = As' : AS'.$$

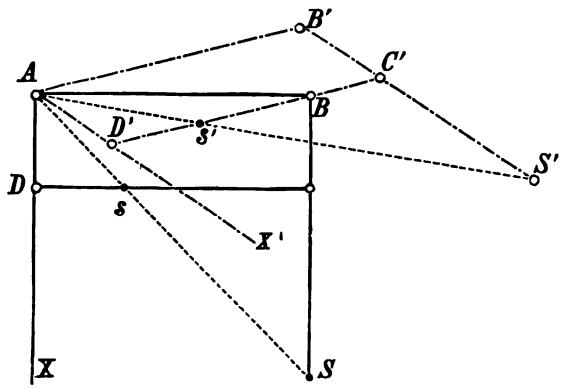


Fig. 191.

Es ist nämlich $\triangle AsD \sim ASB$, weil $Ds \parallel AB$ und daher $Ds : AD = AB : BS$ ist. Bei der Drehung wird aber keine der hier auftretenden Strecken geändert; es bleibt also auch

$$D's' : AD' = AB' : B'S'$$

und da auch weiterhin $AB'C'D'$ ein Parallelogramm bildet, so wird $AD's' \sim AB'S'$, demnach $\sphericalangle s'AD' = \sphericalangle B'S'A'$; folglich fallen As' und AS' in dieselbe Gerade. Weiter ist in denselben ähnlichen Dreiecken

$$As : AS = AD : BS = BC : BS$$

und ebenso

$$As' : AS' = B'C' : B'S',$$

demnach werden die Punkte s, s' mit den korrespondierenden S, S' stets in derselben geraden Linie liegen und die Entfernungen erscheinen sämtlich im selben Verhältnis verkürzt. Man nennt A den Pol, den einen der beiden Stifte den Fahrstift, den andern den Schreibstift; wenn der gegebene Plan verkleinert werden soll, so wird S längs der Linien des gegebenen Planes hinfahren; S ist der Fahrstift und s beschreibt den verkleinerten Plan, s ist der Schreibstift. Zum Vergrößern wird umgekehrt s der Fahrstift, S der Schreibstift. Die Ausführung zeigt Fig. 192. Bei der Einstellung hat man dafür zu sorgen, daß die Querschiene DC auf dieselben Teilstriche der zu diesem Zwecke geteilten Seitenschienen Ax, BS kommt und daß der Stift s in die Gerade AS kommt. Dieses wird erreicht, wenn $Ds : DC = BC : BS$ ist. Zu diesem Zwecke ist auch die Schiene DC geteilt, und zwar in dieselbe Anzahl Teile wie BC und man hat s auf denselben Teilstrich von DC zu stellen, wie C von BS. Sind z. B. sämtliche Linien in

100 Teile geteilt, die Bezifferungen ausgehend von A gegen x, von B gegen S, von D gegen C und stellt man D, C, s auf die Zahl 25, so erhält man eine Reduktion im Verhältnis 1 : 4.

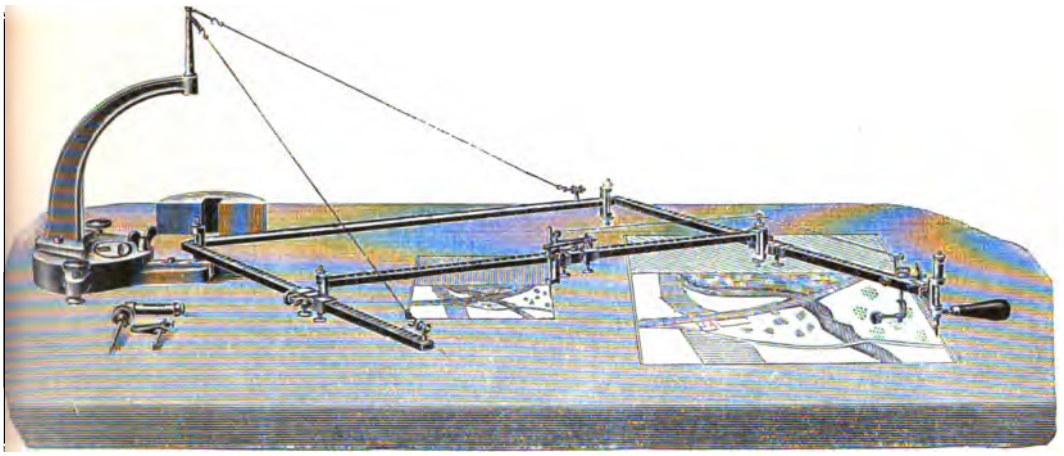


Fig. 192.

Die Scharniere gehen entweder zwischen feinen Spitzen oder in zylindrischen Stahlzapfen; die Stäbe haben eine Millimeterteilung; bei den feineren wird die Einstellung durch Nonien erzielt, welche 0·1 *mm* geben.

Um eine Fläche von 50 × 50 cm^2 oder 60 × 40 cm^2 mit dem Stifte S zu umfahren, ist eine Stablänge von etwa 60 *cm*, für eine Fläche von 80 × 80 cm^2 oder 100 × 70 cm^2 zu umfahren eine Stablänge von etwa 100 *cm* erforderlich.

i) Flächenmessung, Planimeter.

64. Die Flächenmessung kann nach geometrischen Methoden erfolgen, indem man die Figuren in geometrisch definierte Gebilde (Dreiecke, Trapeze) zerlegt und deren Flächen durch Rechnung bestimmt. Instrumente, welche unmittelbar die Fläche abzulesen gestatten, heißen Integratoren oder Planimeter. Die ersten Instrumente dieser Art rühren nach Bauernfeind* von J. M. Hermann aus dem Jahre 1817 her. Die Erfindung blieb unbeachtet und wurde erst durch das von J. Oppikofer auf den gleichen Prinzipien beruhende, als neu angegebene Planimeter 1825 bekannt und angewendet. Nach Favaro** hatte aber um dieselbe Zeit (1825) der Italiener Gonella ein Planimeter konstruiert, das an Güte mit dem viel späteren von Ernst 1839 und Wetli 1849 verbesserten Oppikoferschen Planimeter konkurrieren konnte. Wenn Favaro sich darüber beklagt, daß die Gonellasche Erfindung außerhalb Italiens unbekannt blieb, so kann wohl die Gegenfrage erhoben werden, wieso es kommt, daß diese Erfindung auch in Italien

* Dinglers polytechnisches Journal, Bd. CXXXVII, S. 82.

** „Beiträge zur Geschichte der Planimeter." Allgemeine Bauzeitung, Bd. XXXVIII, 1873.

von 1825 bis 1841 gänzlich unbekannt war und erst 1841 öffentlich bekannt wurde. Allgemeinen Eingang erhielten diese Planimeter erst mit der Konstruktion derselben in der ihnen von G. Ch. Starke gegebenen Form, der sogenannten Wetli-Starkeschen Linearplanimeter. Eine Ansicht desselben gibt Fig. 193. Eine auf drei Rollen gestützte um eine vertikale Achse drehbare runde Tischplatte ist auf einem Fußbrette auf drei Schienen, welche den drei Rollen als Fahrbahn dienen, parallel mit sich selbst verschiebbar. Senkrecht auf dieser Richtung ist ein zwischen den Nuten von

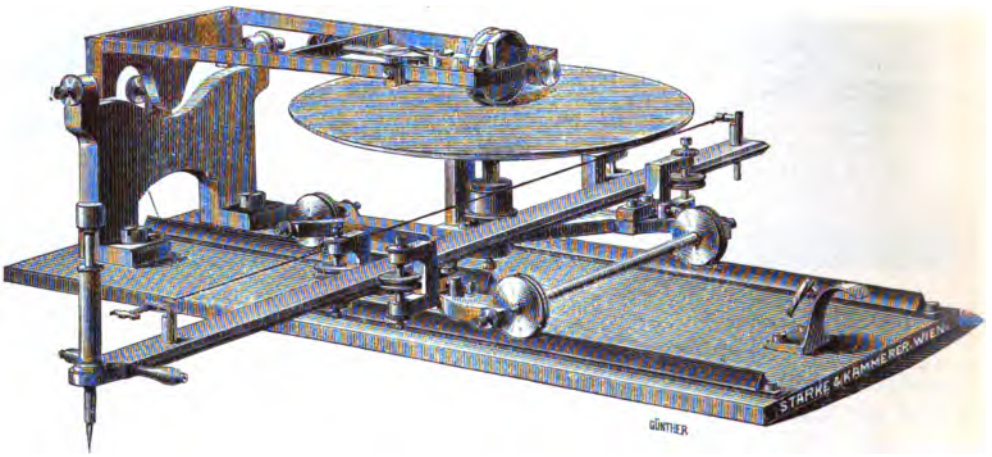


Fig. 193.

vier Rollen sicher gelagertes Lineal verschiebbar, welches vorn einen Stift trägt und über welches ein Draht gespannt ist, der um eine an der Achse der Tischplatte befestigte Welle geschlungen ist und dadurch die Tischplatte bei der Verschiebung mit sich dreht. Verschiebt sich der Tisch auf seinen drei Füßen nach rechts, so dreht er sich nicht, verschiebt sich jedoch das Lineal nach vorn oder rückwärts, so dreht sich der Tisch und diese Drehung überträgt sich auf eine auf demselben gleitende Rolle, wenn diese nicht gerade in der Mitte des Tisches aufliegt. Die Rolle trägt eine Stirnteilung, welche Bruchteile der Umdrehungen zu lesen gestattet, während die ganzen Umdrehungen durch eine Zahnradübersetzung auf einer horizontalen Scheibe (in der Figur links von der Rolle) gelesen werden.

Um die Fläche zu bestimmen, wird das Instrument so gestellt, daß der Stift die Figur bequem umfahren kann, ohne daß die Rolle aus dem Bereiche der Tischplatte kommt. Man stellt dann den Fahrstift auf einen Punkt des Umfanges der zu bestimmenden Figur und liest die Rolle ab (z. B. $6{\cdot}72^R$), umfährt den ganzen Umfang in der Richtung des Uhrzeigers bis zum Ausgangspunkt und liest wieder ab (z. B. $15{\cdot}48^R$). Die Differenz der Lesungen ($8{\cdot}76^R$) multipliziert mit dem Werte einer Revolution in cm^2 gibt die Fläche, ist z. B. $1^R = 10\ cm^2$, so würde für dieses Beispiel $F = 87{\cdot}6\ cm^2$ sein.

In der Konstruktion wesentlich einfacher sind die Polarplanimeter,

welche zuerst (1854) von J. Amsler* in Schaffhausen und A. Miller in Leoben angegeben wurde. Dieselben wurden von Amsler (Fig. 194) und Starke ausgeführt, daher das letztere auch als Miller-Starkesches Polarplanimeter (Fig. 195) bezeichnet wurde. Das Instrument wird mit seinem

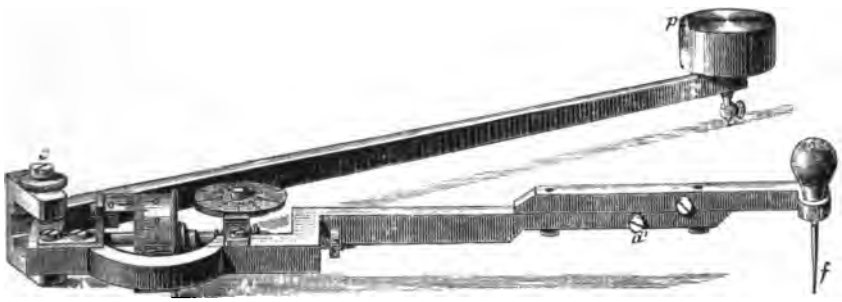


Fig. 194.

Pol p irgendwo fixiert, die zu bestimmende Figur mit dem Fahrstift f umfahren, wobei die bei c angebrachte Rolle auf dem Papiere gleitet und rotiert. Teile der Umdrehung werden an der Stirnteilung gelesen; die Zahl der ganzen Umdrehungen an einer durch Schraubenübersetzung gedrehten Scheibe. Auch hier wird die Lesung bei dem Beginne des Umfahrens von

Fig. 195.

der Lesung nach dem Umfahren, wenn der Stift den Ausgangspunkt wieder erreicht hat, abgezogen und daraus die Fläche wie oben ermittelt. Dieses Planimeter gestattet überdies sehr große Flächen zu bestimmen, wenn dieselben nur innerhalb eines Kreises liegen, der bei völlig gestrecktem Doppelarm mit dem Halbmesser pcf um den Pol p als Zentrum beschrieben werden kann. Ist dann der Pol innerhalb, so hat man die Differenz der Lesungen von einer gewissen, für jedes Instrument bestimmten Konstanten C abzuziehen.** Sei die Konstante $C = 17{\cdot}65$, die eine Lesung 4.69^R, die zweite $8{\cdot}72^R$ und $1^R = 100\ cm^2$ so wird

$$F = [17{\cdot}65 - (8{\cdot}72 - 4{\cdot}69)] \times 100\ cm^2 = 1362\ cm^2.$$

* „Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente mehrerer Figuren; insbesondere über einen neuen Planimeter von Joh. Amsler, Schaffhausen 1856."

** Über die Theorie der Planimeter vgl. z. B. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, Bd. II, S. 233 und 237. Über andere Planimeter, das Präzisionspolarplanimeter von Hohmann, das Kugelrollplanimeter von Coradi u. a., s. Bauernfeind, ebenda, Bd. II, S. 249 ff.

In der Regel wird die Konstante bereits in cm^2, also in diesem Falle 1765, angegeben, dann ist

$$F = 1765 - (8{\cdot}72 - 4{\cdot}69) \times 100\ cm^2 = 1362\ cm^2.$$

Die Prüfung der Instrumente in ihren einzelnen Teilen ist schwer durchführbar; man begnügt sich daher mit der Untersuchung, ob die erhaltenen Resultate den wirklichen Flächen entsprechen, wozu man die Bestimmung der Flächeninhalte von regelmäßigen Figuren wählen kann. Als solche dienen Kreise, Quadrate, Rechtecke, deren lineare Dimensionen mit der größten Sorgfalt abgemessen werden; es müssen kleine sowie möglichst große Figuren herangezogen werden, damit man sich überzeugen könne, ob auch bei verschiedenen Dimensionen, welche verschiedene Exkursionen der Fahrstifte erfordern, die Resultate nicht systematische Fehler zeigen. Man muß zahlreiche Versuche vornehmen, da das Umfahren der regelmäßigen Figuren nie völlig fehlerfrei stattfinden kann. Sind die Abweichungen bald größer (positiv), bald kleiner (negativ) aber immer nur klein ($\frac{1}{500} - \frac{1}{1000}$ der Gesamtfläche) so rühren sie vom Umfahren selbst her (unvermeidliche Beobachtungsfehler). Sind die Abweichungen größer und sämtlich positiv oder negativ, so liegt der Fehler im Instrumente. Da die Teilung am Rädchen nicht geändert werden kann, so muß auf andere Weise abgeholfen werden. Bei dem Linearplanimeter reicht es oft aus, den Draht zu wechseln (einen dünneren oder dickeren zu nehmen), beim Polarplanimeter durch eine geringfügige Verlängerung oder Verkürzung des Fahrarmes oder man läßt das Instrument ungeändert und bestimmt das Verhältnis der wahren Fläche F_0 zu der durch das Instrument erhaltenen F; ist dieses (Mittel aus vielen Versuchen)

$$\frac{F}{F_0} = k$$

gefunden, so wird sich stets auch bei der Bestimmung unbekannter Flächen die wahre Fläche F aus der abgelesenen F_0

$$F = k \,.\, F_0$$

ergeben. k kann man dann als die zweite Konstante des Instruments notieren.

k) Die Photogrammetrie.

65. Das photographische Bild. Das Messen der Winkel am Felde kann ersetzt werden durch die Photographie. Projiziert man die einzelnen Punkte a, b, c, d ... einer Photographie (Fig. 196), welche die Bilder von räumlichen Punkten A, B, C, D ... sind, auf eine horizontale Linie, z. B. die Schnittlinie $H_1 H_2$ mit der durch den zweiten Knotenpunkt O_1 des Objektivs gelegten Horizontalebene, so sind die Punkte a', b', c', d' ... die Bilder der Projektionen A', B', C', D' ... Denkt man sich den zweiten Knotenpunkt O_1 des Objektivs mit allen Punkten a, b, c, d ... und ihren Projektionen a', b', c', d' ... verbunden, so erhält man die aus dem Objektiv nach dem Bilde hin austretenden Strahlen, welche parallel sind den von den Gegenständen A, B, C, D ... und deren Projektionen A', B', C', D' ...

zum ersten Knotenpunkte O einfallenden Strahlen. Die Winkel, deren Scheitel im ersten Knotenpunkte des Objektivs liegen und deren Schenkel die Strahlen zu den einzelnen Punkten des Gegenstandes sind, werden daher durch die Winkel, deren Scheitel O_1 ist und deren Schenkel O_1a, O_1b ... O_1a', O_1b' ... sind, gegeben.

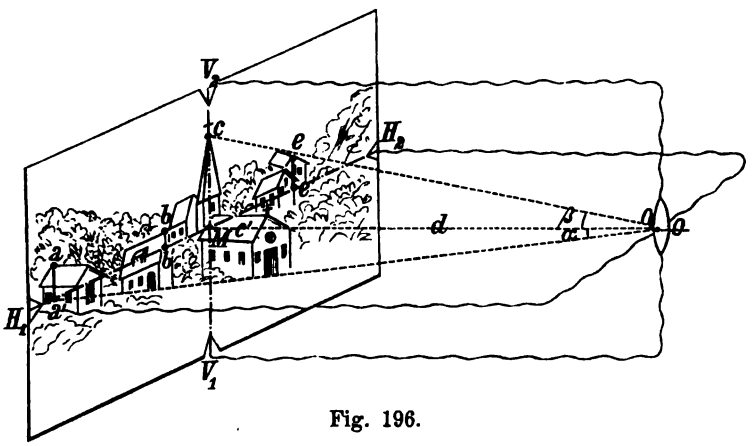


Fig. 196.

Legt man durch O_1 eine vertikale Ebene $O_1V_1V_2$ senkrecht zur Bildebene E,* so wird die photographische Platte in zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden H_1H_2 und V_1V_2 geschnitten. Ihr Durchschnittspunkt M ist der Bildmittelpunkt, der auch bestimmt ist durch die von O_1 auf die Platte gefällte Senkrechte O_1M. Linien, welche von O_1 unter gleichen Winkeln gegen E geneigt sind, werden die Ebene E in Punkten treffen, die von M gleich weit entfernt sind, daher auch gleiche Schärfe haben. Der Bildmittelpunkt muß dabei keineswegs mit dem Plattenmittelpunkte zusammenfallen. Fallen sie nicht zusammen, so wird dadurch das Bild nach der einen Seite etwas weiter ausgedehnt sein als nach der andern (vgl. Fig. 198*b*, wo der Bildmittelpunkt über dem Plattenmittelpunkte liegt).

Denkt man sich ein Auge in O_1, d. h. in der Distanz MO_1 der sogenannten Augendistanz, so wird dieses Auge von der Photographie denselben Eindruck erhalten, wie ein in O befindliches Auge, das die Landschaft selbst betrachtet; denn die zwischen zwei verschiedenen Punkten des Originales und Bildes eingeschlossenen Winkel sind gleich. Man kann daher auch die Originalwinkel durch ihre Kopien ersetzen. Um die Messung vorzunehmen, braucht man nur die Horizontalebene $H_1H_2O_1$ um die Linie H_1H_2 wie um ein Scharnier herunterzuschlagen, bis sie in die Ebene der Photographie kommt. Fig. 197 stellt dieselbe dar. Dann steht in der Zeichnungsfläche $M'O_1 \perp H_1H_2$ und $M'a'$, $M'b'$ ... sind die Abstände der Punkte

* Eigentlich eine zu OH_2H_1 und E senkrechte Ebene; dies wird wichtig, wenn die Bildebene nicht vertikal, sondern geneigt wäre. Würde z. B. ein hochgelegener Gegenstand zu photographieren sein und die Kamera geneigt werden, damit die mittlere Visur OM nach aufwärts zu dem erhöhten Gegenstande geht, so wäre die Ebene OH_2H_1 nicht mehr horizontal; in der Photogrammetrie wählt man allerdings meist nicht diesen Vorgang.

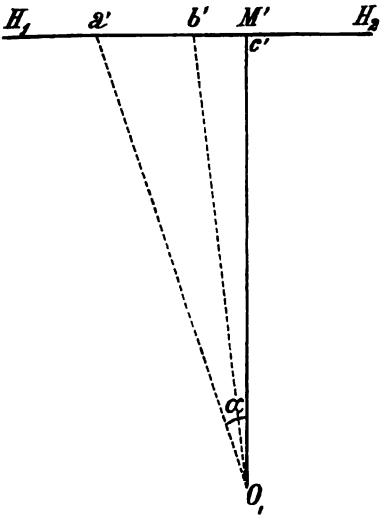


Fig. 197.

$a', b' \ldots$ Fig. 196 von der Vertikalen $V_1 V_2$. Nennt man dieselben x, und zwar um den Punkt sicher und unzweideutig zu bestimmen, nach der einen Seite positiv, nach der andern negativ, so erhält man aus dem x eines Punktes und der Augendistanz $O_1 M' = d$ die Winkel in der Zeichnung. Noch genauer wird es, dieselben zu rechnen. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{d}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{x'}{d} \quad \text{und} \quad w = \alpha' - \alpha.$$

Sei z. B. für eine Aufnahme

$$d = 32{\cdot}0\ cm = 320\ mm,$$

und für drei Punkte A_1, A_2, A_3:

$$x_1 = +25{\cdot}3\ mm, \quad x_2 = -17{\cdot}8\ mm, \quad x_3 = -36{\cdot}4\ mm.*$$

so wird

$\log x_1 = 1{\cdot}40312$	$\log x_2 = 1{\cdot}25042_n$	$\log x_3 = 1{\cdot}56110_n$
$\log d = 2{\cdot}50515$	$\log d = 2{\cdot}50515$	$\log d = 2{\cdot}50515$
$\log \operatorname{tang} \alpha_1 = 8{\cdot}89797$	$\log \operatorname{tang} \alpha_2 = 8{\cdot}74527_n$	$\log \operatorname{tang} \alpha_3 = 9{\cdot}05595_n$
$\alpha_1 = +4^\circ\ 31{\cdot}2'$	$\alpha_2 = -3^\circ\ 11{\cdot}1'$	$\alpha_3 = -6^\circ\ 29{\cdot}4'$,

demnach

$$w_{12} = 7^\circ\ 42{\cdot}3' \qquad w_{23} = 3^\circ\ 18{\cdot}3' \qquad w_{13} = 11^\circ\ 0{\cdot}6'.$$

Man erhält ebenso den Höhen- oder Tiefenwinkel, wenn man die Vertikalabstände der anvisierten Punkte über der Horizontalebene $H_1 H_2$ bestimmt; sind diese y, so folgt (Fig 196)

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{y}{d}$$

nennt man dann noch die Entfernung des anvisierten Punktes D, so erhält man die Höhe oder Tiefe desselben über der Ebene $H_1 H_2 O$

$$H = D \operatorname{tang} \beta$$

oder, wie auch leicht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $aa'O_1$ und $AA'O$ folgt:

$$H : y = D : d$$

und daher

$$H = \frac{y}{d} \cdot D.$$

---

* Da negative Zahlen keine reellen Logarithmen haben, so schreibt man für die logarithmische Rechnung den Logarithmus der positiven Zahl an, und fügt ein „n" als Index bei; zu bemerken ist dann, daß in der Summe zweier als „n" bezeichneter Logarithmen und daher überhaupt einer geraden Anzahl derselben das „n" wegfällt. Ebenso bezeichnet log tang $\alpha_2 = 8{\cdot}74527_n$, daß die Tangente des Winkels negativ, daher auch der Winkel entweder negativ oder im zweiten Quadranten ist, usw.

Die Höhendifferenz zweier Punkte folgt wieder gleich $H - H'$, wenn man die y auf dem Bilde nach der einen Seite (nach aufwärts) positiv, nach der andern (nach abwärts) negativ nimmt. Sei z. B. für einen Punkt A (Kirchturmspitze) $y_1 = +36{\cdot}7\ mm$, für einen zweiten Punkt B (Erdboden) $y_2 = +23{\cdot}9\ mm$, so folgt mit $d = 320\ mm$, wenn die Entfernung des Punktes A vom Aufnahmspunkte bekannt, $D = 160\ m$ wäre: $H_1 = 183{\cdot}5\ m$, $H_2 = 119{\cdot}5\ m$, demnach die Höhe des Kirchturms über dem Boden $64\ m$ und die Höhe des Punktes B über der Plattenmitte $119{\cdot}5\ m$. Hat man dann noch die Höhe der Plattenmitte über dem Aufstellungspunkte (Instrumentenhöhe) gemessen, so erhält man den Höhenunterschied der beiden Punkte. Sei die Instrumentenhöhe im vorliegenden Falle $1{\cdot}3\ m$, so wäre der Höhenunterschied der beiden Punkte $120{\cdot}8\ m$.

Liegen die zu photographierenden Gegenstände sehr hoch, so würden ihre Bilder am unteren Rande der Platte erscheinen, wenn Bild- und Plattenmitte zusammenfallen (Fig. 198*a*). Man könnte nun die Kamera stürzen, d. h. so drehen, daß die Senkrechte OM in die mittlere Richtung des aufzunehmenden Bereiches, demnach die Platte senkrecht zu dieser mittleren

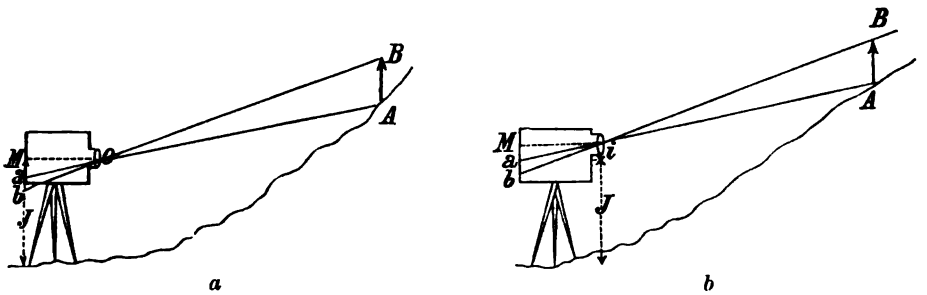


Fig. 198.

Visur fällt. Selbst für einfache Aufnahmen empfiehlt sich dies nicht, da hierdurch die Bilder vertikaler Linien auf der Photographie stark konvergent erscheinen und zwar nach abwärts für Aufnahmen hochgelegener Gegenden, nach aufwärts für Aufnahmen tiefer gelegener Gebiete. Für Messungen würden daraus noch bedeutendere Unbequemlichkeiten folgen. Die Kamera wird daher überhaupt nicht geneigt, sondern bei unveränderter (vertikaler) Plattenlage das Objektiv gehoben oder gesenkt, wodurch das Bild hinauf beziehungsweise herabrückt. Fig. 198*b* zeigt dies für ein hochgelegenes Gebiet. Die Bildmitte fällt dann um einen Betrag i über der Plattenmitte; kennt man letztere, so kann man die erstere finden, indem man die Horizontale $H_1 H_2$ um den Betrag i oberhalb (für ein Senken des Objektivs unterhalb) der Plattenmitte annimmt. Oder aber es sind alle y für ein gehobenes Objektiv um i zu vergrößern (da ja die positiven y auf dem umgekehrten Bilde nach abwärts und erst bei der behufs Messung gedrehten Photographie nach aufwärts gehen), bei gesenktem Objektive um i zu vermindern. Nennt man den Betrag der Objektivverschiebung i, positiv bei einer Hebung, negativ bei einer Senkung, so hat man daher die y von der auf der Platte durch die Plattenmitte gezogenen Horizontalen $H_1 H_2$ zu nehmen, aber für die Rechnung

$y + i$ zu verwenden.* Als Instrumentenhöhe gilt aber dann ebenfalls $J + i$, wenn J die Höhe der Plattenmitte über dem Aufstellungspunkte ist.

Zur Bestimmung von i ist der Betrag der Verschiebung des Objektivs an einer Skala abzulesen.

Die Maße x, y sollen, wenn es sich um genauere Bestimmungen handelt, dem Negativ entnommen werden. Die Verziehungen, welche das Papier bei dem Fixieren und Waschen der Kopien erfährt, sind mitunter nicht unbeträchtlich, während die Gelatineschicht der Glasplatte erfahrungsgemäß nur sehr geringen Verziehungen unterliegt.

Um die Entfernung d zu bestimmen, muß, wenn man eine Balgkamera hat, diese mit einer Teilung versehen sein, an welcher man stets die Stellung der Platte ablesen kann. Der Anfangspunkt dieser Teilung ist ganz willkürlich nur muß man auch die Entfernung des zweiten Knotenpunktes von dem Nullpunkte der Teilung kennen. Hierzu bestimmt man am besten die Brennweite des Objektivs (Einstellung für unendlich entfernte Objekte); ist diese gleich F, die Lesung bei der Einstellung auf unendlich entfernte Objekte E_0 und ist $F - E_0 = z$, so ist für irgend eine andere Einstellung E die Bildweite $B = E + z$.

Ist z. B. die Brennweite $F = 32{\cdot}2\ cm$ und die für unendlich entfernte Objekte gültige Einstellung an der Skala $E_0 = 19{\cdot}7\ cm$, so ist $z = 12{\cdot}5\ cm$, die Entfernung des zweiten Knotenpunktes von einer durch den Nullpunkt der Teilung zur Bildebene parallelen Ebene. Der Einstellung $E = 21{\cdot}8$ wird daher die Bildweite $B = 34{\cdot}3\ cm$ entsprechen.** Die bei der gewöhnlichen Kamera übliche Drehung der Visierscheibe (und daher der Kassetten), so daß dieselbe rechts oder links, ebenso oben oder unten dem Objektiv genähert werden kann, läßt man hierbei am besten weg. Ist eine bloße Parallelverschiebung vorhanden, so bleibt die Lage des Punktes M stets dieselbe, bei jeder Drehung der Platte würde er hingegen zur Seite oder nach auf- oder abwärts verschoben, was vermieden werden muß.

Um den Punkt M auf der Platte zu fixieren, müssen die Linien V_1V_2

---

* Dies ist deshalb von Wichtigkeit, weil die Höhenwinkel von der Horizontalebene zu rechnen sind.

** Da der Forschungsreisende häufig in die Lage kommen kann, mit einem einfachen Photographenapparate photogrammetrische Aufnahmen zu machen, so soll hier eine einfache Methode zur Bestimmung von F gegeben werden. (Eine andere, minder einfache, durch Messung von Horizontalwinkeln gab Hübl in den Mitteilungen des k. u. k. militärgeographischen Instituts, Bd. XIX.) Für die vorliegende Methode hat man nur einen Gegenstand von bekannter Größe g in verschiedenen Entfernungen aufzustellen, die Visierscheibe zu verstellen, bis das Bild vollkommen scharf erscheint und dann den Abstand D des Gegenstandes von der Visierscheibe und die Größe b des Bildes zu messen. Ist G der Abstand des Gegenstandes vom ersten Knotenpunkte, x der unbekannte Abstand der Knotenpunkte und wie oben $B = E + z$, so ist $D = G + x + B$ und nach Nr. 14

$$\frac{G}{B} = \frac{g}{b};\quad \frac{1}{G} + \frac{1}{B} = \frac{1}{F}.$$

Unbekannt sind die Größen x, z und F, doch wird man sich leicht Näherungswerte x_0, z_0, F_0 verschaffen (Einstellung auf einen sehr entfernten Gegenstand und Messung der Linsendicke, die als erster Näherungswert für x gelten kann, und des

und $H_1 H_2$ gezeichnet werden können. Man kann dieselben auf der Mattscheibe als Bleistiftlinien zeichnen und denjenigen Punkt des Bildes als Bildmitte notieren (einen auffälligen in der Nähe befindlichen Punkt auf denselben einstellen), über welchen die beiden Linien der Mattscheibe laufen; bei festem Bau des Instrumentes und ruhiger Arbeit, wenn durch das Einsetzen der Kassetten eine Verschiebung nicht eintritt, kann man dann die Bildmitte leicht auf dem Bilde finden. Noch besser ist es, an dem Rahmen,

---

Abstandes der Visierscheibe von der hinteren Linsenfläche F; z ist dann $F - E_0$). Sind dann die Korrektionen der Näherungswerte ξ, η, φ, so daß

$$x = x_0 + \xi, \quad z = z_0 + \eta, \quad F = F_0 + \varphi$$

ist, so hat man, wenn

$$E + z_0 = B_0, \quad D - (E + x_0 + z_0) = G_0$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{G_0 - (\xi + \eta)} + \frac{1}{B_0 + \eta} = \frac{1}{F_0 + \varphi}; \qquad \frac{G_0 - (\xi + \eta)}{B_0 + \eta} = \frac{g}{b}.$$

Wählt man den Näherungswert F_0 so, daß

$$\frac{1}{G_0} + \frac{1}{B_0} = \frac{1}{F_0}$$

ist, so erhält man hieraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{G_0^2}\xi + \left(\frac{1}{G_0^2} - \frac{1}{B_0^2}\right)\eta + \frac{1}{F_0^2}\varphi = 0 \\ \xi + \frac{g+b}{b}\eta = D - x_0 - \frac{g+b}{b}(E + z_0) \end{aligned}\right\}.$$

Jede Messung von D gibt einen Wert von G_0, daher eine Gleichung der ersten Gruppe, jede Messung von b eine Gleichung der zweiten Gruppe. Aus allen zusammen erhält man (durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate) die drei Unbekannten ξ, η, φ.

An einem photographischen Apparate mit Balgkamera, an deren Messingführung ich mir eine Zentimeterteilung einriß, bestimmte ich die Brennweite des zugehörigen vorzüglichen Rectilinearaplanaten von großer Schärfe und Tiefe durch Messung von D und b_1, b_2 für zwei Objekte von $g_1 = 200\ mm$ und $g_2 = 150\ mm$ (Linien von dieser Länge):

D	E	b_1	b_2
180·0 *cm*	30·0 *cm*	64·2 *mm*	48·0 *mm*
192·5	28·7	56·5	42·2
205·5	28·0	51·0	38·2
226·0	26·8	43·5	32·5
250·0	25·7	37·0	27·7
280·0	24·6	31·4	23·4

D	E
309·5 *cm*	24·30 *cm*
327·5	23·80
355·3	23·25
381·7	23·00
480·0	22·25
550·0	21·80
∞	19·60

Hieraus ergab sich $x = 5{\cdot}344\ cm$; $z = 12{\cdot}537\ cm$; $F = 32{\cdot}208\ cm$; Bildweite = Einstellung + 12·5 *cm*.

Da für $G = 100\ m$, $B = 32{\cdot}3$ folgt, so ersieht man, daß Gegenstände über 100 *m* Entfernung schon mit der konstanten Einstellung $E = 19{\cdot}7$ aufgenommen werden können.

welcher die Mattscheibe und die Kassetten fixiert, vier Zähne z_1, z_2, z_3, z_4 anzubringen, welche sich durch Abhalten von Licht auf der Platte selbst mit abbilden. Die Verbindungslinien derselben geben dann jederzeit die Vertikal- und Horizontallinien der Platte. (Zwei Fäden $z_1 z_2$ und $z_3 z_4$ querüber zu spannen, wie dies ebenfalls vorgeschlagen wurde, ist unnötig.)

Da man Horizontal- und Höhenwinkel messen will, so muß die auf der Bildebene E senkrechte Ebene $H_1 H_2 O$ eine Horizontale, daher die Ebene E vertikal stehen; die untere Platte der Kamera, auf welcher die Verschiebung der Mattscheibe stattfindet, muß daher horizontal gestellt werden, was durch eine Libelle geschieht.

Um deutliche Bilder zu erhalten, muß das Objektiv eine große Tiefe haben, d. h. Gegenstände in verschiedenen Entfernungen dürfen nicht unscharf erscheinen. Die hierzu verwendeten Objektive sind auch derart, daß Verschiebungen der Platten um 1—2 *mm* außerhalb des Focus noch keine unscharfen Aufnahmen ergeben.

Um möglichst weitreichende Aufnahmen zu erhalten, darf die Brennweite nicht zu groß sein.* Will man den ganzen Horizont (360°) auf 8—10 Platten erhalten, so muß jede einen Winkel $H_2 O H_1 = 45°$ bis 36° umspannen, d. h. es muß $\frac{MH_1}{d} = \text{tang } 22\frac{1}{2}°$ bis tang 18°, daher $d = 2{\cdot}41\, MH_1 = 1{\cdot}2\, H_1 H_2$ bis $d = 3{\cdot}08\, MH_1 = 1{\cdot}5\, H_1 H_2$ sein, d. h. (unter der Voraussetzung, daß das Bild nahe in der Brennebene des Objektivs entsteht) die Brennweite des Objektivs muß etwa gleich der $1\frac{1}{5}$- bis $1\frac{1}{2}$-fache Plattenbreite sein. Diese „Objektive kurzer Brennweite" haben in der Photographie den Namen „Weitwinkel" erhalten; sie unterscheiden sich von anderen Objektiven dadurch, daß sie noch in größeren Distanzen von der Bildmitte, d. h. für „große Bildwinkel" gute Bilder geben, eine Eigenschaft, die nicht jedem Objektiv zukommt. Immerhin ist es gut, nebst dem „Weitwinkel" auch ein „Objektiv langer Brennweite" zu haben, um im Bedarfsfalle auch Aufnahmen in größerem Maßstabe machen zu können.

Für einen Weitwinkel mit dem Bildwinkel 45° muß wie oben erwähnt die Brennweite 1·2mal so groß sein wie die Platte. Für das Plattenformat 18×22 würde hiernach, da $H_1 H_2 = 22$ *cm* ist, die Brennweite des Objektivs 26 *cm* sein müssen oder, damit wegen des Zusammenstellens der Bilder diese etwas übereinander greifen (die Randteile des einen Bildes noch am andern erscheinen) etwa 25 *cm*. Ein zweites Objektiv von 32 *cm* Brennweite würde einen Bildwinkel von 36° geben; die Einstellungen der Kassetten wären dann in 25 beziehungsweise 32 *cm* vom Objektiv erforderlich.

Zur Orientierung der Kamera könnte eine Bussole dienen; die aus dem Photogramme erhaltenen Winkel sind aber wesentlich genauer als die mit der besten Bussole erhaltenen und so empfiehlt es sich, die Kamera mit einem kleinen Theodoliten zu einem „Phototheodoliten" zu verbinden, wodurch man unter anderem auch in die Lage versetzt wird, die Lage des Aufstellungspunktes gegenüber Fixpunkten zu bestimmen, d. i. den Aufstellungspunkt an

* Je größer die Brennweite, desto größer erscheint natürlich das Bild, desto kleiner aber auch der aufgenommene Bereich.

das Dreiecksnetz anzuschließen. In diesem Falle wird aber nur ein Objektiv beigegeben und dafür gesorgt, daß die Mattscheibe unverschieblich im Brennpunkte des Objektivs ist und die lichtempfindliche Schicht der Glasplatte beim Einsetzen genau in dieselbe Ebene fällt.

66. Der Phototheodolit. Auf einem Stativ ist der Dreifuß mit der Büchse für die vertikale Umdrehungsachse aufgesetzt; diese trägt einen Horizontalkreis und ist daher der Bau insofern einem Theodoliten ganz gleichartig. Bei den Breithauptschen Instrumenten trägt nun die Vertikalachse weiterhin ebenfalls die Träger für eine horizontale Umdrehungaschse,

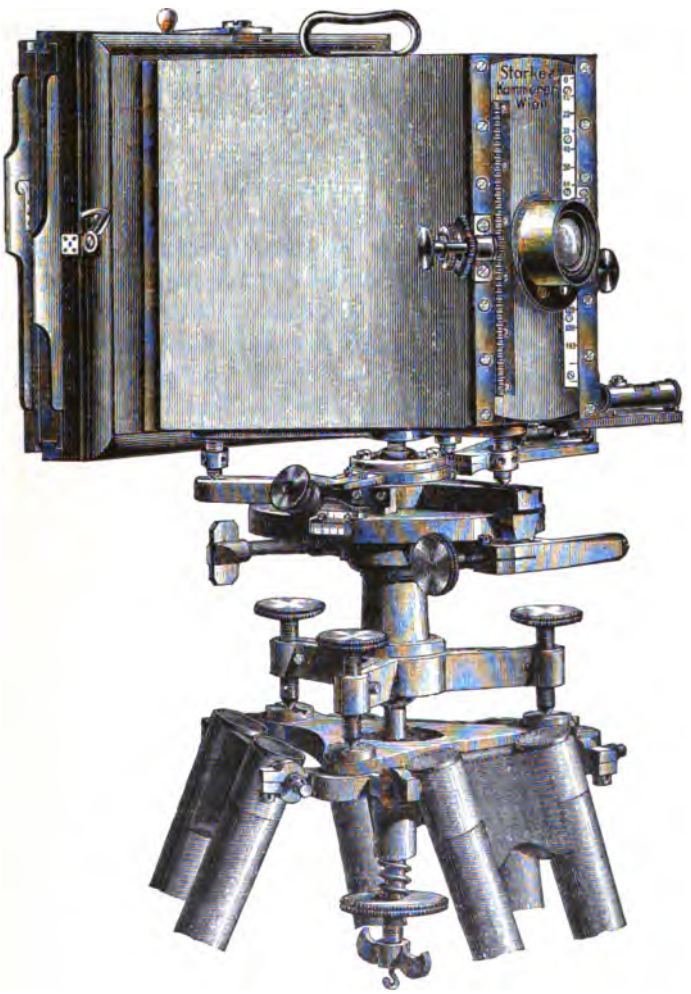


Fig. 199.

die zentrisch über der Vertikalachse der Kamera und exzentrisch auf der einen Seite das Fernrohr, auf der andern den Höhenkreis hat. Die Kamera dreht sich daher mit dem Fernrohr und die Platte wird normal zur mittleren

Visur. Starke und Kammerer bauten Instrumente, welche über der durch Rippen genügend versteiften Kamera einen eigenen kleinen Theodoliten (Fernrohr und Höhenkreis mit Alhidadenlibelle) angebracht hatten. Bei den neuen Konstruktionen (Fig. 199) von Starke und Kammerer ist eine feste Kamera, bei welcher die Visierscheibe und die lichtempfindliche Platte in fester gegenseitiger Lage bleiben und in dieser durch Sperrhaken festgehalten werden können. Da bei einer Annäherung des Objektes bis zu 100 *m*, welcher eine Verschiebung des Objektivs von nur 0·45 *mm* entsprechen würde, innerhalb dieser Grenzen auch ohne Verschiebung desselben noch scharfe Bilder entstehen, so ist die Bildweite (die Augdistanz) als konstant anzusehen, demnach die Bestimmung der Winkel aus dem Photogramme eine sehr einfache. Für ausnahmsweise Benutzung der Kamera für sehr nahe Gegenstände (bis zu 23 *m* Distanz) wird nicht die Visierscheibe verstellt, sondern das Objektiv; dieses geschieht, indem nach Lüftung einer hierzu dienenden Klemmschraube das Objektiv längs einer flachen Schraube um 2 *mm* (welcher Betrag für die obige Annäherung völlig ausreicht) herausgeschraubt werden kann. Die Entfernung wird an einer Teilung gemessen, auf welcher noch 0·1 *mm* direkt ablesbar sind.

Ein eigener Theodolit ist dem Instrumente nicht beigegeben, sondern wird durch das photographische Objektiv *O* in Verbindung mit einem in der Mitte der Visierscheibe angebrachten Okular *o* gebildet.* Da das Objektiv *O* in Höhe verstellbar ist, so wird die Neigung dieses Fernrohrs *Oo* durch Heben oder Senken des Objektivs erhalten. Die Größe der Verschiebung des Objektivs kann an einer Skala abgelesen werden, welche zur Vermeidung von Irrungen fortlaufend von 0 bis 140 *mm* geteilt ist, so daß 70·00 *mm* der Mittelstellung, d. h. der Horizontalstellung des Fernrohrs *Oo* entspricht. Ist die Verschiebung η und f die Brennweite des Objektivs, so erhält man den Höhenwinkel β aus

$$\text{tang}\,\beta = \frac{\eta}{f}.$$

Ist z. B. die Stellung des Objektivs 88·5, so ist $\eta = -18{\cdot}5$ *mm*, daher, wenn $f = 212$ *mm* wäre, $\log \text{tang}\,\beta = 8{\cdot}94083$, $\beta = 5°\ 0{\cdot}4'$.

Bei größeren Höhen wird allerdings der Umstand nachteilig, daß die Achse des Objektivs und des Okulars nicht zusammenfallen, das vom Objektiv erzeugte Bild also gleichsam von der Seite betrachtet wird. Um dem abzuhelfen, ist das Okular um eine horizontale Drehachse drehbar, in der Regel aber festgeklemmt. Bei zu starker Hebung des Objektivs wird die Klemmung des Okulars gelüftet und das Okular gegen das Objektiv hin gedreht. Bedenken würden hiergegen nur daraus erwachsen können, daß die Entfernung des Okulars vom Objektiv nicht dieselbe bleibt und daher eine Unschärfe der Bilder auftreten könnte. Der größte auftretende Höhenwinkel (für die Objektiveinstellung 0 oder 140) ist 18° 16′; diesem entspricht für die Brennweite $f = 212$ *mm* eine Entfernung $Oo = f \sec. 18° 16' = 223{\cdot}2$ *mm*, d. h. über 10 *mm* größer als in der Mittelstellung. Wenn in diesem Falle

* Zu diesem Zwecke ist die Visierscheibe in der Mitte mit einem kreisförmigen Ausschnitte versehen, in welchem das Okular durch zwei diagonale Rippen angebracht ist.

dennoch keine störende Unschärfe eintritt, so liegt die Ursache nur darin, daß die Bildmitte nunmehr um 70 *mm* von 0 entfernt (höher oder tiefer) ist und infolge der notwendigen Bildebnung auch in dieser Entfernung von der Bildmitte gerade in der zugehörigen Entfernung noch Vereinigung der gebrochenen Strahlen in derselben Bildebene stattfindet.*

Das Instrument hat zwei Paare von Kreuzlibellen, ein Paar l_1 und l_2 zur Horizontalstellung des Dreifußes (Rektifikation und Horizontalstellung nach Nr. 33) und ein Paar l_3 und l_4 an der Kamera befestigt. Von diesen letzteren ist eine l_3 parallel zur Visierscheibe; diese wird so gestellt, daß sie einspielt, wenn die durch die beiden Zähne H_1 und H_2 (Fig. 196) angegebene Horizontallinie des Rahmens wirklich horizontal ist. Da der Rahmen selbst gegen die Kamera nicht drehbar ist, so muß diese Horizontalstellung durch Benutzung der Fußschrauben der Kamera** bewirkt werden (Drehung im horizontalen Sinne nach Nr. 55, S. 134). Wenn auch die Bodenplatte der Kamera nicht ganz horizontal ist, so wird doch die Libelle l_3 in dieser Stellung zum Einspielen gebracht und nunmehr nichts geändert; das Einspielen dieser Libelle wird dann nicht die horizontale Lage der Bodenplatte der Kamera, sondern die Horizontalität der Linie H_1H_2 des Visierrahmens andeuten. Desgleichen kann die zweite Kreuzlibelle l_4 zur Horizontalstellung des Fernrohrs Oo dienen; wenn 70·00 als Mittelstellung festgehalten wird, so wird diese Linie vielleicht nicht genau mit der Bodenplatte parallel sein und das Einspielen der Libelle wird die Horizontalität von Oo (nicht aber der Bodenplatte) anzeigen.

Man könnte aber auch die Libelle zum Einspielen bringen, wenn die Bodenplatte in der Richtung Oo horizontal ist (nach Nr. 33) und in dieser Richtung die Fernrohrachse horizontal stellen (nach Nr. 56, S. 133), was aber jetzt nicht für die Mittelstellung 70·00 stattfinden wird; dann muß eine andere Stellung $70 \pm \varepsilon$ (z. B. 69·83) als Mittelstellung angesehen werden.

Andere Bedingungen: daß die Fadenebene mit der Mattfläche der Visierscheibe zusammenfällt und die Drehungsachse des Okulars durch den Horizontalfaden geht (damit dieser nicht bei der Drehung des Okulars aus der Visierscheibe heraustrete), müssen vom Mechaniker richtig gestellt werden, da Vorrichtungen zum Berichtigen etwaiger Fehler nicht vorhanden sind.

67. Das Exponieren, Entwickeln und Fixieren der Platten. Die Expositionszeit ergibt sich nach der Empfindlichkeit der Platte und dem Lichte. Man hat jetzt nur hochempfindliche Platten, bei denen die Expositionszeit kurz ist. Um Mittag bei hellem Sonnenschein nur Bruchteile einer Sekunde betragend, gegen 10^h und 3^h etwa 1—2 Sekunden, vor 10^h und nach 3^h im Winter, vor 8^h und nach 5^h im Sommer wird die Expositionszeit rasch wachsen. Gegen 9^h und 4^h nachmittags ist aber im Sommer die Luft am ruhigsten, so daß ohne Schaden für die Aufnahme eine längere

* Würde das Objektiv ebenfalls so gedreht werden, daß seine Achse gegen das anvisierte Objekt und das Okular gerichtet ist, dann müsste allerdings die Entfernung Oo jederzeit auf 212 *mm* gebracht werden.

** Diese sind durch einen Dorn zu drehen, während die Schrauben des Dreifußes die gewöhnliche Form haben.

Expositionszeit gewählt werden kann. Um die Mittagsstunde im Sommer werden die Aufnahmen nicht sehr günstig, da sich zu scharfe Schattengrenzen ergeben, helle Partien rasch durch- und selbst überexponiert werden, hingegen im Dunkeln wenige Details erscheinen. Genauere Angaben lassen sich nicht leicht geben, da auch die Öffnung und Güte des Objektivs einen maßgebenden Einfluß haben. Größere, lichtstarke Objektive erfordern natürlich kürzere Expositionszeiten. Jeder wird nach einigen Versuchen die seinem Objektive und seinen Platten entsprechende Expositionszeit finden.

Als Entwickler sind ziemlich viele, sehr gute in Verwendung; auch sind solche in Pulverform käuflich, die nur in Wasser gelöst zu werden brauchen, um sofort verwendbar zu sein. Will man sich den Entwickler selbst herstellen, so kann eines der folgenden Rezepte dienen:

A) Pyrogallolentwickler:

I. 100 *g* Natriumsulfit, gelöst in
500 *g* kalten destillierten Wassers; dann (etwa nach 2—3 m) werden
14 *g* Pyrogallol zugesetzt und nach der Lösung
5—10 Tropfen konzentrierter Schwefelsäure (oder 20—40 Tropfen verdünnter Schwefelsäure 1 : 4);

II. 50 *g* kristallisiertes kohlensaures Natron, chemisch rein, gelöst in
500 *g* kalten destillierten Wassers.

Für den Gebrauch werden 20 cm^3 der Lösung I mit 20 cm^3 der Lösung II und 20 cm^3 Wasser gemischt.

B) Eikonogenentwickler:

500 *g* destilliertes Wasser,
50 *g* schwefeligsaures Natron,
40 *g* kohlensaures Natron, kristallisiert,
12 *g* Eikonogen.

Für den Gebrauch wird der Entwickler mit Wasser zu gleichen Teilen gemengt.

C) Hydrochinonentwickler:

500 *g* Wasser,
30 *g* schwefeligsaures Natron,
20 *g* kohlensaures Natron, kristallisiert,
7·5 *g* Hydrochinon.

Für den Gebrauch zu gleichen Teilen mit Wasser zu mengen.

D) Kombinierter Metol-Hydrochinonentwickler:

I. 1000 *g* Wasser,
200 *g* schwefeligsaures Natron,
15 *g* Hydrochinon,
5 *g* Metol,

II. 1000 *g* Wasser,
100 *g* kohlensaures Natron, kristallisiert.

Für den Gebrauch 20 cm^3 der Lösung I mit 20 cm^3 der Lösung II und 40 cm^3 Wasser zu mengen.

Es ist gut, stets erst mit altem Entwickler die Spitzlichter herauszuholen, dann mit altem Entwickler durchzuentwickeln. Allzu große Härte bei zu raschem Entwickeln schadet wohl der Schönheit des Bildes, ist aber hier ziemlich belanglos, doch kann diesem Mangel durch Zusatz von 3—10 Tropfen zehnprozentiger Bromkaliumlösung (50 cm^3 Wasser, 5 g Bromkalium) vorgebeugt werden.

Soll Pyrogallolentwickler wiederholt gebraucht werden, so muß er in gut verschlossenen Flaschen aufbewahrt werden; auch ist es gut, ihn für diesen Fall mit destilliertem Wasser (nicht mit Brunnenwasser) zu verdünnen.

Als Fixierbad dient 1 Teil Fixiernatron (unterschwefeligsaures Natron) in 4 Teilen Wasser.

Zum Härten der Schichten ist es gut, die Platten zum Schluß in einem Alaunbad (3—5 Teile Alaun in 100 Teilen Wasser) 5—10 Minuten zu baden.

Beim Entwickeln müssen die Tassen stets gut geschwenkt werden, damit der Entwickler gleichmäßig überallhin gelange, da sich sonst scharfe Linien bilden, welche die stärker entwickelten Teile von den weniger mit Entwickler bedeckten trennen. Nach dem Entwickeln wird die Platte wiederholt im Wasser, am besten in fließendem Wasser, gewaschen. Die Platte erscheint nach dem Entwickeln von rückwärts besehen weißlich grau und bleibt so lange im Fixierbade, bis sie bei auffallendem Lichte schwarz (im durchfallenden Lichte vollständig durchsichtig) erscheint. Während des Entwickelns wird nur das dunkelste rote Licht benutzt; ist die Platte nahe durchfixiert, so kann sie bei etwas stärkerem, gelbem Lichte geprüft werden.

Nach dem Fixieren wird sie wieder gut gewaschen, im Alaunbad gehärtet, neuerdings gewaschen und dann zum Trocknen aufgestellt.

l) Instrumente für Wassermessungen.

68. Messung von Geschwindigkeiten in Gewässern. Zur vollständigen Terrainaufnahme gehört auch die Bestimmung der Stromgeschwindigkeiten. Die einfachste Methode hierzu ist diejenige mittels der Schwimmkugel. Eine im Wasser schwimmende Kugel, welche zu diesem Zwecke hohl und so schwer ist, daß sie bis auf einen kleinen aus dem Wasser herausragenden Ansatz sich vollständig unter Wasser befindet, wird an einem bestimmten Punkte A ins Wasser geschleudert, dann an einem andern Orte B in der Entfernung E von A herausgezogen. Wurden die Zeiten notiert, welche die Kugel zur Zurücklegung dieser Strecke benötigte, so erhält man daraus die Geschwindigkeit des Wassers. Sei die Entfernung 100 m ausgesteckt worden und die Zwischenzeit 30 Sekunden, so ist die Geschwindigkeit $3\frac{1}{3}$ m pro Sekunde. In Ermanglung einer Kugel kann man auch ein an einem Stricke befestigtes Brettchen verwenden, welches senkrecht zur Stromrichtung eingesenkt wird. Dieses ist nichts anderes als die auch auf Schiffen angewandte Methode zur Bestimmung der Fahrgeschwindigkeit der Schiffe. Das Brett, ein hölzernes Dreieck, dessen Basis mit Blei ausgelegt ist, damit es aufrecht schwimmt, heißt in diesem Falle das Log; die Schnur, die Logleine, ist auf einer Welle aufgewickelt und man läßt dieselbe durch 30^s ablaufen. Das Log wird dabei wegen seiner zur Fahrtrichtung senk-

rechten Stellung nicht mitgerissen, sondern bleibt nahe unbeweglich und es wickelt sich daher vermöge der Fortbewegung des Schiffes in 30^s ein Stück der Logleine ab. Diese ist in Teile nahe gleich $\frac{1}{120}$ Seemeile, Knoten genannt, geteilt. Hat das Schiff z. B. 19 Knoten in 30^s zurückgelegt, so wird es in einer Stunde d. i. in 30×120^s 19×120 Knoten, d. i. 19 Seemeilen zurücklegen, wenn das Log unbeweglich und 1 Knoten $= \frac{1}{120}$ Seemeile wäre. Das Log folgt aber erfahrungsgemäß dem Schiffe etwas und dadurch würde die „gesegelte Distanz" etwas zu klein erhalten, weshalb ein Knoten etwas kleiner, nämlich $14{\cdot}6\,m$ (statt $15{\cdot}4\,m$) gemacht wird; dann gilt direkt die Regel: So viele Knoten das Schiff in einer halben Minute zurücklegt, so viele Seemeilen legt es in der Stunde zurück. Dabei hat man übrigens die Vorsicht zu gebrauchen, die Zählung erst zu beginnen, wenn das Log außerhalb des Kielwassers ist, da dasselbe vorher noch an der Bewegung des Schiffes teilnimmt. Zu diesem Zwecke beginnt die Teilung der Logleine in Knoten erst in einer gewissen Entfernung vom Log, welche so bemessen ist, daß dasselbe dann außerhalb des Kielwassers ist.

Um für Stromgeschwindigkeiten die Zeit möglichst sicher zu erhalten, kann man sich dabei der „Anker-Chronographen" bedienen, welche durch einen Druck auf einen Stift in Bewegung gesetzt werden, durch einen zweiten Druck zum Stehen gebracht werden, während bei einem dritten Druck der Zeiger wieder auf Null springt. Beim Einwerfen der Schwimmkugel wird die Uhr in Bewegung gesetzt, beim Herausziehen zum Stillstand gebracht, so daß die Zwischenzeit leicht und bequem abgelesen werden kann.

Ein anderes Instrument zu diesem Zwecke ist der Stromquadrant. Senkt man ein Pendel in die Strömung, so wird dasselbe durch diese aus der Vertikalebene abgelenkt, und zwar um so stärker, je größer die Geschwindigkeit ist. Der Wasserdruck ist nämlich proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit; ist diese v, so findet man den Wasserdruck $p = cv^2$, wobei c eine für ein gewisses Instrument konstante Größe ist. Nebst diesem Wasserdruck wirkt auf die Kugel noch ihr Gewicht q und die Kugel wird sich so stellen, daß der Aufhängefaden in die Richtung der Resultierenden der beiden Kräfte fällt. Es wird daher (Fig. 200)

$$\text{tang } \alpha = \frac{p}{q} = \frac{c}{q} v^2,$$

daher

$$v = \sqrt{\frac{q}{c}} \sqrt{\text{tang } \alpha}.$$

Da das Gewicht q der Kugel ebenfalls ein für das Instrument konstantes ist, so wird $\sqrt{q:c} = k$ gleichfalls konstant, folglich

$$v = k \sqrt{\text{tang } \alpha}.$$

Um v zu bestimmen, muß daher zunächst k ermittelt werden, was durch Vergleichung der Ablenkungen α bei gewissen auf andere Weise ermittelten Getchwindigkeiten geschehen kann. Sei z. B. gefunden, daß für die oben bestimmte Geschwindigkeit sich ein Ablenkungswinkel $\alpha = 14°$ ergibt, so folgt

$$k = \frac{v}{\sqrt{\text{tang } \alpha}} = \frac{3\frac{1}{3}}{\sqrt{0{\cdot}25}} = \frac{20}{3}$$

und dann wird für dieses Instrument $v = \frac{20}{3}\sqrt{\text{tang } \alpha}$.

An diesem Instrumente gemessenen Ablenkungswinkeln von 5°, beziehungsweise 26° würden daher Geschwindigkeiten von $\frac{20}{3}\sqrt{0{\cdot}09} = 2\,m$, $\frac{20}{3}\sqrt{0{\cdot}49} = 4\frac{2}{3}\,m$ pro Sekunde entsprechen.*

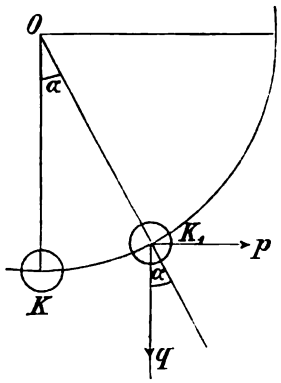


Fig. 200.

Die genauesten Bestimmungen gibt der hydrometrische Flügel von Woltmann. An einer in der Richtung der Strömung gestellten Achse (Fig. 201) befindet sich senkrecht dazu ein Querstab, der zwei unter 45° gegen die Strömung gestellte, gegeneinander senkrechte Blättchen, den Fähnchen einer Windmühle ähnlich, trägt.** Von der Strömung werden diese in Drehung versetzt, und zwar um so rascher, je größer die Geschwindigkeit ist; die Drehungen werden durch eine Schraube ohne Ende auf ein Zählwerk übertragen.

Damit sich die Achse stets in die Stromrichtung stellt, trägt der Apparat auf der den Flügeln entgegengesetzten Seite eine größere Platte, welche sich wie ein Steuer in die Stromrichtung stellt, da sie bei der geringsten Verschiebung durch den Druck des fließenden Wassers wieder in diese Lage zurückgebracht wird.

Fig. 201.

Um die Zahl der Umdrehungen in einer bestimmten Zeit zu erhalten, muß man zu gewissen Momenten das Zählwerk ein- und ausschalten können, was dadurch bewirkt wird, daß das Zählwerk bei festgelegter Achse durch Nachlassen einer nach oben geführten Schnur eingesenkt oder aber die Achse bei festgelegtem Zählwerk etwas gehoben, in beiden Fällen die

* Eine andere, kompliziertere Einrichtung, die auf dem Prinzip des hydraulischen Druckes beruht, ist die Pitotsche Röhre, welcher Reichenbach eine besondere Form gegeben hat, der Reichenbachsche Strommesser (s. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, I. Bd. S. 550).

** Bei größeren sind auch zwei aufeinander senkrechte Querstäbe mit vier Blättchen.

Schraube ohne Ende von dem Übersetzungsrade getrennt beziehungsweise damit in Verbindung gesetzt werden kann. Bei den neuen Instrumenten wird die Auslösung und Arretierung auch auf elektrischem Wege besorgt (System Harlacher), was namentlich für Messungen in größeren Tiefen von besonderer Wichtigkeit ist.

Ein wesentlicher Umstand für die Genauigkeit des Instruments ist die leichte Beweglichkeit der Flügel; Ott verfertigt deshalb die Achse aus einer besonders widerstandsfähigen und dem Rost nicht unterworfenen Nickellegierung, wodurch die Flügel einen überaus leichten Gang erhalten.

Zum Gebrauche wird der Flügel an einer vertikalen Stange, an welcher er festgeklemmt ist, ganz ins Wasser versenkt und dort die Strömung durch eine bestimmte Zeit auf das Zählwerk wirken gelassen. Die Geschwindigkeit v des Wassers wäre der Zahl der Umdrehungen n in der Sekunde proportional, also $v = cn$, wenn die Achse ohne Reibung liefe. Infolge der Reibung wird der Flügel aber bei einer gewissen kleinen Geschwindigkeit noch ruhig bleiben und es wird allgemein

$$v = cn + c_1,$$

wobei c_1 eben jene kleine Geschwindigkeit ist, bei welcher er noch in Ruhe bleibt. Die Konstanten c und c_1 müssen aus Beobachtungen ermittelt werden, indem man für verschiedene, genau bekannte Geschwindigkeiten die Drehungszahlen n abliest.

69. Wasserstandsmessungen. Der Wasserstand in offenen Gewässern ist stets ziemlich starken Schwankungen ausgesetzt. Selbst abgesehen vom Wellenschlage wird auch der ruhige Wasserspiegel solche Änderungen durch die Ebbe und Flut erfahren. Was wir daher „Seehöhe“ nennen, muß sich auf einen „mittleren Wasserstand“ beziehen; aber um diesen zu erhalten, muß der jeweilige Stand beobachtet werden; Instrumente jeder Form, die diesem Zwecke dienen, heißen Pegel.

Als solcher kann schon jede mit dem Erdboden fest verbundene, in das Wasser eingesenkte Stange von entsprechender Länge dienen, die mit einer Zentimeterteilung versehen ist. An Steilküsten kann die Teilung auf einer zu diesem Behufe eben abgeschliffenen Felsenwand, an Quaimauern direkt an diesen angebracht werden. Drei- oder fünfmal des Tages, wenn nötig stündlich, wird der Stand des Wassers abgelesen und daraus dann in einfacher Weise der mittlere Stand erhalten.

Die Beobachtung wird erleichtert, wenn man die Veränderungen des Niveaus durch Übersetzungen in geeigneten Beobachtungsräumen ersichtlich macht. Wird in das Wasser ein Schwimmer eingesetzt, der beständig an der Oberfläche bleibt und wird an ihm eine Schnur befestigt, diese über eine feste Rolle geführt und durch eine Feder oder über einer zweiten Rolle durch ein Gegengewicht äquilibriert und schwach gespannt, so daß sie dem Steigen und Fallen des Niveaus folgen muß, so gibt das zweite Ende der Schnur oder ein an irgend einem Punkte der Schnur befestigter Zeiger ein getreues Bild der Niveauänderungen in unveränderter Größe. Bei starken Flutschwankungen stellt man diese in verkleinertem Maße dar, indem man

die erwähnte Schnur über ein größeres Rad führt, welches den Bewegungen unverändert folgt und an diesem eine kleinere Welle befestigt, welche die Bewegungen des Rades mitmacht, die dann auf eine zweite Schnur übertragen werden. Hierbei werden die Niveauänderungen im Verhältnisse des Halbmessers der Welle zu demjenigen des Rades verkleinert wiedergegeben. Ist z. B. der Halbmesser des Rades dreimal so groß wie derjenige der Welle, so erscheinen die Niveauänderungen auf $\frac{1}{3}$ ihrer wahren Größe verkleinert.

Die Lesungen können ganz erspart werden, wenn die Schnur, an welcher die Beobachtungen gemacht werden, an Stelle des Index einen Schreibstift trägt, der je nach dem Stande des Niveaus an verschiedenen Stellen steht und dieses unmittelbar auf eine darunter liegende Papierfläche aufzeichnet. Nur muß letztere sich senkrecht zur Schnur bewegen, damit der Stift durch das Hin- und Hergehen nicht eine gerade Linie beschreibt. Denkt man sich auf einer Papierfläche eine Reihe paralleler Linien gezogen und diese in der Richtung der Schnur gelegt; bewegt sich das Papier senkrecht zu dieser Richtung unter der Schnur gleichmäßig durch, so wird z. B. nach je zehn Minuten eine andere Linie unter der Schnur liegen und auf dieser wird der Stift den diesem Zeitmomente entsprechenden Stand des Niveaus verzeichnen. Bei kontinuierlicher Bewegung zeichnet der Stift eine krumme Linie, bei welcher die Zeit als Abszissen und die jeweilige Höhe des Niveaus als Ordinaten auftreten. In der mechanischen Ausführung wird statt eines ebenen Papierblattes eine mit Papier belegte zylindrische Rolle oder Walze gewählt, die in gleichmäßiger Rotation erhalten wird.

m) Pendel und Uhren.

70. Das Pendel. Zu den Aufgaben der höheren Geodäsie gehören nebst den Längen- und Winkelmessungen auch noch Schweremessungen mit Hilfe von Pendelbeobachtungen. Die Schwingungszeit eines Pendels ist gegeben durch

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

wenn l die Länge des Pendels und g die Beschleunigung der Schwerkraft ist. Man kann daher g bestimmen, wenn man die Schwingungszeit t eines Pendels von bekannter Länge l beobachtet. Aus der Beobachtung einer größeren Zahl n (z. B. 100) Schwingungen, zu welchen die Zeit T (z. B. 98^s) erforderlich ist, folgt die Schwingungszeit

$$t = \frac{T}{n}$$

(in diesem Beispiele $0{\cdot}98^s$). Zur Bestimmung der Zeit T aber muß man eine gut gehende Uhr haben, deren Gang übrigens genau bestimmt werden muß, zu welchem Zwecke Zeitbestimmungen gemacht werden.

Weniger einfach wird die Bestimmung der Pendellänge l, da man es nie mit einem einfachen Pendel zu tun hat und das zusammengesetzte Pendel aus einer unendlichen Anzahl von Punkten besteht, die, wenn jeder für sich schwingen würde, durchgehends verschiedene Schwingungszeiten haben würden.

Da aber sämtliche Punkte fest untereinander verbunden sind, so werden die näher zur Achse (Pendelaufhängung) P (Fig. 202) gelegenen durch die tiefer befindlichen in ihrer Bewegung gehemmt, die tiefer gelegenen beschleunigt. Dazwischen wird ein Punkt Q liegen, der genau so schwingt, als ob er allein vorhanden wäre. Man nennt ihn den Schwingungsmittelpunkt; ist L sein Abstand von der Schneide, so ist L die Länge des einfachen Pendels, welches dieselbe Schwingungszeit hat, wie das ganze, zusammengesetzte Pendel; man nennt L die reduzierte Länge des Pendels.

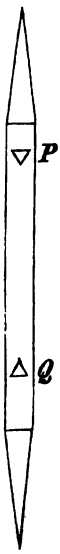


Fig. 202.

Es läßt sich nun theoretisch dartun, daß, wenn man in diesem Punkte Q eine zweite Pendelschneide anbringt, das Pendel umkehrt, so daß jetzt P unten und es in Q aufgehängt ist, es dieselbe Schwingungszeit hat. Man braucht daher nur die eine Schneide fest, die zweite veränderlich zu machen und diese so lange zu verschieben, bis sich für das Pendel in beiden Aufhängungsarten genau dieselbe Schwingungszeit ergibt; der Abstand der beiden Schneiden in dieser Lage ergibt die zur beobachteten Schwingungszeit gehörige reduzierte Länge (Reversionspendel).

So einfach allerdings gestalten sich die Beobachtungen und ihre Reduktionen nicht. Die Länge des Pendels wird beeinflußt von der Temperatur; die Schwingungszeit des Pendels hängt außerdem noch von der Größe der Amplitude, vom Luftdruck, ja selbst von der Luftfeuchtigkeit (Helmert) von der Aufhängevorrichtung, Mitschwingen des Stativs (Bessel), von lokalen Störungen (Einfluß der Lotablenkungen, wie Verfasser gezeigt hat) ab, so daß Pendelbeobachtungen zu den feinsten und subtilsten Beobachtungen der höheren Geodäsie gehören. Auch werden absolute Schwerebestimmungen nur an wenigen Orten ausgeführt und gehören nicht zu den laufenden Beobachtungen des Geodäten, können daher hier übergangen werden.

Anders verhält es sich mit relativen Schwerebestimmungen. Wenn man dasselbe Pendel an verschiedenen Orten schwingen läßt, so fällt ein wichtiges, schwer zu bestimmendes Element, die Länge, völlig heraus; man bekommt dann allerdings nicht die absolute Größe der Schwerkraft, sondern nur das Verhältnis derselben an verschiedenen Punkten, da ja für zwei Punkte, an welchen die Schwere g_1, g_2 wäre, mit den beobachteten Schwingungszeiten t_1, t_2

$$g_1 : g_2 = t_2^2 : t_1^2$$

folgt. Der geringe Einfluß der Längenänderung bei verschiedenen Temperaturen, der Einfluß des Luftdruckes, des Mitschwingens des Stativs, werden wohl vollständig in Rechnung gezogen, sind aber nur durch ihre Unterschiede von Einfluß, während der dabei auftretende, möglicherweise unrichtige absolute Betrag derselben nur auf den absoluten Betrag der Schwerkraft selbst einwirkt, dessen Kenntnis aber ohnedies hierbei nicht erlangt wird.

Derartige relative Schwerebestimmungen erfordern ein unveränderliches und leicht transportables Pendel. Oberst v. Sterneck wählte für diese von Airy herrührende Methode Halbsekundenpendel, die mit ihren Schneiden auf

passenden aus Rotguß hergestellten Stativen aufgesetzt werden.* Pendel und Stativ sind leicht transportabel. Das Stativ Rr (Fig. 203) wird mittels drei Fußschrauben auf eine Platte P aufgestellt, welche auf einen massiven, gemauerten Pfeiler aufgesetzt wird; das Pendel g ruht mit der unten scharf zugeschliffenen Kante der Träger AA_1 auf einer am oberen Stativringe r eingelassenen Achatplatte; zum Horizontalstellen dient die Wasserwage W, zur Bestimmung der Temperatur das Thermometer T. Zur Beobachtung der

Fig. 203.

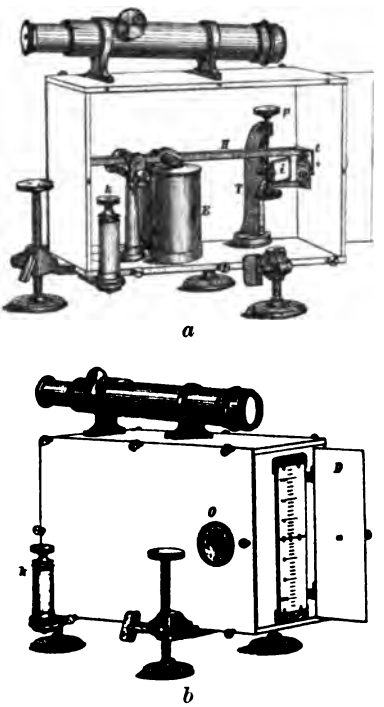


Fig. 204.

Schwingungen dient ein Spiegel s, in welchem mittels eines Fernrohrs F (Fig. 204) aus größerer Entfernung eine neben demselben angebrachte Skala M beobachtet wird. Diese scheint sich dabei wegen der schwingenden Bewegung des Spiegels auf und ab zu bewegen. Sie ist an der vorderen, verglasten Seite eines Kästchens (Fig. 204b) und muß daher von rückwärts beleuchtet werden. Zwischen der Lichtquelle (die übrigens seitlich und außerhalb des Bereiches des Fernrohrs steht und deren Licht daher durch einen Spiegel i gegen den Nullpunkt der Skala geworfen wird) und der Skala befindet sich aber ein feiner Spalt m in einer Blende, der nur einen kleinen Teil der Skala beleuchtet und dieser wird je nach der Stellung des Spiegels über oder unter dem Horizontalfaden des Fernrohrs sichtbar sein. Ein zweiter Spalt ist beweglich, daher wird durch die Blende das Licht

* Am einfachsten wäre es allerdings, ein solches Pendel direkt als Uhrpendel zu verwenden und den Gang der Uhr an verschiedenen Punkten zu bestimmen. Wegen des Einflusses äußerer Umstände, des Uhrwerks, der weniger sicheren Aufhängung usw. wird aber das Pendel von der Uhr selbst getrennt.

abgehalten und die Skala nur dann gesehen, wenn der bewegliche Spalt eben zwischen dem festen und o hindurchgeht.

Der Spalt t wird nun durch einen Elektromagneten vorüberbewegt, der mit einer Uhr elektrisch verbunden ist, so daß der Spalt in jeder Sekunde zweimal (einmal hinauf, einmal herunter) durch seine Mittelstellung hindurchgeht. Es werden daher in jeder Sekunde zwei Lichtbilder gesehen,* aber je nach der Stellung des Spiegels s an immer andern Orten des Gesichtsfeldes; nur dann, wenn gleichzeitig der Spalt durch seine Mittelstellung und das Pendel durch die Ruhelage gehen, wird das Bild des Nullpunktes der Skala am Mittelfaden sichtbar. Hätten Uhr und Pendel genau gleichen Gang, so würden diese „Koinzidenzen" entweder nie gesehen werden können (d. h. das Lichtbild würde stets an demselben Punkte ober- oder unterhalb des Mittelfadens erscheinen) oder, wenn sie einmal gesehen würden, jedesmal (am Mittelfaden). Da aber immer ein gewisser Gangunterschied besteht, so werden derartige Koinzidenzen nur in größeren Zeitintervallen stattfinden und aus diesen kann man die Schwingungszeit des Pendels rechnen. Findet nach je n Sekunden eine Koinzidenz statt, so hat das Pendel in der Zwischenzeit eine Schwingung mehr oder eine Schwingung weniger gemacht als die Uhr, daher ist die Schwingungszeit $\left(\frac{n}{n \pm 1}\right)$ Sekunden.

71. Uhren, Chronometer. Die besten und verläßlichsten Uhren sind Pendeluhren; doch können dieselben nur in fester Aufstellung, in Sternwarten, angebracht werden; für den Transport eignen sie sich nicht. Bei den festen Uhren ist die treibende Kraft ein Gewicht; der Uhr würde durch das Herabfallen desselben eine beschleunigte Bewegung erteilt werden, welche durch eine Hemmung in eine gleichmäßige verwandelt wird. Die Hemmung wird hierbei durch ein Pendel bewirkt, das einen Anker bewegt, welcher abwechselnd zu beiden Seiten in die Zähne des Steigrades eingreift und so eine durch die Schwingungszeit des Pendels bedingte Regelmäßigkeit des Ganges bewirkt.

Da die Pendellänge von der Temperatur abhängig ist, so wird es auch der Uhrgang sein und um die allzugroße Ungleichheit desselben bei verschiedenen Temperaturen hintanzuhalten, wird eine Temperaturkompensation angebracht. Bei feinen Uhren ist gegenwärtig ausschließlich Quecksilberkompensation gebräuchlich. Das Pendel besteht aus einer Metallstange, welche unten ein Gefäß mit Quecksilber trägt; bei höherer Temperatur würde durch Ausdehnung der Stange die Schwingungszeit verlangsamt; die viel stärkere Ausdehnung des Quecksilbers bewirkt, daß der Schwingungsmittelpunkt gehoben wird und durch passende Wahl der Quecksilbermenge kann eine fast vollständige Kompensation erzielt werden. Wird zu viel Quecksilber verwendet, so kann auch eine scheinbare Verkürzung, d. h. eine Beschleunigung des Uhrganges bei steigender Temperatur resultieren; man nennt dann die Uhr überkompensiert.

* Von denen jedoch nur eins zu beobachten ist, nämlich dasjenige, welches dem Abreissen des Ankers entspricht, da dieses viel präziser ist als das dem Anziehen desselben entsprechende.

Wesentlich schwieriger sind diese Einrichtungen bei den Taschenuhren, Chronometern. Die treibende Kraft ist eine gespannte Feder; der Regulator ist ein Metallring (die Unruhe oder Balance), der durch eine andere Feder in schwingende Bewegung versetzt wird. Die Kraft der ersten Feder hängt von ihrer Spannung ab und ist daher nach dem Aufziehen am größten. Teilweise wird eine Ausgleichung dadurch erzielt, daß die Feder nicht zylindrisch, sondern auf einer Schnecke aufgewickelt ist, doch bleibt es immer für den gleichmäßigen Gang nötig, die Uhr immer zur selben Zeit aufzuziehen.

Die Schwingungszeit der Unruhe hängt ebenfalls wie beim Pendel von der Größe ab; daher auch von der Temperatur. Bei höheren Temperaturen wird Verlangsamung des Ganges auftreten, da sich die Teile derselben vom Mittelpunkte entfernen. Temperaturänderungen von 1° können schon Gangänderungen von über 10^s im Tage erzeugen. Man muß daher ebenfalls auf Kompensation bedacht sein. Diese wird in folgender Weise bewirkt: Zwei Halbringe aQ, bQ (Fig. 205), die aus je zwei Metallen von verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten (Stahl n und Messing m) der ganzen Länge nach aneinandergelötet, bestehen, werden an der einen Seite an einem Arme A befestigt und tragen an den andern, freien Enden Gewichte Q. Bei höherer Temperatur dehnt sich die ganze Unruhe aus, allein durch die stärkere Ausdehnung des Messings werden die Halbringe nach einwärts gebogen, daher die Gewichte Q dem Mittelpunkte genähert. Durch passende Wahl der Größe der Gewichte, ihrer Lage (stärkeres oder schwächeres Einschrauben) kann ebenfalls nahe vollständige Kompensation erzielt werden, allein immerhin nur innerhalb nicht allzu großer Temperaturgrenzen.

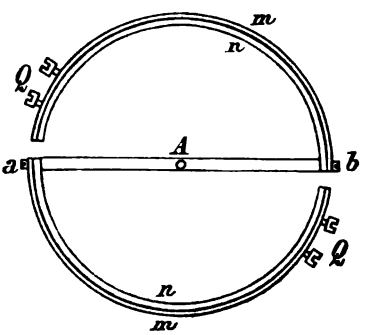


Fig. 205.

Für Chronometer ist es daher notwendig, allzuweite Temperaturextreme möglichst zu vermeiden. Das Chronometer kommt in ein schützendes Kästchen (Boxchronometer), in welchem es auch seine Lage möglichst beibehält, horizontal liegt. (Cardanische Aufhängung um zwei auf einander senkrecht stehende Achsen für Schiffschronometer.) Dieses ist aus dem Grunde nötig, weil der Gang des Chronometers auch von seiner Lage abhängig ist, indem der veränderte Druck der Feder auf die Unterlage und Zapfen und die veränderte Stellung der Unruhe nicht ohne Einfluß sind. Wohl werden Chronometer so kompensiert, daß sie möglichst in jeder Lage gleichen Gang zeigen, doch ist dieses in aller Strenge nur höchst selten erreicht.

Auch die gegenseitige Verbindung von Unruhe und Uhrwerk ist nicht gleichgültig. Die Hemmung soll möglichst kurze Zeit auf die Unruhe wirken, um den Gang der Uhr möglichst wenig zu beeinflußen; dieses leisten am besten die sogenannten „freien Federhemmungen", welche daher bei den feineren Chronometern ausschließlich in Verwendung kommen. Diese Chronometer kommen aber nie von selbst in Gang und müssen daher, falls

sie stehen bleiben, nach dem Aufziehen durch zwei bis drei Drehungen des Chronometers im Sinne der Schwingungen der Unruhe erst in Gang gesetzt werden. Ebenso kann ein Chronometer durch eine einzige rasche Drehung in diesem Sinne zum Stehen kommen.

Von besonders störendem Einfluß sind plötzliche Erschütterungen und diese wirken nachteiliger auf Uhren mit großer Unruhe (Halbsekundenschläger) als auf die kleineren Unruhen des Taschenchronometers (mit 0·2 bis 0·4^s Schwingungszeit). Um diesen Einfluß beim Transport möglichst zu vermindern, kommt das Kästchen des Chronometers noch in ein zweites gut ausgepolstertes Kästchen, in welchem durch die weiche unelastische Unterlage die Stöße fast vernichtet werden. Noch störender sind regelmäßige periodische Schwingungen der Uhr, da diese sich zu den Schwingungen der Unruhe addieren, den Gang beschleunigen oder verzögern können. Derartige periodische Schwingungen können aber schon in der cardanischen Aufhängung stattfinden. Bei Landtransporten wird man daher besser tun, die Cardansche Aufhängung zu klemmen und anderseits dafür zu sorgen, daß die Uhr möglichst in derselben Lage erhalten bleibe (Aufhängung an Sattelbändern, in Taschen usw.). Dies ist von Wichtigkeit, wenn man (zur Längenübertragung) die Uhr während des Transportes im Gang erhalten muß; soll dieselbe jedoch während einer längeren Zeit außer Gang gestellt werden (Transport nach einem entfernten Bestimmungsorte), so läßt man sie ablaufen und legt unter die Unruhe einen dünnen Papierstreifen, der die Schwingungen hemmt.

Auf Forschungsreisen ist es am besten gute Taschenchronometer in der Tasche zu tragen, wo sie selbst beim Reiten nur wenig den Erschütterungen ausgesetzt sind, wo sie in ziemlich gleichmäßiger Temperatur erhalten werden können und sich stets in derselben (vertikalen) Lage befinden. Doch wird man sich nie auf den Gang eines einzigen Chronometers verlassen und darnach streben, deren mindestens zwei zur Verfügung zu haben.

II. ABTEILUNG.

Niedere Geodäsie.

A. Skizzieren.

72. Nicht immer ist man in der Lage mit vollkommenen Instrumenten Aufnahmen zu machen. Insbesondere der Forschungsreisende wird sehr oft auf recht bescheidene Mittel angewiesen sein; er wird sich auf seinen Reisen mit Skizzen begnügen müssen, wenn auch gerade die photographischen Methoden ihm eine raschere und präzisere Aufnahme gestatten. Anderseits wird aber auch der Geometer, der über die besten und zuverlässigsten Hilfsmittel verfügt, ehe er an die wirkliche Aufnahme geht, sich einen vorläufigen Überblick über das aufzunehmende Gebiet zu verschaffen suchen, da er erst hierdurch eine zweckmäßige Wahl der Fixpunkte treffen kann. Ein guter Zeichner wird auch befähigt sein, das sich ihm darbietende perspektivische Bild rasch zur Darstellung eines Planes zu verarbeiten. Richtige Schätzungen durch das Augenmaß, Berücksichtigung der Größe und Helligkeit der Objekte, der Luftperspektive gestatten eine nach Maßgabe der Übung recht brauchbare Aufnahme des überblickten Terrains von einem einzigen Punkte wobei man auch die Richtungen nach den einzelnen Objekten ohne Zuhilfenahme irgendwelcher Visiervorrichtungen unter den richtigen Winkeln aufzunehmen bestrebt sein muß.

Die Aufzeichnung findet dabei sofort auf einem kleinen Zeichenblatt statt, welches auf einem kleinen Brettchen, dem sogenannten Detaillierbrettchen, Brouillon- oder Skizzenbrettchen aufgespannt ist (vgl. Fig. 188). Statt dessen wird auch ein Block mit einer größeren Anzahl von Blättern auf Reisen gute Dienste leisten. Immer aber wird man neben der Zeichnung noch Aufschreibungen in ein Notizbuch, Manuale, vornehmen, welches die Zeichnung ergänzen muß. Eine nähere Beschreibung der anvisierten Objekte, besondere Eigentümlichkeiten, wie Bodenbeschaffenheit in den einzelnen Gegenden, Art des Weges, geschätzte Entfernungen, Andeutungen über die bei der Schätzung derselben maßgebenden Umstände: Reinheit der Luft Helligkeit und Deutlichkeit des Bildes usw., werden später bei weiterer

Ausarbeitung der Skizzen sehr wertvolle Behelfe bilden, namentlich dann, wenn die von verschiedenen Punkten aus aufgenommenen Skizzen etwas differieren, so daß man einzelne Änderungen vorzunehmen gezwungen ist, um die Skizzen in Übereinstimmung zu bringen.

Wesentlich unterstützt werden diese Aufnahmen durch einen Kompaß und Distanzmesser. Ist das Blatt einmal orientiert, hat man in der Nord-Südrichtung eine Linie gezogen, so kann diese durch den Kompaß stets festgehalten werden und die anderen Richtungen werden à la vue oder mit Hilfe eines kleinen Diopterlineals eingezeichnet, die Entfernungen der Objekte mit dem Distanzmesser ermittelt. Alles Notwendige vereinigt findet sich in den kleinen Tachymeterlinealen, wobei man aber eine Distanzlatte nicht entbehren kann.

Für erste Skizzen wird selbst dieses zu umständlich, vorzugsweise wegen des Zeitverlustes, der durch das Abschreiten des Gehilfen von einem anzuvisierenden Punkte zum andern stattfindet. Der Forschungsreisende kann sich meist dieser Hilfsmittel überhaupt nicht bedienen, da er über die Zugänglichkeit oder Unzugänglichkeit der anvisierten Objekte im unklaren ist, ja in den meisten Fällen die Latte nicht verwenden kann, weil in unbekannten Gebieten ein einzelner Gehilfe oder selbst ein kleiner Truppenteil sich nie zur Aufstellung mit derselben allzuweit von der Hauptmasse entfernen darf. Ferner ist oft das Terrain nicht derart, die Sicht nach allen Seiten zu gestatten; in waldigem, hügeligem, sogenannten coupiertem Terrain werden zahlreiche Punkte unberücksichtigt bleiben müssen.

Ist man aber nicht in der Lage, wirkliche, wenn auch noch so rohe Distanzmessungen mit dem Distanzmesser vorzunehmen, so wird man das Augenmaß durch Abschreiten einzelner Distanzen unterstützen. Bei regelmäßigem, ruhigem Gange ist nämlich die Schrittlänge der einzelnen Personen zwar verschieden, aber für jede Person eine ziemlich konstante Größe, wobei eine größere Einübung und die Gewohnheit, stets dasselbe gleichmäßige Tempo einzuhalten, viel zur Erhaltung der Konstanz der Schrittlänge beiträgt. Die Zahl dieser Schritte für verschiedene Beobachter auf denselben Strecken gibt dann sofort ein Verhältnis ihrer Längen; man kann aber ohne viele Mühe auch die absoluten Längen von Strecken erhalten, wenn man durch eine Reihe von Vorversuchen die Länge seines Schrittes bestimmt hat. Im Mittel rechnet man die Schrittlänge 70—80 *cm*, doch wird man besser tun, die Länge seines eigenen Schrittes zu ermitteln. Hat jemand auf einer Distanz von 100 *m* 135 Schritte gemacht, so folgt daraus die Länge des Schrittes gleich 74 *cm*.

Das Zählen der Schritte wird auf Forschungsreisen, wo man in möglichst knapper Zeit möglichst viele Beobachtungen sammeln soll und an möglichst viel zu denken hat, unbequem, kann aber durch Schrittzähler, sogenannte Hodometer oder Pedometer, erleichtert werden, welche die Zahl der Hebungen und Senkungen des Körpers beim Gehen und damit indirekt die Zahl der Schritte angeben. Auch beim Reiten können die Schrittzähler, auf die rhythmische Bewegung des Pferdes angewendet, zur Distanzmessung dienen, wobei man nur das den verschiedenen regelmäßigen Gangarten des Pferdes (und man wird zu Messungen wohl nur den einfachen

Paßgang, Schritt, des Pferdes wählen) entsprechende Verhältnis zwischen der Angabe des Schrittzählers und der zugehörigen Wegstrecke zu bestimmen hat.

Man könnte wohl auch das Meßrad verwenden. Es hat sich aber gezeigt, daß nur auf ebenem, glattem Boden, nicht aber auf unebenem, geschottertem Wege, auf schlechten Straßen, und gerade diese sind es, die hier wesentlich in Betracht kommen, die Genauigkeit wesentlich erhöht wird.

Entfernungen kann man noch bei regelmäßigem Gange durch die Zeit bestimmen, welche zur Zurücklegung des Weges verwendet wurde. Man wird daher stets, auch wenn man einen Schrittzähler zur Verfügung hat, die Uhrzeiten notieren, zu welchen man einen gegebenen, aufzunehmenden Punkt passiert hat. Natürlich müssen dann auch kürzere und längere Pausen ihrer ganzen Dauer nach möglichst genau notiert werden. Hierzu gehört auch, ob der Weg ansteigend oder abfallend ist, da dies auf die Schätzung der Entfernungen nicht ohne Einfluß ist: auf ansteigendem Terrain wird man stets etwas langsamer auf fallendem Terrain etwas schneller gehen oder reiten. Da man überdies auch stets ein Barometer mit sich führt, so wird man dieses ebenfalls von Zeit zu Zeit lesen und daher gut tun, immer gleichzeitig an jedem aufzunehmenden Punkte Uhrzeit, Schrittzähler und Barometerstand abzulesen, alles im Manuale zu notieren, gleichzeitig aber auch eine Skizze zu machen, in welcher der zurückgelegte Weg möglichst getreu eingetragen, die Punkte eingezeichnet, mit einem Buchstaben oder einer Nummer versehen werden, welche auch in dem Manuale den an diesem Punkte gemachten Beobachtungen und Bemerkungen vorangesetzt wird.

Nicht minder wichtig für eine richtige Skizzierung ist die Schätzung der Richtungen. Namentlich bei Drehungen des Weges wird man auf diesen Umstand Rücksicht nehmen müssen. Wesentlich unterstützt werden diese Aufnahmen, wenn man die bloße Schätzung durch Peilungen (Richtungsbestimmungen mit dem Kompaß) ersetzt. Zu diesem Zwecke hält man den Kompaß gerade vor sich hin, so daß immer dieselbe feste Linie (die Nord-Südlinie) der Windrose in die zu bestimmende Richtung fällt und liest den Stand der Nadel ab. Sei z. B. für eine Schätzung der Stand des Nordpoles der Nadel 27° von Nord gegen Ost, so ist umgekehrt die Nullrichtung 27° gegen Westen zu und man wird unter den Richtungen: N 27° W eintragen.

Richtungsbestimmungen und Barometerlesungen müssen nicht immer gleichzeitig vorgenommen werden. Ist ein Weg eben, aber gekrümmt, so werden öfter Richtungen bestimmt, als Aufzeichnungen über den Barometerstand vorgenommen. Umgekehrt wird auf einem Wege, der sich geradlinig hinzieht, aber verschiedentlich Steigungen und Gefälle bietet, die Richtungsbestimmung unterlassen werden können, hingegen werden häufige Lesungen des Barometers vorgenommen werden müssen.

Ebenso wie jedem Punkte wird auch jeder Richtung eine bestimmte Nummer beigelegt und Punkte und Richtungen in zwei getrennten Kolonnen, aber nach der Zusammengehörigkeit in Zeilen angeordnet. In der Skizze müssen dann die Nummern für die Punkte und Richtungen unterschieden werden, z. B. die Richtungen in Klammern oder durch Einschließen in einen Kreis. Da man übrigens mit verschiedenfarbigen Stiften versehen sein wird,

um gleich Bemerkungen über Bodenbeschaffenheit, Kulturen usw. zum Ausdruck zu bringen,* so wird es am einfachsten, die Zahlen für die Punkte und diejenigen für die Richtungen mit verschiedenen Bleistiften (z. B. rot und blau) einzutragen.**

Eine größere Pause wird man stets dazu benutzen, die bereits skizzierten Wege und Aufnahmsgebiete zusammenzustellen; da man möglicherweise dieselben Punkte von verschiedenen passierten Punkten aufnahm, so werden sich diese Schätzungen wechselseitig kontrollieren. Ist man in der Lage Schleifen zu machen, d. h. verschiedene Punkte auf verschiedenen Wegen zu erreichen, so wird auch hierbei eine Zusammenstellung der Skizzen sobald als möglich wichtig, so lange nämlich noch die Erinnerung frisch ist, und eventuelle Fehler berichtigt werden können. Selten werden schon die ersten Skizzen völlig zusammenpassen; im Gegenteile werden sie sich meist nicht schließen; man wird die eine Wegstrecke zu lange, in einem andern Falle die Krümmung nicht entsprechend eingezeichnet haben und wird am besten sofort an Ort und Stelle die entsprechenden Verbesserungen vornehmen können.

73. Beispiel. Da gerade für das vorliegende Werk die Skizzenaufnahme eine hervorragende Rolle spielt, soll hier ein Beispiel dieser Art der Aufnahme vollständig aufgenommen werden.

Es wurden die Wege innerhalb des Waldes am Westabhange des Predigtstuhl gegen das Trauntal zu unter alleiniger Zuhilfenahme von Uhr, Kompaß und Aneroid*** aufgenommen und daraus eine Darstellung der Isohypsen vorgenommen.

Im ganzen wurden neun Routen begangen, von denen die erste, vierte und letzte vollständig angeführt werden.

Route I, 1903, August 3 a. m.

Nr.		Uhrzeit	Barometer	Richtungen
1	Wohnung	$6^h\ 12^m$	772·5 *mm*	
1	Straße	„ „	773·0	
2	Pfarrhaus	6 16	772	
3	erste Kapelle	6 18	771	
4	zweite Kapelle	6 20	$770\frac{1}{4}$	
5	dritte Kapelle	6 22	$769\frac{1}{3}$	
6	Hauptkapelle	6 24	$768\frac{2}{3}$	
7	Aussichtspunkt	6 27	767	1 N 45° O über die Kirche zur „Hohen Schrott“
	„	6 30		
8	—	6 33	$665\frac{1}{2}$	2 S 23 O
9	Wegzeiger	6 37	$765\frac{1}{3}$	3 S 50 O
10	Wegzeiger	6 43	$763\frac{1}{2}$	4 N 50 O

* Vgl. hierüber Nr. 90.

** In Tafel III sind dieselben durch verschiedene Typen ausgedrückt; die Punkte in Kursiv-, die Richtungen in Lapidarschrift.

*** Die Aufnahme des unteren Teiles des Ortes Laufen erfolgte auf photogrammetrischem Wege.

Nr.		Uhrzeit	Barometer	Richtungen
11	—	—	—	5 S 50 O
12	Höllbauer	6h 50m	763¼ *mm*	6 N 70 O
13	—	6 56	761¼	7 N 40 O
14	Brücke	7 6	757¾	8 N 70 O
—	—	—	—	9 N 45 O
15	—	7 10	755½	10 S 50 O
16	—	7 15	753¾	11 S 35 W
17	—	7 18	752¾	12 N 65 O
18	—	7 21	750¾	13 N 30 O
19	Straße	7 25	751¼	14 N 25 O
20	—	7 30	Quelle über Steinplatten	
21	Wegteilung	7 32	749	15 N 15 W
—	—	—	—	16 N 16 O
22	—	7 40	747¼	17 N 52 O
23	Kuppe	7 46	745¾	18 N Aussicht nach Ischl
18	—	7 59	750¾	
24	—	8 4	752½	19 N 23 W Durchhau
25	—	8 9	750¾	20 N 60 O
26	—	8 13	748½	
27	Niedere Rast	8 16	747½	21 S 5 W
—	—	—	—	22 N 40 O
28	—	8 23	744¾	
		Sumpf, Stufen		
29	—	8 24	743	23 N 45 O
30	Holzplätze	8 29	743¼	
31	—	8 31	742	Durchblick auf den „Hainzen“
32	—	8 38	741¾	24 N 48 O
12	—	9 18	763¼	
1	Wohnung	9 45	772½	

Route II, 1903, Aug. 5 p. m.
5h 0m bis 7h 50m, Punkte 33 bis 56, Richtungen 25 bis 43

Route III, 1903, Aug 8 a. m.
8h 36m bis 12h 10m, Punkte 57 bis 84, Richtungen 44 bis 76

Route IV, 1903, Aug. 17 a. m.

Nr.		Uhrzeit	Barometer	Richtungen
1	Wohnung	8h 41m	772½ *mm*	
12	Höllbauer	—	762½	
14	—	9 14	757½	
27	Niedere Rast	9 35	746½	
29	Brunnen	9 52	742½	
85	—	9 58	739½	77 N 30 O

Nr.		Uhrzeit	Barometer	Richtungen
86	Hohe Rast	10^h 2^m	$736\frac{1}{4}$ *mm*	78 N 100 O
				79 N 80 O
				80 S 80 W
				81 S 45 W
—	Reinfalzalm	11 15	725	
1	Wohnung	12 45	770	

Die Abnahme des Barometerstandes um 2·5 *mm* wird gleichmäßig, der Zeit proportional verteilt.

Route V, 1903, Aug. 17 p. m.
4^h 25^m bis 6^h 45^m, Punkte 87 bis 95, Richtungen 82 bis 90

Route VI, 1903, Aug. 21 a. m.
7^h 28^m bis 12^h 0^m, Punkte 96 bis 121, Richtungen 91 bis 121

Route VII, 1903, Aug. 26 a. m.
8^h 10^m bis 12^h 0^m, Punkte 122 bis 140, Richtungen 122 bis 142

Route VIII, 1903. Aug. 28 a. m.
7^h 45^m bis 12^h 30^m, Punkte 141 bis 163, Richtungen 143 bis 161

Route IX, 1903, September 5 a. m.

Nr.		Uhrzeit	Barometer	Richtungen
1	Wohnung	6^h 22^m	775 *mm*	
12	—	6 40	$765\frac{3}{4}$	
16	—	—	756	
16 *a*	—	—	$754\frac{1}{4}$	Dieser Punkt wurde in Route VIII bestimmt und für identisch mit Punkt 16 aus Route I gehalten; daher diesmal genauer verglichen.
112	—	7 40	732	
113	—	7 43	$731\frac{1}{2}$	162 N 45 O
164	—	—	$730\frac{2}{3}$	163 N 85 O
165	Aussicht	—	$729\frac{1}{4}$	164 O
166	—	8 6	$726\frac{3}{4}$	165 S 15 O
167	—	8 16	$728\frac{1}{2}$	
168	—	8 24	725	
169	Gestrüpp	8 28	$724\frac{1}{3}$	Weiteres Vordringen unmöglich
113	—	8 53	—	166 S 25 O
170	—	9 10	724	167 S 8 O
171	—	9 15	722	168 S 15 O
172	—	9 22	$718\frac{2}{3}$	Anschluß an den Radsteigweg
173	Gipfel	9 40	$708\frac{2}{3}$	
173	„ ab	10 7	—	
	Roßmoos	10 25	727	
1	Wohnung	11 45	$774\frac{1}{3}$	

Durch Eintragen der Routen und Berichtigen einzelner Widersprüche in der ersten auf dem Wege selbst vorgenommenen Skizze ergab sich der Plan Tafel III. Über das Zeichnen der Isohypsen s. Nr. 89.

B. Vorbereitende Arbeiten für die Detailvermessung.

74. *a*) Auspflocken. Bei den eigentlichen Vermessungen wird jede Richtung nach einem gut präzisierten Objekte festgelegt und dadurch die Genauigkeit wesentlich erhöht, und zwar um so mehr, je mehr Punkte durch Messungen bestimmt werden und je sicherer dieselben zu pointieren sind. Turmspitzen, Schornsteine, vertikale Mauerkanten von Häusern und Zäunen, einzelstehende Baumstämme geben mitunter Fixpunkte zum Einzeichnen; unregelmäßige Baumkronen, Dachgiebel usw. werden jedoch für genauere Vermessungen nicht ausreichen. Auch findet man kaum bei einer Aufnahme eine ausreichende Anzahl von Fixpunkten, um die Grenzen der Feldmarken, namentlich wenn dieselben krummlinig sind, desgleichen den Lauf der Flüsse usw. genau nach der Natur aufzunehmen. Es werden daher noch andere Punkte eingeschaltet, indem an verschiedenen Stellen Pflöcke in die Erde eingeschlagen werden. Jeder Pflock erhält eine Nummer, welche als Nummer des durch den Pflock bezeichneten Punktes angesehen wird. Man nennt diesen Vorgang „das Auspflocken". Da man die sämtlichen Pflöcke in die Aufnahme einzubeziehen hat und durch Linien, welche denjenigen auf dem Felde korrespondieren, zu verbinden hat, so wird die Zahl der ausgepflockten Punkte verschieden, je nach der Art der aufzunehmenden Linien. Für eine gerade Linie genügt die Auspflockung ihrer Endpunkte; für eine krumme Linie wird man eine größere Anzahl von Punkten benötigen, um beim Übertragen nicht in Fehler zu verfallen. Mitunter müssen Punkte ausgepflockt werden, die nicht unmittelbar zur Begrenzung gehören, z. B. die Fußpunkte von Perpendikeln bei der Koordinatenmethode (vgl. Nr. 87).

Die Pflöcke bleiben für die Dauer der Vermessung an ihrem Orte und können wohl zur Distanzmessung mit der Kette unmittelbar verwendet werden, können aber nicht anvisiert werden. Für diesen Zweck wird auf dem Pflocke eine Meßfahne vertikal aufgestellt und so lange gehalten, als der Beobachter es benötigt. Eigene Zeichen ermöglichen es dem Beobachter sich mit seinem die Fahne haltenden Gehilfen zu verständigen.

Der Gehilfe (Figurant) hat von Punkt zu Punkt nach der fortlaufenden Numerierung fortzuschreiten, damit der Beobachter ohne Mühe seine Punkte und Richtungen auf dem Brette mit denjenigen auf dem Felde in Übereinstimmung bringen kann. Das Überspringen eines einzigen Punktes könnte eine vollständige Verwirrung erzeugen und ist es daher gut, wenn der Figurant bei jedem fünften oder zehnten Pflock ein verabredetes Zeichen gibt, woraus der Beobachter die Koinzidenz seiner Nummern mit den Feldnummern ersehen kann.

Das Stangensignal oder die Fahne muß genau vertikal gehalten werden, da bei geneigter Haltung der obere, anvisierte Punkt nicht als Feldpunkt angesehen werden kann, indem dieser nicht die Projektion des anvisierten Punktes wäre. Ist die Aufnahme eines Punktes vollendet, so gibt der Beobachter dem Figuranten ein Zeichen (Abdankungszeichen), worauf dieser zum nächsten Punkte weiter geht. Kann ein Punkt aus irgendeinem Grunde nicht aufgenommen werden, so wird dieses im Manuale besonders notiert sowie hierbei auch besondere Bemerkungen über etwaige Beobachtungen

stets aufgenommen werden, da sie bei der Ausführung oder Ausfertigung des Planes von Wichtigkeit werden können.

75. *b*) Das Abstecken von geraden Linien. Eine gerade Linie ist durch zwei Punkte, d. i. durch zwei in diesen befindliche Pflöcke oder Meßstangen vollkommen bestimmt. Das „Abstecken" besteht nun darin, Punkte in deren Verlängerung oder zwischen denselben auszupflocken. In beiden Fällen wird ein Beobachter von dem einen durch eine Signalstange bezeichneten Punkte A gegen den andern, ebenso bezeichneten B visieren; ein Gehilfe hält eine dritte Signalstange an derjenigen Stelle, wo ein Punkt benötigt wird und wird durch Zeichen mit der Hand (Angabe der Bewegungsrichtung) so lange gegen rechts oder links von der Richtung AB (Fig. 206) dirigiert, bis der Beobachter in A die drei Stangen A, C, B genau hintereinander sieht. Zu berücksichtigen ist dabei, daß es nicht aus-

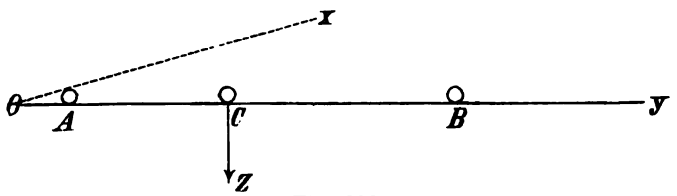


Fig. 206.

reicht, nachzusehen, ob die beiden Stangen C und B hinter der Stange A unsichtbar sind (durch diese gedeckt werden); denn für das Auge des Beobachters verdeckt die Stange A einen so beträchtlichen Raum xOy, daß die Stangen C und B gegen A ziemlich weit aus der Geraden abweichen können, ohne daß der Beobachter es auf diese Art bemerken würde. Der Beobachter muß daher längs der Seiten der Meßstangen AB, der Linie Oy entlang visieren und die Stange C so einvisieren, daß auch sie von der Linie Oy berührt wird. Da die Stangen von sehr nahe derselben Dicke sind, so werden dann die Achsen der Stangen ebenfalls in einer geraden Linie liegen.

Dieses Verfahren wird undurchführbar, wenn A und B z. B. durch Mauerkanten gegeben sind, hinter welchen man sich nicht aufstellen kann.

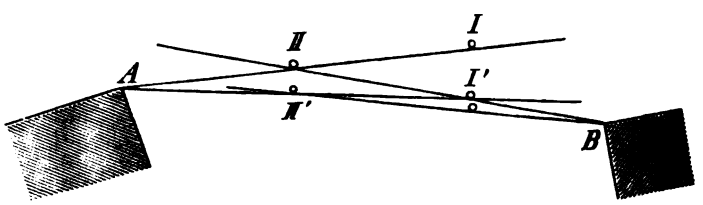


Fig. 207.

Die beiden Beobachter stellen sich dann in zwei Punkten I, II (Fig. 207) auf, die zwischen A und B genähert in der Verbindungslinie liegen und es visiert abwechselnd der eine den andern ein: der Beobachter in I den Beobachter II in die Richtung IA, hierauf der Beobachter in II den Beobachter I in die Richtung IIB usw.

Rascher wird diese Aufgabe mit dem Spiegelkreuz oder Prismenkreuz (Fig. 116 und 120) gelöst, indem man sich mit demselben so aufstellt, daß man in jedem der beiden Spiegel eines der beiden Bilder von A und B (Fig. 206) sieht (der Beobachter in C hat dabei in die senkrecht zu Oy stehende Richtung Cz zu visieren) und sich so lange in der Richtung Cz bewegt, bis die beiden Bilder in dieselbe Linie fallen (vgl. Nr. 45). Vertikal unter dem Spiegel wird dann der so gefundene Punkt ausgepflockt.

Die Einschaltung von Punkten zwischen weit entfernten Punkten geschieht am besten mittels eines Visierfernrohres. Man stellt sich mit demselben (z. B. einem Theodolit- oder Nivellierfernrohre) in A auf, richtet die Visur auf B und visiert dann den Gehilfen mittels des Fernrohres in diese Richtung ein; die Verständigung auf größere Entfernungen kann leicht mittels eines Heliotropen, dessen Strahlen durch verschieden gefärbte Gläser geschickt werden, erreicht werden. Auch auf kurze Entfernungen wird das Visierfernrohr verwendet, wenn es sich beim Einvisieren um eine große Genauigkeit handelt, wie z. B. beim Einschalten von Zwischenpunkten bei der Basismessung (s. Nr. 125).

76. *c*) Das Ausstecken von Winkeln kann nach geometrischen Methoden vorgenommen werden, ähnlich denjenigen, welche zur Lösung der gleichen Aufgaben mittels des Zirkels auf dem Papier dienen. Die Zirkelöffnung wird dabei durch eine gewisse Länge an der Kette ersetzt. Ein gleichseitiges Dreieck (je 3 m der Kette zu einem Dreiecke zusammengestellt) gibt einen Winkel von 60°; ein Dreieck, dessen Seiten sich wie 3 : 4 : 5 (pythagoräische Zahlen) verhalten, also z. B. 1·5, 2 und 2·5 m, gibt einen rechten Winkel gegenüber der längsten Seite (2·5 m). Desgleichen können die elementarsten geometrischen Konstruktionen, welche zum Halbieren eines Winkels, zum Übertragen eines Winkels usw. auf dem Papiere dienen, auch auf dem Felde angewendet werden, wobei nur die bereits in der vorigen Nummer erörterte Aufgabe des Einvisierens von Absteckstäben in gegebenen geraden Linien in Verbindung mit der Festlegung von Längen durch die Kette benötigt werden. Den jetzigen Anforderungen an Genauigkeit sind dieselben keineswegs entsprechend.

Winkel von gegebener Größe werden mittels des Winkelspiegels, des Winkelprismas und des Prismenkreuzes nach Nr. 45 und 46 abgesteckt, d. h. das Aufstellen der Signalstangen und das Auspflocken des gesuchten Punktes erfolgt durch einen Gehilfen derart, daß die Signalstange selbst oder bei Benutzung von Spiegelinstrumenten eventuell ihr Spiegelbild genau in der vom Instrumente angegebenen Richtung erscheint.

Von Wichtigkeit ist die Lösung der Aufgabe: Von einem Punkte C außerhalb einer Geraden AB auf diese eine Senkrechte zu fällen.

Diese Aufgabe kann ohne Gehilfen mittels des Prismenkreuzes gelöst werden. Der Beobachter sucht einen Punkt X (Fig. 208) aus, der schätzungsweise so liegt, daß er in der Geraden AB liegt und daß $CX \perp AB$ ist; er bewegt sich dann in der Richtung gegen C oder von C weg, so daß er in die Richtung AB kommt und dabei gegen A oder B hin, so daß CX genau senkrecht zu AB wird, wobei ein Prisma des Prismenkreuzes als

Winkelprisma benutzt wird. Sind beide Bedingungen erfüllt, so wird der Punkt X herabgelotet und durch einen Pflock bezeichnet.

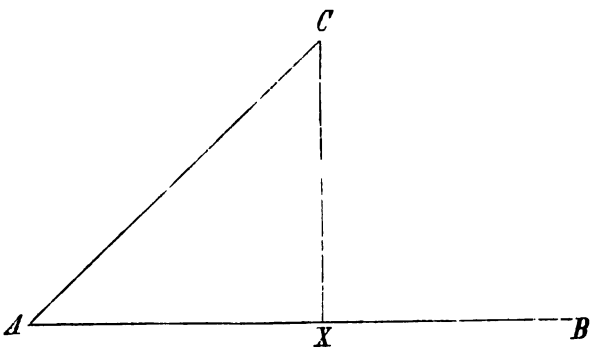


Fig. 208.

Die Aufgabe, durch einen Punkt C eine Parallele zu einer Geraden AB auszustecken, läßt sich mittels der vorigen lösen. Zuerst wird die Normale CX wie vorhin gesucht, dann in C eine zu CX Senkrechte ausgesteckt; dieses ist die gesuchte Parallele.

„Mittelbare Lösungen" im Gegensatze zu den eben dargestellten „unmittelbaren" können in zahlreichen verschiedenen Modifikationen durchgeführt werden. Wird die Entfernung AC (Fig. 208) und der Winkel CAB gemessen, so kann

$$AX = AC \cos CAB$$

gerechnet und dann die Strecke AX von A gegen B hin aufgetragen werden. In diesem Falle wird aber das Auspflocken des Punktes X ganz überflüssig, namentlich dann, wenn sich zwischen C und X ein Hindernis befindet, da man für die Strecke AX und ebenso für die meist ebenfalls benötigte Strecke

$$CX = AC \sin CAB$$

einfach die durch die Rechnung erhaltenen Resultate verwendet.

Alle sogenannten „mittelbaren Messungen" sowohl von Längen als auch von Winkeln sind überhaupt Messungen, bei denen andere als die geforderten Stücke durch Beobachtungen gefunden und die gesuchten aus den gemessenen durch Zeichnung oder Rechnung abgeleitet wurden. Verläßt man die jedenfalls weniger genaue Zeichnung und wählt statt derselben die Rechnung, so ist eigentlich jede mittelbare Messung nichts anderes als die Auflösung eines oder mehrerer Dreiecke, daher der einfachste Fall einer ad hoc ausgeführten kleinen Triangulation.

77. Hierher gehört z. B. das Ausstecken von geraden Linien in einer durch zwei Punkte bestimmten Richtung, wenn sich zwischen diesen Punkten ein Hindernis befindet, und das Ausstecken von Kreisbogen, welches oft (z. B. beim Trassieren von Geleisen, wegen der dabei notwendigen gleichmäßigen Krümmung) nötig wird.

Ist zwischen den Punkten A, B, zwischen denen sich ein Hindernis M befindet, welches die Visur nicht gestattet (Fig. 209), eine gerade Linie abzustecken, d. h. sind zu beiden Seiten des Hindernisses M Punkte X, Y festzulegen, welche mit AB in derselben Richtung liegen, so daß daher AX und YB Teile derselben Geraden sind, so kann man einen Punkt b ausstecken, so daß $\sphericalangle AbB = 90°$ ist, dann in der Richtung Ab zwei Punkte x, y einvisieren, in diesen auf Ab die Senkrechten xX, yY errichten und auf denselben die Längen xX, yY auftragen, welche (durch Rechnung) so bestimmt wurden, daß

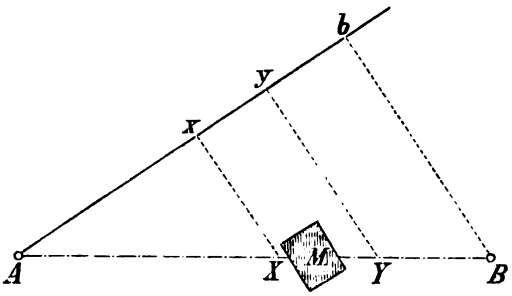


Fig. 209.

$$xX = \frac{Ax}{Ab} \cdot bB; \qquad yY = \frac{Ay}{Ab} \cdot bB$$

ist, welche Beziehungen aus den drei Dreiecken AbB, AyY, AxX folgen. Ist z. B. in der Richtung von AB ein Wald und will man behufs späterer genauer Beobachtungen die Visur frei haben, so wird man dann in der Verlängerung von AX gegen B hin und in der Verlängerung von By gegen A hin einen „Durchhau" schlagen können. Auch die Bestimmung der Richtung, in welcher ein Tunnel zu bohren ist, unterscheidet sich prinzipiell nicht hiervon; wohl wird aber die einzuschlagende Richtung $AX — YB$ wesentlich genauer bestimmt werden müssen, was nur durch eine genauere Aufnahme der Umgebung erzielt werden kann.

Um durch drei Punkte ACB (Fig. 210) einen Kreisbogen auszustecken, wird man die zu verschiedenen in der Richtung AB liegenden Punkten m,

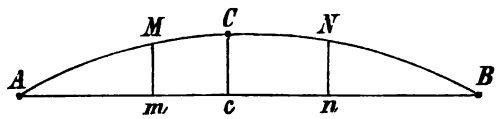


Fig. 210.

n gehörigen Pfeilhöhen mM, nN rechnen und die Stücke Am, An, ... als Abszissen, die zugehörigen berechneten Pfeilhöhen mM, nN als Ordinaten auftragen. Je mehr Zwischenpunkte M, N bestimmt werden, desto genauer kann der Kurvenzug ausgesteckt werden.*

C. Meßtischarbeiten.

78. *a*) Das Aufstellen und Orientieren des Meßtisches. Das Aufstellen hat so zu erfolgen, daß ein gegebener Punkt a des Meßtisches vertikal über einen Fixpunkt oder über einen ausgepflockten Punkt A des

* Über die Berechnung der Koordinaten s. Nr. 121.

Feldes liegt;* dies geschieht durch Auflegen der Lotgabel und Verschieben des Meßtisches, wobei die Verbindungsschrauben und die Herzschraube gelüftet sein müssen.

Zum Orientieren des Tisches gehört, daß eine Linie desselben in eine gegebene Richtung fällt. Hat man auf dem Meßtische die Nord-Süd-Richtung (mittels der Bussole) eingetragen, so wird die Linealkante der Bussole angelegt und der Tisch so lange gedreht, bis die Magnetnadel einspielt. Hat man eine gegebene Linie ab auf dem Tische in die Richtung AB des Feldes zu bringen, so wird längs ab das Perspektivlineal angelegt und der Tisch so lange gedreht, bis das Objekt B am Fadenkreuz erscheint,** wobei stets zu kontrollieren ist, ob der Punkt a dabei lotrecht über A blieb. Ist der Meßtisch richtig aufgestellt und orientiert, so werden die Verbindungsschrauben zwischen Tisch und Stativ und die Herzschraube angezogen.

79. *b*) Das Visieren und Messen (auch Rayonieren und Messen oder Polarmethode genannt). Ist der Meßtisch in einem Punkte A aufgestellt und nach B orientiert, so wird mit dem Fernrohr des Perspektivlineales nach dem aufzunehmenden Punkte C visiert, längs der Linealkante eine Bleilinie ac gezogen und auf dieser die Distanz AC im verjüngten Maße, gleich ac aufgetragen (Fig. 211). Wird dies für einzelne Punkte $C, D, E \ldots$

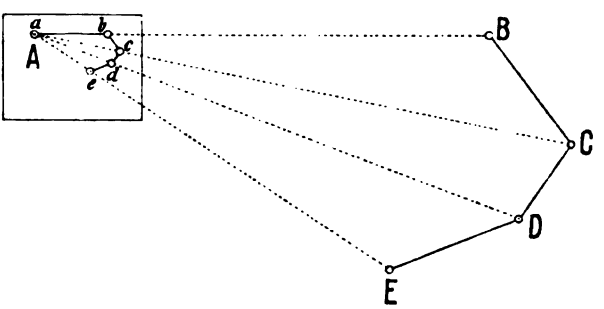


Fig. 211.

vorgenommen, so können diese sämtlich aus einem einzigen Standpunkte aufgenommen werden, zu welchem Zwecke jedoch die Bestimmung der Distanzen erforderlich ist. Von Vorteil wird die Methode daher nur, wenn die Entfernungen mittels eines Distanzmessers erhoben werden können, d. i. wenn z. B. das Perspektivlineal mit distanzmessendem Fernrohre versehen ist. Auch die tachymetrische Methode kann direkt für Meßtischarbeiten verwendet werden, wozu Tachymeterkippregeln, das sind Tachymeter, welche an Kippregeln angebracht sind, dienen. Man kann mit diesen leicht am Felde von einem einzigen Stande aus in der kürzesten Zeit mehrere hundert Punkte auf dem Meßtischblatt aufnehmen.

---

* Punkte auf dem Felde werden im folgenden stets durch große Buchstaben, die zugehörigen Punkte auf dem Meßtisch durch kleine Buchstaben bezeichnet.

** Die Instrumente werden im folgenden stets berichtigt vorausgesetzt; über die Berichtigung derselben s. die erste Abteilung.

Hierher gehört auch das Aufnehmen einfacher Polygonzüge (z. B. Waldbegrenzungen) nach der sogenannten Umfangsmethode. Angenommen ist dabei, daß man die Längen der Strecken VI I, I II, II III, III IV, ... (Fig. 212) kennt. Stellt man sich mit dem Meßtisch in I auf, visiert nach VI und II und trägt auf den gezogenen Linien die Längen (im verjüngten Maßstabe) nach 16, 12, . . . auf, so sind drei Punkte der Figur eingezeichnet. Man geht dann mit dem Meßtisch nach II, orientiert ihn nach I, trägt auf der neuen Visur von II nach III die Strecke 2 3 auf und erhält dadurch den nächsten Punkt 3 der Aufnahme. So fortschreitend könnte man den ganzen Umfang verzeichnen, bis man zum Punkte VI zurückgelangt. Wegen der sich hierbei möglicherweise häufenden Fehler wird es aber besser, die eine Hälfte der Punkte über II weitergehend, die andere Hälfte über VI fortschreitend aufzunehmen. Auch hierbei wird ein kleiner Schlußfehler vorkommen können, der dann korrigiert werden muß (vgl. Nr. 88).

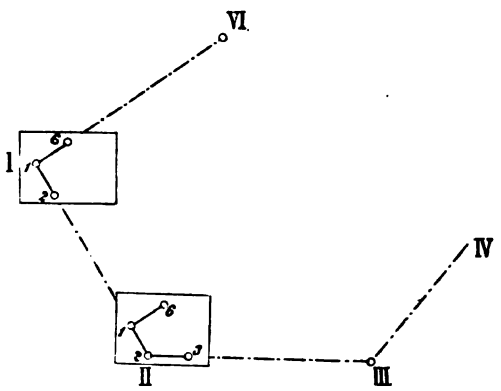


Fig. 212.

Man kann das Verfahren etwas abkürzen, wenn man den Tisch mittels der Orientierungsboussole orientiert. Bestimmt man in dem Punkte I (Fig. 213) die Nord-Süd-Richtung und dann die beiden Richtungen I II und I VII und auf diesen die Punkte 2 und 7 durch Auftragen der gemessenen Längen,

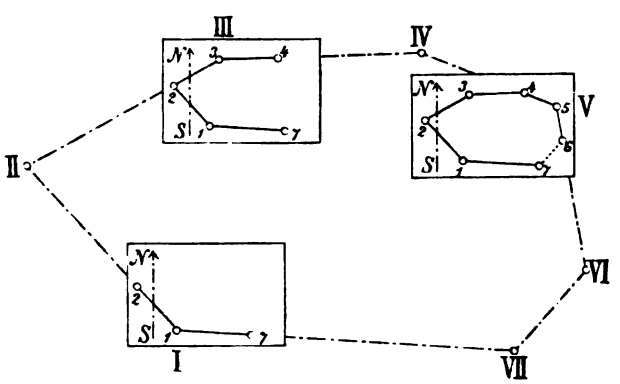


Fig. 213.

so kann man den Punkt II überspringen. Der Tisch wird in III mittels der Nord-Süd-Linie orientiert; dann legt man das Lineal an 2 an, visiert über 2 gegen II und erhält so durch Verschiebung des Tischblattes parallel mit sich selbst (so daß die Orientierung nicht geändert eventuell stets neu berichtigt wird) die Linie 3 2 in der Richtung 3 II. Mittels der gemessenen Länge II III wird dann der Punkt 3 erhalten und dieser herabgelotet. Meist wird noch der Punkt 3 mit III nicht koinzidieren und es bedarf eines neuerlichen

Verschiebens des Tisches in der Richtung 3 2; sollte dadurch die Richtung 3 2 sich geändert haben, so muß die Orientierung nach Nord-Süd neuerdings berichtigt, die Richtung 3 2, von dem Punkte 2 ausgehend, neuerlich bestimmt und die Länge 3 2 aufgetragen werden. Nach zwei bis drei Versuchen wird man es dann erreicht haben, daß der Punkt 3 vertikal über dem Feldpunkte III liegt, wobei die Länge 32 die verjüngte Länge der Strecke III II ist. Hierauf wird sofort der Punkt 4 durch Visieren und Messen bestimmt. Der Tisch wird dann mit Überspringen des Punktes IV nach V übertragen, wo auf dieselbe Weise die Punkte 4 und 6 aufgenommen werden. Da man hierbei immer einen Punkt überspringt, so hat diese Methode auch den Namen „Aufnahme mit Springständen“ oder „Springstandmethode“ erhalten.

80. *c*) Das Visieren und Schneiden (Rayonieren und Schneiden, auch Vorwärtsabschneiden oder Einschneiden, auch Standlinienmethode genannt).*

Hat man von einem Punkte A aus nach den Punkten B, C, D, E visiert und die den Sehstrahlen entsprechenden Linien Ab', Ac', Ad', Ae' auf dem Meßtische verzeichnet, so braucht man nicht die Längen aufzutragen, wenn man denselben Vorgang von einem zweiten Punkte B aus wiederholt. Überträgt man den Meßtisch nach B, stellt ihn so auf, daß derjenige Punkt b, welcher die Darstellung des Punktes B ist, vertikal über

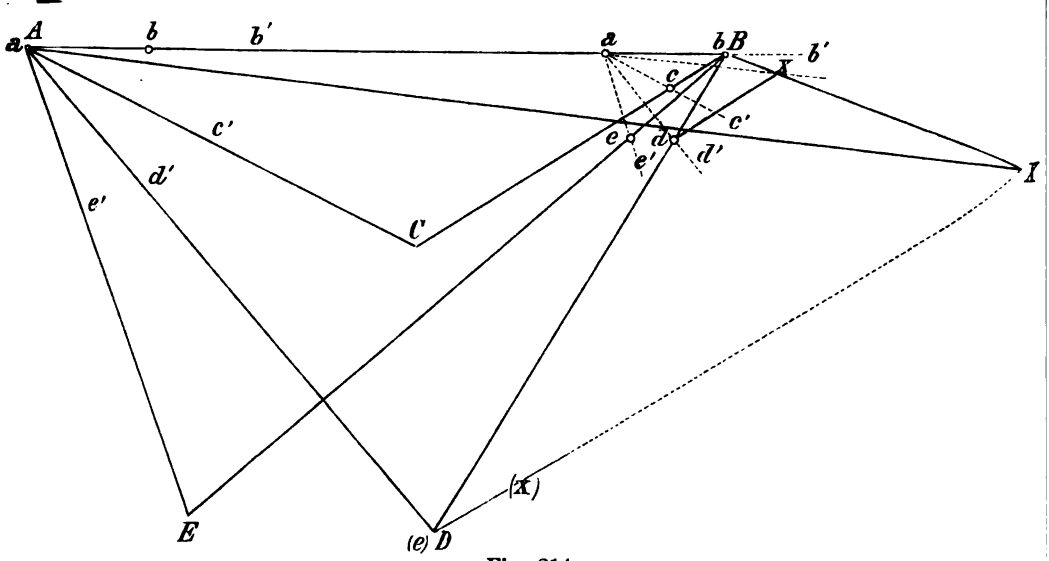


Fig. 214.

dem Feldpunkte B liegt und orientiert den Meßtisch derart, daß die Visur ba mit BA (Fig. 214) zusammenfällt, so wird die in A ausgeführte Aufnahme parallel mit sich selbst verschoben und kommt nach ab', ac', ad', ae'. Visiert man daher jetzt von B nach C, D, E, so bestimmen diese Visuren auf dem Meßtischblatte die den Punkten C, D, E entsprechenden Punkte

* Sie könnte auch Bipolarmethode genannt werden.

c, *d*, *e*. *AB* gilt dabei als Standlinie, ihre Endpunkte sind die beiden Pole, von welchen aus die Radienvectoren (nicht der Länge, sondern der Richtung nach) die einzelnen Punkte bestimmen.

Als Standpunkte wählt man dabei am besten zwei Punkte des Netzes vierter Ordnung, deren Entfernung aus der Triangulation durch Rechnung bekannt wird, oder aber es wird die Länge besonders gemessen, so daß dann die Standlinie als Basis der ganzen Aufnahme gilt.

Meist wird man jedoch mit zwei Standpunkten nicht auskommen, da man von diesen nicht alle aufzunehmenden Punkte sehen kann, viele wohl gesehen, aber nicht genügend sicher erhalten werden. Eine Unsicherheit wird daraus entstehen können, daß die beiden Visuren von *A* und *B* z. B. nach *X*, daher die beiden Linien *ax* und *bx* auf dem Meßtische einen sehr „schiefen Schnitt" geben, was der Fall sein wird, wenn die Entfernung des Punktes *X* von *AB* sehr groß wäre oder der Punkt nahe in die Richtung von *AB* fällt. Würde man sich dann z. B. in einem dritten Punkte, z. B. *D* aufstellen, so erhielte man nach gehöriger Orientierung den Strahl (*d*) (*x*) (welcher in der Figur nach *dx* übertragen gedacht ist), der den Punkt *x* genügend sicher bestimmt.

Als dritten Aufstellungspunkt muß man dabei ebenfalls einen vollkommen sicher bestimmten Punkt wählen, am besten einen dritten Punkt des graphischen Netzes, von dem aus neue Punkte geschnitten, dann aber auch noch andere, bereits bestimmte Punkte durch sogenannte „Kontrollschnitte" auf ihre Richtigkeit geprüft werden.*

81. *d*) Das Seitwärtsabschneiden oder Seitwärtseinschneiden. Man kann einen Punkt *C* als neuen Standpunkt aus den bekannten Punkten *A*, *B* durch Vorwärtsabschneiden bestimmen und dann den Meßtisch in *C* für die weiteren Aufnahmen aufstellen. Mitunter kann es vorkommen, daß man auf die Aufstellung im Punkte *B* verzichten muß oder sich zur Abkürzung des Verfahrens sofort in *C* aufstellen will. In diesem Falle muß dieser Punkt aber erst gegenüber den bereits bekannten *A*, *B* festgelegt werden: Hat man bereits in *A* die Visuren *ab* und *ac* (Fig. 215) auf dem

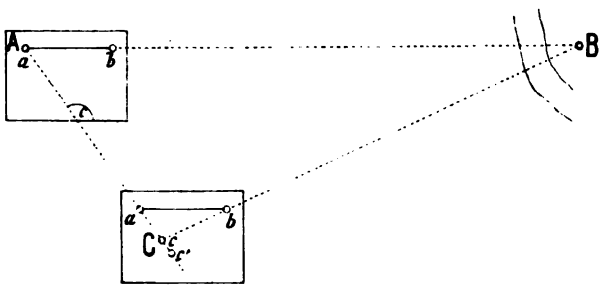


Fig. 215.

* In dem Werke „De re ichnographica cujus hodierna praxis exponitur, Viennae Austriae 1751" von J. J. Marinoni wird schon bemerkt: Tot itaque in Tabula sumuntur centra, quot stationes dantur vel eliguntur in Territorio. Ab hisce centris ductae per admotam Regulam dioptricam horizontales lineae ad objecta visa .... Per lineas autem in campo dimensas, deinde a scala desumptas, habentur in Tabula distantiae

Meßtisch erhalten und b durch die bekannte Länge AB aufgetragen, so könnte man den Punkt c auf einfache Weise folgendermaßen finden: Man ordnet dem Feldpunkte C einen nahe richtigen Punkt c' in der Visur ac zu, stellt c' vertikal über C auf, orientiert ca nach A und zieht die Visur $c'b'$, welche die Linie ab nicht in b, sondern in einem andern Punkte b' (in der Figur nicht gezeichnet) treffen wird. War ac' zu groß angenommen, so wird natürlich ab' in demselben Verhältnis zu groß erscheinen und man erhält den wahren Punkt c, indem man $ac : ac' = ab : ab'$ macht. Da aber zum Schluß eine Kontrolle notwendig wird, indem man den neu erhaltenen Punkt c wieder vertikal über C aufstellt, neuerdings gegen A orientiert und gegen B visiert, wodurch man den Punkt b (durch Vorwärtsabschneiden) erhalten muß, so wird es kürzer, sofort den Tisch genähert über C aufzustellen, nach A zu orientieren, dann das Diopterlineal an den bereits bekannten Punkt b anzulegen und dasselbe um b so lange zu drehen, bis man den Punkt B am Fadenkreuz des Fernrohres erhält. Die beiden Visuren ca, nach welcher orientiert wurde, und cb bestimmen den Punkt c, der dem Feldpunkte C in dem angegebenen Maßstabe entsprechen würde, weil das Dreieck abc des Meßtisches mit dem Felddreiecke ABC ähnlich ist und die eine Seite ab in dem geforderten Verhältnis zu AB steht. Aber c wird nur dann dem Feldpunkte C entsprechen, wenn dieser gefundene Punkt vertikal über C liegen würde. Meist wird dies nicht der Fall sein und eine kleine Verschiebung des Tisches nötig werden, wobei der gefundene Punkt c vertikal über C gestellt wird; die Visur cb nach B wird sich dann allerdings etwas ändern, aber eine Wiederholung desselben Verfahrens: Orientieren gegen A, Anlegen des Diopterlineales an b und Visieren nach B wird den richtigen Punkt c, meist gegen den früheren nur wenig verschieden, ergeben.

82. *e*) **Das Rückwärtseinschneiden, Problem der vier Punkte** (auch Stationieren genannt).* Sind drei Punkte A, B, C ihrer gegen-

---

stationum reductae, punctorum quorumlibet, non procul jacentium. Intersectiones quoque linearum a variis stationibus ad eadem remota objecta tendentium assignant in Tabula eorum Puncta ichnographica" (S. 6).

Benutzt man bei der Zeichnung die Anschlagnadel, so kann durch die Dicke derselben eine kleine Verschiebung der Visuren stattfinden; man darf daher nur die feinsten Anschlagnadeln verwenden. Über den Einfluß derselben vgl. z. B. Wastler, Handbuch der niederen Geodäsie, S. 297.

* Der Name Pothenotsches Problem ist völlig unzutreffend und muß einmal fallen gelassen werden. Die Aufgabe findet sich nämlich schon bei Ptolemäus; sie ist identisch mit derjenigen, aus drei durch die mittleren Bewegungen auf einem Kreise gegebenen Punkten eines Himmelskörpers denjenigen Punkt zu finden, aus welchem die gegebenen Punkte unter den Winkeln der gegebenen wahren Bewegungen erscheinen (Exzentrizität der Kreisbahn zu finden; vgl. des Verfassers „Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen", Bd. I, S. 62) oder aus drei Punkten im Epizykel den Ort des Mittelpunktes des Deferenten zu finden, wenn die Winkel bekannt sind, unter denen die drei Epizykelpunkte von diesem aus geschen werden (ibid. S. 68).

Sieht man aber auch von diesen Lösungen ab, so sind in viel späterer Zeit eine Reihe von Vorgängern vor Pothenot zu nennen. Snellius löste die Aufgabe in seinem Buche „Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, a Willebrordo Snellio, Lugduni Batavorum 1617" mittels zweier Kreise; dieselbe Lösung, etwas geändert, gibt Schikard in einem Briefe vom 6. Juni 1624 an Kepler. Desgleichen bei Abdian

seitigen Lage nach in der Natur bekannt (z. B. drei Triangulierungspunkte vierter Ordnung) und zeichnet man dieselben auf das Meßtischblatt in a, b, c (Fig. 216) ein, so kann der einem vierten Punkte D entsprechende Punkt d dadurch bestimmt werden, daß die Winkel $ADC = \mu$, $CDB = \nu$ gemessen wurden, daß also auch $adc = \mu$, $cdb = \nu$ werden muß.

1. Lösung. Soll vom Punkte d aus ac unter dem Winkel μ erscheinen, so muß d auf einem Kreise liegen, der durch acd geht, in welchem daher μ der zur Sehne ac gehörige Peripheriewinkel ist und der auch zwischen der Tangente ax in dem Punkte a und der Sehne ac enthalten sein muß. Dieser Kreis kann daher gefunden werden, indem man Winkel $cax = \mu$ macht und den Mittelpunkt o des Kreises K_1 sucht, der durch ac geht

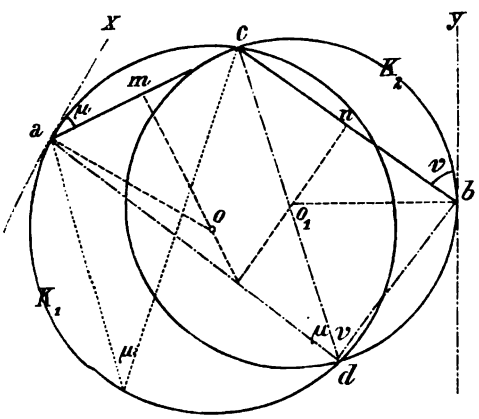


Fig. 216.

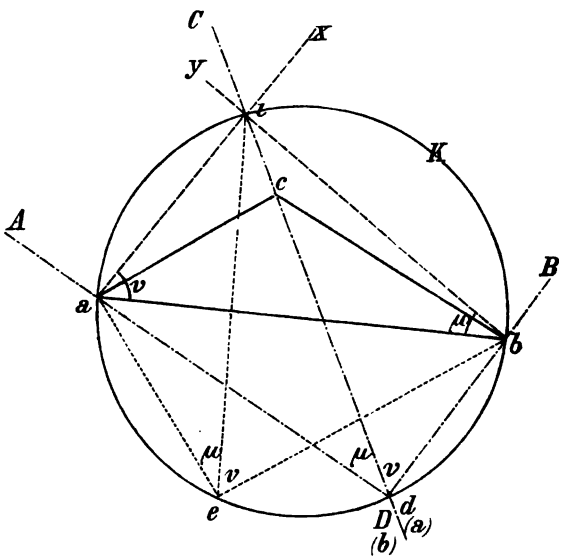


Fig. 217.

Trew 1663, der sie aber einem andern, nicht genannten Zeitgenossen zuschreibt. Daß dieser nicht Schikard sein kann, erwähnt schon G. D. E. Weyer, „Konstruktion zu einer Küstenaufnahme im Vorbeifahren", Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Sept. 1882, S. 539.

Einen wesentlichen Fortschritt bedeutet die Lösung von Collins: „A solution, given Mr. John Collins of a Chorographical problem". Phil. trcts. für 1671, S. 2093, der den Punkt als Durchschnitt eines Kreises mit einer Geraden findet, während Pothenot 1692 wieder auf die ältere Snelliussche Konstruktion mittels zweier Kreise zurückgeht. Die Collinssche Lösung findet sich wieder bei Lambert in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik", 1765, I. Teil, S. 73, und Bohnenberger, „Über eine Aufgabe der praktischen Geometrie", Zeitschrift für Astronomie, Bd. VI, Tübingen 1818, S. 121. Bohnenberger hat dabei das Verdienst, die Aufgabe unmittelbar auf die Meßtischpraxis (Übertragen der Winkel durch unmittelbares Anlegen der Visuren ohne Benutzung von Transporteuren oder Kreiskonstruktionen) angewendet zu haben. A. Schultz-Montanus, „Systematisches Handbuch der Land- und Erdmessung", Berlin 1819, Bd. II, S. 146, führt dieselbe Methode als neu an. Auch Bessel, „Über eine Aufgabe der praktischen Geometrie", Astron. Nachrichten, Bd. III (1825), S. 193, erwähnt dieselbe Methode, welche noch später (ibid. S. 225) eine Vereinfachung durch Bessels Schüler Kulenkamp erhielt. Die praktische Lösung von Lehmann mittels des fehlerzeigenden Dreieckes rührt schon aus der Zeit vor 1812 her; die von G. A. Fischer 1812 besorgte Ausgabe von Lehmanns „Anleitung zum Situationszeichnen" erschien schon nach dem 1811 erfolgten Tode Lehmanns.

(Zeichnung der Seitensymmetrale mo) und die Gerade ax in a berührt ($ao \perp ax$). In derselben Weise wird an b der Winkel $cby = \nu$ angelegt und der Mittelpunkt o_1 des Kreises K_2 gesucht, der durch bc geht (Streckensymmetrale no_1) und die Gerade by in b berührt ($bo_1 \perp by$). Die beiden Kreise K_1 und K_2 schneiden sich außer in c noch in einem zweiten Punkte d, welcher der gesuchte Punkt ist, da er sowohl auf dem Kreise K_1 als auch auf K_2 liegt. (Snelliussche oder Schikardsche Kreise.)

2. Lösung. Trägt man den Winkel ν in a an ba (Fig. 217) auf, so daß $bax = \nu$ ist; ebenso μ in b, so daß $aby = \mu$ ist und beschreibt um das Dreieck, welches aus den Punkten a, b und dem Schnittpunkt i der Linien ax, by gebildet wird, einen Kreis K, so wird in diesem jeder Punkt e die Eigenschaft haben, daß von ihm aus die Sehne ai unter dem Winkel μ gesehen wird, weil $\sphericalangle aei = \sphericalangle abi$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen; ebenso wird die Sehne ib unter dem Winkel $\nu = \sphericalangle ieb = \sphericalangle iab$ gesehen. Dies gilt auch von dem Punkte d dieses Kreises, der in der Linie ic liegt; auch für diesen ist $\sphericalangle adi = \mu$, $\sphericalangle bdi = \nu$; da aber der eine Schenkel di durch c geht, so ist auch $\sphericalangle cda = \mu$, $\sphericalangle cdb = \nu$, daher d der gesuchte Punkt, von welchem aus ac und bc unter den beobachteten Winkeln μ, ν erscheinen.

In der Praxis wird man die Winkel μ und ν nicht messen und auftragen, sondern den Punkt a des Meßtisches über den Feldpunkt D (a) bringen, die Linie ab gegen B orientieren, so daß sie über $(a)b$ kommt und dann nach C visieren, wodurch man die Linie $(a)cC$, d. i. ax erhält. Nun wird der Meßtisch so aufgestellt, daß der Punkt b über den Feldpunkt D (b) kommt und die Linie ba nach A orientiert, so daß sie über $(b)a$ fällt; es wird dann wieder nach C visiert und die Richtung by erhalten; der Schnitt von ax und by ist der gesuchte Punkt i und der Punkt d muß auf der Verbindungslinie ci liegen. Er kann demnach durch Seitwärtseinschneiden gefunden werden, indem die Richtung ci gegen C orientiert wird und mit dem Diopterlineal über a gegen A oder über b gegen B visiert wird. Beide Visuren müssen sich im selben Punkte d der Linie ci schneiden, welcher vertikal über dem Feldpunkte D liegen wird, wenn die sämtlichen vorgenommenen Orientierungen und Pointierungen genau und die letzte Aufstellung des Meßtisches zufällig richtig (der gesuchte Punkt d vertikal über D) getroffen wurde. Beide Bedingungen werden meist nicht erfüllt sein und die drei Visuren aA, bB, cC werden sich nicht im selben Punkte schneiden, sondern ein kleines Dreieck bilden, welches weggeschafft werden muß.

Eine mechanische Lösung, welche den Punkt d auf dem Tischblatte rasch nahe richtig gibt, besteht darin, daß man den Meßtisch in D aufstellt und auf einem Hilfsblatte (am besten aus Pauseleinwand), das auf das Meßtischblatt gelegt wird, die drei Visuren DA, DB, DC verzeichnet. Hiernach wird das Hilfsblatt, welches die drei von D ausgehenden Visuren in richtiger gegenseitiger Lage aufgetragen enthält, gegenüber dem auf dem Meßtischblatte aufgetragenen Dreiecke abc so lange verschoben und gedreht, bis die Visuren DA durch a, DB durch b, DC durch c gehen. Der so gefundene Ort von D gibt dann den Punkt d des Meßtischblattes,* selbst-

* Um das Zeichnen der Visuren auf Pauseleinwand zu ersparen, hat man eigene Instrumente konstruiert: Der Einschneidezirkel von Bauernfeind zum Zeichnen der

verständlich auch nie völlig genau, und die Visuren DaA, DbB, DcC, welche erhalten werden, indem nach einer derselben orientiert und nach den beiden anderen Punkten visiert wird, geben ein kleines Dreieck, statt sich in einem Punkte zu schneiden.

83. 3. Lösung. Dieses kleine Dreieck benutzte Lehmann,* um sofort ohne die früheren Hilfskonstruktionen (Schikardsche Kreise oder Collinssche Gerade) den Punkt d zu erhalten. Der Tisch wird über D aufgestellt, so daß man von D über a nach A, über b nach B, über c nach C visiert; dann erhält man aus den drei Visuren das „Fehlerdreieck" oder „fehlerzeigende Dreieck" $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 218, 219, 220) und man muß den Tisch drehen, damit dieses Dreieck verschwindet, d. h. die drei Visuren sich in einem Punkte schneiden, was ja nur dann stattfinden kann, wenn das Meßtischdreieck abc dem ihm ähnlichen Felddreiecke ABC ähnlich liegt, d. h. $ac \parallel AC$, $bc \parallel BC$, $ab \parallel AB$ ist.

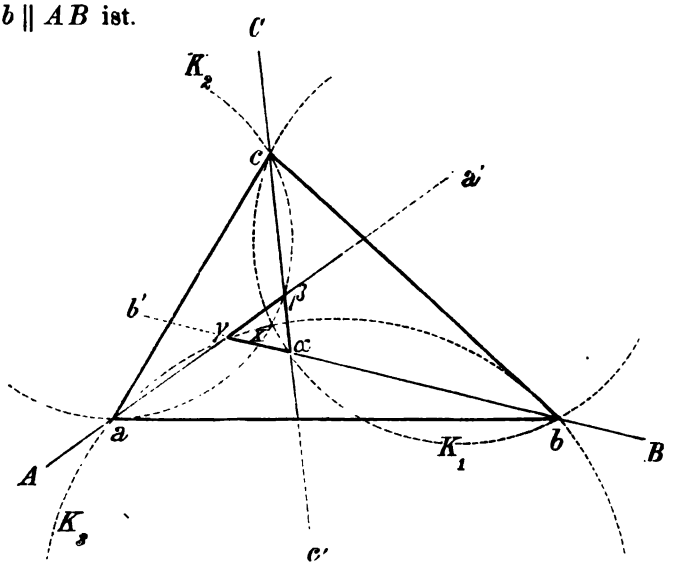


Fig. 218.

Nun ist $\measuredangle C\beta A$ der Winkel zwischen den beiden Visuren von D nach A und C, daher gleich μ,** desgleichen ist $\measuredangle C\alpha B = \nu$. Ein um

Kreise K mit gegebenen Peripheriewinkeln durch zwei Punkte, ohne Aufsuchen der Mittelpunkte (vgl. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, 7. Aufl., Bd. II, S. 190); der Goniograph von Pott (Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. VII, 1878, S. 89); der Einschneidetransporteur von V. v. Reitzner (vgl. Hartner, Handbuch der niederen Geodäsie, 8. Aufl., Bd. I, S. 314), welche aus drei Linealen bestehen, die in verschiedene Winkel gebracht, in diesen durch Druckschrauben festgehalten werden und dann (so wie oben die auf Pauseleinwand gezogenen Linien) an das Tischdreieck angelegt werden.

* Anleitung zum vorteilhaftesten und zweckmäßigsten Gebrauch des Meßtisches, herausgegeben von Gotthelf August Fischer, Dresden 1812, S. 20.

** Eigentlich nicht ganz genau, denn der Scheitel β liegt nicht genau über dem Feldpunkte D; der Unterschied ist aber so gering, daß ein merklicher Fehler daraus nicht entstehen kann.

$ca\beta$ beschriebener Kreis K_2 hat daher über der Sehne ac überall den Peripheriewinkel μ und ein um $cb\alpha$ beschriebener Kreis K_1 über der Sehne cb überall den Peripheriewinkel ν; der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise x hat daher die Eigenschaft, daß der Winkel $\measuredangle axc = a\beta c = \mu$ ist, weil c ein Punkt des Kreises K_2 ist und der Winkel $cxb = c\alpha b = \nu$, weil c ein Punkt des Kreises K_1 ist; x ist daher der gesuchte Punkt d; wird er vertikal über den Feldpunkt D gebracht und die Linie xa nach A orientiert, so müssen die beiden Linien xc nach C und xb nach B orientiert sein.

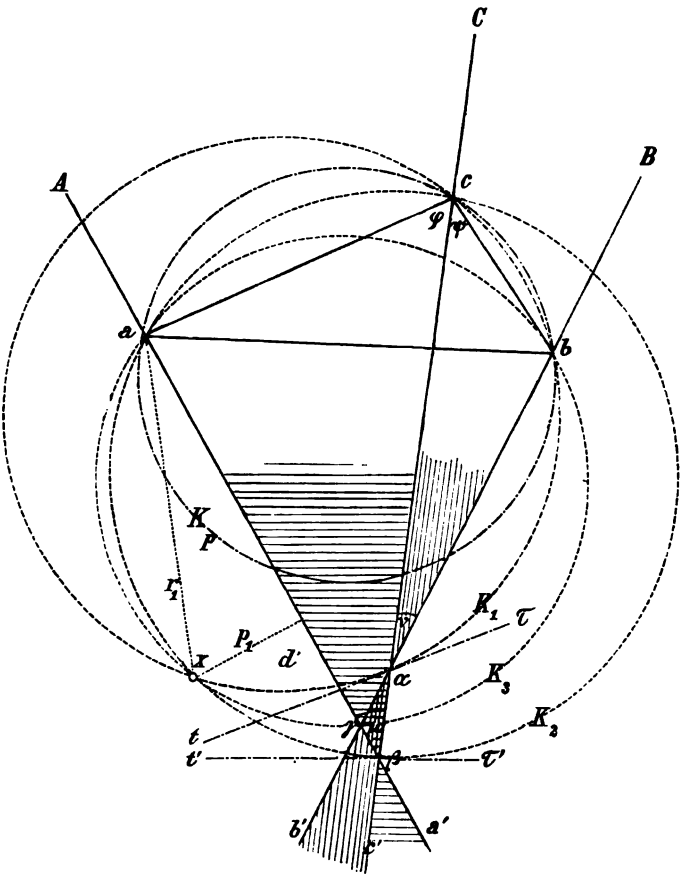


Fig. 219.

Diese Lösung hat aber den Nachteil, daß sie neuerdings die Konstruktion zweier Kreise fordert,* welche aber mit Zuhilfenahme der folgenden, von Lehmann 1811 gefundenen Sätze umgangen werden kann:

1. Findet man bei der Aufstellung des Tisches über D** und dem Visieren nach den drei Punkten A, B, C, daß das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$ in

* Übrigens muß auch der um $ab\gamma$ beschriebene Kreis K_3 durch x gehen, denn es ist $A\gamma B = \mu + \nu$ als Außenwinkel des Dreieckes $\alpha\beta\gamma$, also gleich axb.

** Den Punkt D hat man sich dabei irgendwo unter dem Tischblatte zu denken; auf seine Lage kommt es zunächst nicht an. Man findet dabei den Punkt x, der vertikal

das Dreieck abc hineinfällt (Fig. 218), so liegt der Punkt x, daher d innerhalb des Fehlerdreieckes.

2. Fällt das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$ außerhalb abc, so fällt x auch außerhalb $\alpha\beta\gamma$, und zwar sind

a) das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$ und der Punkt x auf derselben Seite der mittleren Visur $c\alpha\beta$, wenn x außerhalb eines um abc umschriebenen Kreises liegt (Fig. 219),

b) das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$ und der Punkt x auf entgegengesetzter Seite der mittleren Visur $c\alpha\beta$, wenn x innerhalb des um abc umschriebenen Kreises liegt (Fig. 220).

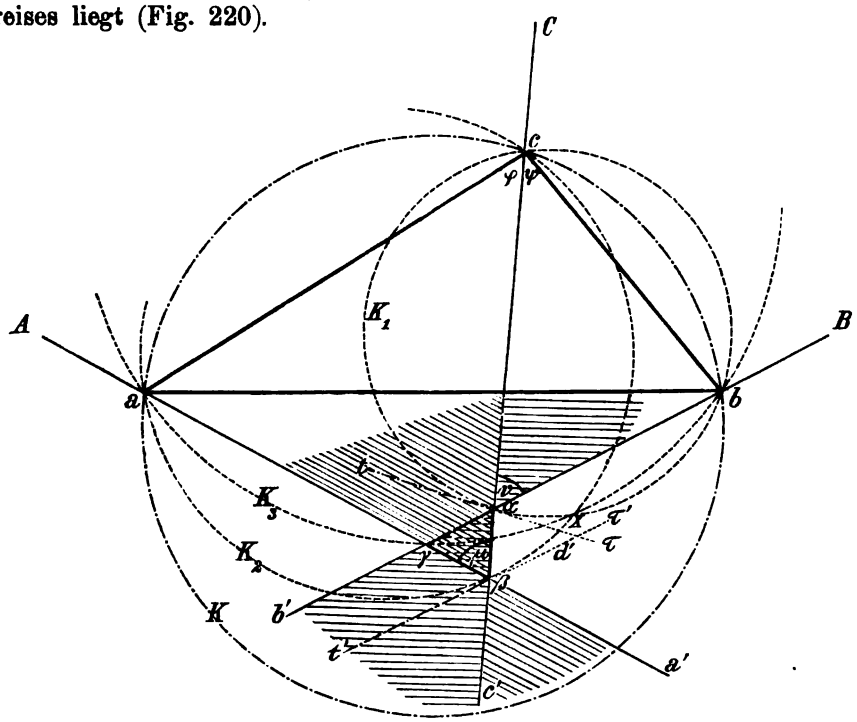


Fig. 220.

Der Beweis kann dadurch geführt werden, daß man die Räume sucht, durch welche die drei Kreise K_1, K_2, K_3 gehen oder die Räume ausschließt, durch welche die Kreise nicht gehen können.*

Für den Fall 1, Fig. 218, sieht man sofort, daß alle drei Kreise durch den Innenraum von $\alpha\beta\gamma$ gehen müssen, wie immer es auch gegen abc gedreht ist; da es aber nur noch einen Schnittpunkt je zweier Kreise gibt, weil einer der beiden Schnittpunkte in die Punkte a, b, c fällt, so muß der zweite Schnittpunkt in den Innenraum von $\alpha\beta\gamma$ fallen.

über D liegen sollte. Ist der vertikal über D liegende Punkt d_0, so kann derselbe irgendwo am Tischblatte sein. Je weiter er von x entfernt ist (d. h. je schlechter orientiert die Visuren xa, xb, xc sind), desto größer wird das Fehlerdreieck; fallen die beiden Punkte zusammen, so verschwindet das Fehlerdreieck.

* T. Freuchen, Zeitschrift f. Vermessungswesen, 1877, S. 276.

Für den Fall 2 kann der Punkt x nicht in den Raum $a\beta c$ und seinen Scheitelraum $a'\beta c'$, nicht in den Raum $c\alpha b$ und seinen Scheitelraum $c'ab'$ hineinfallen (womit auch $a\gamma b$ mit seinem Scheitelraum $a'\gamma b'$ ausgeschlossen ist) und es bleibt daher nur der Raum $b\alpha\beta a'$ und $a\gamma b'$ und es ist nur zu entscheiden, in welchem dieser beiden Räume x liegt.

Bezeichnet man die beiden Winkel acc' und bcc' mit φ und ψ, so wird die Lage des Punktes x wesentlich bedingt durch die Summe der Winkel

$$S = \mu + \nu + \varphi + \psi.$$

Zieht man in denjenigen Eckpunkten α und β des Fehlerdreieckes, welche in der mittleren Visur liegen, die Tangenten αt, $\beta t'$ nach der Seite des dritten Eckpunktes γ des Fehlerdreieckes hin und sind deren Verlängerungen $\alpha\tau$, $\beta\tau'$, so ist nach elementaren Sätzen der Planimetrie:

$$b\alpha\tau = bc\alpha = \psi; \qquad t'\beta a = ac\beta = \varphi$$

daher

$$t\alpha\beta = c\alpha\tau = \nu + \psi; \qquad t'\beta\alpha = \mu + \varphi.$$

a) Ist nun $t\alpha\beta + t'\beta\alpha < 180°$ (Fig. 219), so schneiden sich die Tangenten αt und $\beta t'$, daher auch die Kreise K_1 und K_2 auf der Seite von γ.

b) Ist aber $t\alpha\beta + t'\beta\alpha > 180°$ (Fig. 220), so schneiden sich die Tangenten αt und $\beta t'$, daher auch die Kreise K_1 und K_2 auf der andern Seite von γ.

Sind die Winkel μ, ν derart, daß $\mu + \nu + \varphi + \psi = 180°$ ist, so wird $acbx$ ein Sehnenviereck, d. h. x ist der vierte Eckpunkt p eines Viereckes, von welchem drei Ecken a, b, c sind, und da diese auf dem Kreise K liegen, so muß auch x auf diesem dem Dreiecke abc umschriebenen Kreise K liegen. Ist dann $apc = \mu$ mit dem Scheitel in p irgendwo auf dem Kreise K, so muß der Scheitel p' des Winkels $cp'b = \nu$ ebenfalls in den Kreis K, also mit p zusammenfallen, wenn die mittlere Visur cp ist. Allerdings bleibt dabei der Punkt p auf dem Kreise K willkürlich, daher die Aufgabe unbestimmt, da jeder Punkt des Kreises K der Bedingung genügt, daß aus ihm die Visuren gegen a, c und b hin die Winkel μ und ν einschließen. Die Kreise K_1, K_2, K_3 fallen in diesem Falle zusammen und das fehlerzeigende Dreieck reduziert sich auf einen Punkt.

Je weiter aber der Punkt x in den Kreis K hinein- oder aus dem Kreise K herausrückt, desto weiter rücken auch die Kreise K_1, K_2, K_3 auseinander. Daraus folgt, daß wenn der Punkt d in der Nähe des Kreises K (nach außen oder innen) liegt, der Schnittpunkt der drei Kreise sich nur unsicher bestimmen läßt und das Fehlerdreieck sehr klein bleibt. Ein sehr kleines fehlerzeigendes Dreieck wird daher nur dann ein Zeichen nahe richtiger Orientierung und daher zu einer raschen und sicheren Bestimmung des Punktes d führen, wenn dasselbe weit weg vom Kreise K liegt; in der Nähe des Kreises K hingegen ist es noch durchaus kein Zeichen einer guten Orientierung.

Die Summe S wird nun größer als 180°, wenn μ und ν wachsen, was dann der Fall ist, wenn das Fehlerdreieck in den Kreis K hineinrückt; S wird kleiner als 180°, wenn μ und ν abnehmen, d. h. wenn das Fehlerdreieck herausrückt, womit die beiden Sätze 2*a*) und *b*) bewiesen sind.

Man wird daher jederzeit in der Lage sein, die richtige Lage des Punktes d auf dem Tischbrett aus der Lage des Fehlerdreieckes genähert anzugeben und man kann nun einen Punkt d', der dem angegebenen Orte nahe liegt, über den Feldpunkt D bringen. Natürlich wird die neue Aufstellung möglicherweise wieder nicht genau sein und man erhält ein anderes, jetzt kleineres fehlerzeigendes Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ (Fig. 221), dessen Eckpunkte ebenfalls auf den (nicht gezeichneten) Kreisen K_1, K_2, K_3 liegen müssen. Ersetzt man die Kreisbögen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ dieser Kreise durch gerade Linien (Fig. 221), so erhält man einen neuen Punkt x' (die drei Geraden werden sich allerdings nicht genau in einem Punkte schneiden), der schon sehr genähert als der gesuchte Punkt angesehen werden kann. Benutzt man denselben neuerdings, so wird noch ein meist schon so kleines Fehlerdreieck erhalten, daß man bei der nächsten Orientierung schon auf den wahren Punkt kommt. Jedenfalls muß dieser Vorgang so lange wiederholt werden, bis sich die drei Visuren aA, bB, cC genau in einem Punkte schneiden.

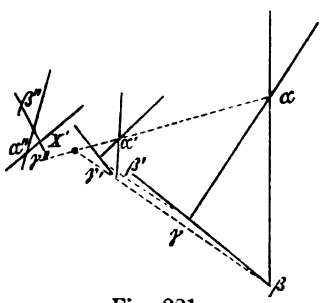


Fig. 221.

Es schadet dabei nicht, wenn man einmal den Tisch zu weit nach der Seite der richtigen Orientierung dreht, man wird dann nur auf der andern Seite von x ein entgegengesetzt liegendes Fehlerdreieck erhalten, welches in derselben Weise zu verwenden ist.*

84. *f*) Das Hansensche Problem. Es sei bereits ein Teil der Aufnahme ausgeführt und es sollen gegenüber zwei Fixpunkten A, B, deren Bilder a, b (Fig. 222) sind, zwei andere c, d des Tisches als Bilder zweier Feldpunkte C, D festgelegt werden, von denen aus die Aufnahme fortgesetzt werden soll. Nimmt man eine beliebige Standlinie cd auf dem Tische an und nimmt das

---

* In der Praxis kommen wohl kaum andere Methoden zur Anwendung; doch kann man bei sehr großen Fehlerdreiecken noch den Satz zu Hilfe ziehen, daß die Abstände des Punktes x von den drei Seiten des Fehlerdreieckes sich verhalten wie die Abstände desselben von den drei Ecken des Dreieckes abc. Bezeichnet man die Entfernungen ax, bx, cx (Fig. 219) mit r_1, r_2, r_3 und die Abstände des Punktes x von $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ mit p_1, p_2, p_3, so ist

$$p_1 : p_2 : p_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

Ist nämlich der Winkel $\gamma a x$ (Fig. 219) gleich w, so ist auch $\gamma b x = w$ als Peripheriewinkel im Kreise K_3 über dem Bogen $x\gamma$; ebenso ist $xc\beta = w$ als Peripheriewinkel im Kreise K_2 über dem Bogen $x\beta$; es ist daher

$$\sin w = \frac{p_1}{r_1} = \frac{p_2}{r_2} = \frac{p_3}{r_3}.$$

Auch die Auflösung von Netto (Handbuch der gesamten Vermessungskunde, Berlin 1820, I. Teil, S. 421), welche die mittlere Visur theoretisch genau liefert, aber eine geometrische Konstruktion erfordert, wird meist mehr Zeit beanspruchen, wie eine neuerliche näherungsweise Orientierung. Eine andere geometrische Methode gibt Grunert (Archiv für Mathematik und Physik, Bd. XVI, S. 208); auch von dieser gilt das eben gesagte. Der Praktiker wird sich daher meist der Methode der sukzessiven Näherungen mittels des Fehlerdreieckes bedienen.

Viereck $ABCD$ durch Visieren und Schneiden auf (indem man zuerst c vertikal über C aufstellt, cd gegen D orientiert, dann die Visuren CB und CA zieht; dann den Tisch mit dem Punkte d vertikal über D aufstellt, dc gegen C orientiert und mittels der Visuren DA, DB schneidet), so erhält man ein Viereck $a'b'cd$, von welchem aus die Aufnahme fortgesetzt werden könnte, wenn entweder $a'b'$ zufällig mit ab zusammenfällt oder aber $a'b'$ beibehalten und an Stelle von ab gesetzt werden könnte. Das erstere wird meist nicht der Fall sein und das letztere ist unzulässig, wenn, wie vorausgesetzt, ab einen Teil einer bereits vollzogenen Aufnahme bedeutet. Man wird

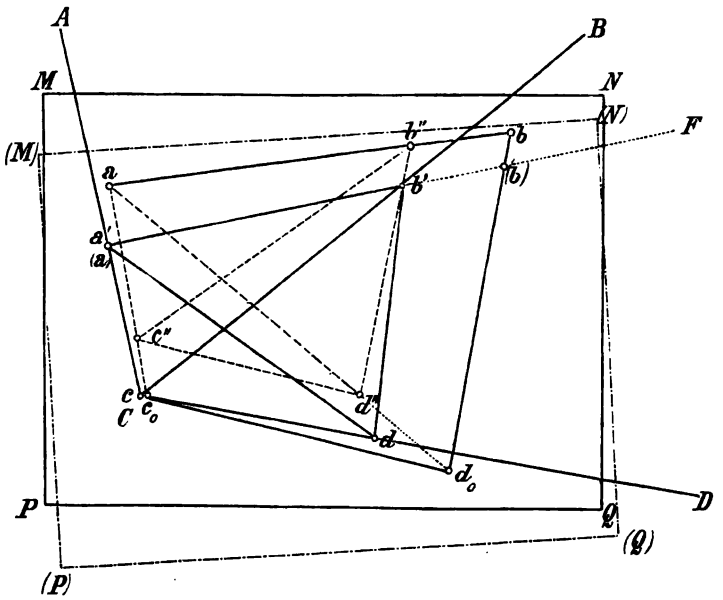


Fig. 222.

dann das Viereck $a'b'cd$, in dem Verhältnis $ab:a'b'$ vergrößert, an ab anlegen, was auf geometrischem Wege geschehen kann: man macht $ab'' = a'b'$ überträgt das Viereck $a'b'cd$ kongruent nach $ab''c''d''$, verlängert ad'' und zieht bd_0 parallel zu $b''d''$ und durch d_0 die Parallele zu $c''d''$. Die so erhaltenen Punkte c_0, d_0 sind diejenigen Punkte des Meßtischblattes, welche den Punkten a, b der bereits vollzogenen Aufnahme entsprechen. Um zu prüfen, ob nicht durch die mehrfachen Übertragungen merkliche Fehler entstanden sind, stellt man sich dann mit c_0 vertikal über C und nachher mit d_0 vertikal über D auf und muß dann durch Visieren und Schneiden wieder auf die Punkte a, b kommen. Sollte dies noch nicht der Fall sein, so wird es nur mehr ganz geringfügiger Änderungen bedürfen, um die richtigen Punkte zu finden.

Meist wird auch hier für den Praktiker die Übertragung durch einfache Meßtischoperationen vorzuziehen sein. Man stellt von vornherein ab nahe parallel zur gegebenen Richtung AB; hat man, wie vorher, das Viereck $a'b'cd$ erhalten, so wird a' herabgesenkelt; es sei der erhaltene Feldpunkt E; dann wird die Richtung $a'b'$ durch einen entfernten Pflock F markiert, der Punkt a

über den Feldpunkt E gebracht und die Richtung ab gegen F orientiert, wobei das Tischblatt $MNPQ$ nach $(M)(N)(P)(Q)$ kommt und das Viereck abd_0c_0 direkt durch Visieren hergestellt werden kann. Da nämlich in dieser neuen Lage ab wirklich parallel der Feldlinie AB ist, weil ja die früher erhaltene $a'b'$ parallel war, so wird man, über a nach A und über b nach B visierend, sofort den Punkt c_0 erhalten, der allerdings nicht genau über dem Feldpunkte C liegen wird. Senkelt man c_0 auf das Feld herab, so wird sich ein neuer Feldpunkt C_0 (äußerst nahe zu C) ergeben, der als Aufnahmspol für die weitere Aufnahme zu treten hat. Die Bestimmung des Bildes d_0 des Feldpunktes D (der nicht geändert zu werden braucht) kann dann ohne Mühe durch Seitwärtsabschneiden erfolgen.

85. *g*) Eine mitunter in der Praxis auftretende Aufgabe ist die folgende: Zu vier gegebenen Fixpunkten (Berg- oder Turmspitzen) A, B, C, D, deren Meßtischbilder a, b, c, d (Fig. 223) seien, zwei Punkte m, n den gegebenen Feldpunkten M, N entsprechend zu finden, aus denen die Aufnahme gemacht werden soll.*

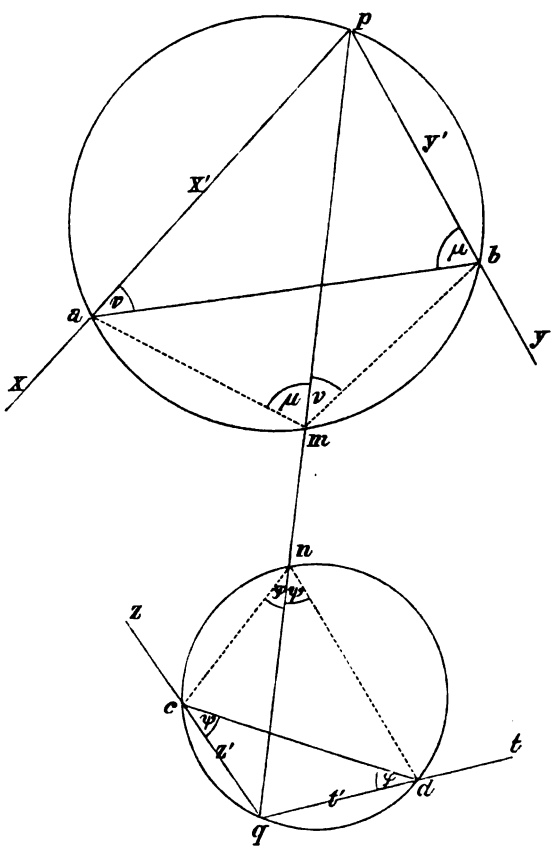


Fig. 223.

Ist es gestattet, die Lage der Tischpunkte a, b, c, d zu verändern, so kann man natürlich die Aufstellung in M, N zugrunde legen und a, b, c, d durch Visieren und Schneiden bestimmen. Das ist aber nicht der Fall, wenn z. B. an a, b, c, d bereits ein größerer Teil der Aufnahme angeschlossen wurde und von den Punkten M, N, die noch nicht bestimmt sind, die Aufnahme eines z. B. in einer Talenge zwischen $ABCD$ gelegenen Tales vorgenommen werden soll.

Denkt man sich in M die Winkel μ, ν (die Nebenwinkel der Winkel AMN, BMN) und ebenso in N die Winkel φ, ψ (die Nebenwinkel von CNM, DNM) gemessen, um die Dreiecke amb und cnd die Kreise umschrieben und die Linie mn bis zu diesen Kreisen in p, q verlängert, so ist auch $\sphericalangle pba = \mu$; $\sphericalangle pab = \nu$; $\sphericalangle qcd = \psi$; $\sphericalangle qdc = \varphi$. Trägt man

* Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometr. Operationen des Katasters; im Auftrage des königl. ungar. Finanzministeriums verfaßt von J. Marek, Budapest 1875.

daher an ab, cd die Winkel μ, ν, φ, ψ in der angegebenen Weise auf, verbindet die Schnittpunkte p, q der zweiten Schenkel (ohne die Kreise zu zeichnen), so erhält man die Linie pq, in welcher die Punkte m, n durch Seitwärtseinschneiden erhalten werden können. Auch diese Aufgabe kann ohne Transporteur und Zirkel gelöst werden:

Man bringt	orientiert	visiert nach	erhält die Linie	und deren Verlängerung
1. a über M	ab gegen B	N	ax	ax'
2. b über M	ba gegen A	N	by	by'
3. c über N	cd gegen D	M	cz	cz'
4. d über N	dc gegen C	M	dt	dt'

Der Schnittpunkt der Linien ax' und by' bestimmt den Punkt p; der Schnittpunkt von cz' und dt' den Schnittpunkt q auf dem Tischblatt. n und m werden dann durch Seitwärtsabschneiden ermittelt.

86. *h*) Relèvement sous voiles; flying survey. Problem der sechs Punkte. Hat man an drei ihrer Lage nach unbekannten Schiffsorten drei ebenfalls unbekannte Landstationen gepeilt, so kann man aus diesen Beobachtungen die gegenseitige Lage der sechs Punkte bestimmen. Diese Aufgabe könnte auch am Lande verwendet werden, wenn an drei Aufnahmspunkten A, B, C gepeilt, d. h. das Azimut der Richtungen nach den drei unbekannten Punkten D, E, F (Fig. 224) bestimmt wurde. Die Differenz der in A gemessenen Azimute NAD, NAE, NAF gibt nämlich die Winkel DAE, EAF und dasselbe gilt für die Peilungen in B und C. Wichtig aber ist, daß durch die Peilungen auch die Winkel AEB und BEC (oder die analogen Winkel in D und F) bekannt werden. Denn es ist z. B. $AEB = NAE - N'BE$ (die Winkel nach der einen Richtung als positiv, nach der andern als negativ betrachtet).

Eine einfache graphische Lösung* gab G. D. E. Weyer mittels der Collinsschen Geraden. Trägt man die Winkel μ_1, ν_1 bei F beziehungsweise D auf, so erhält man den Hilfspunkt E_1, der mit E verbunden, die Collinssche Gerade E_1E geben würde, auf welcher A liegen muß, wenn E bekannt wäre. Ebenso erhält man durch Verwendung der Winkel μ_2, ν_2 an F und D den Hilfspunkt E_2 für die Gerade E_2E, auf welcher B liegen sollte; und endlich durch Benutzung der Winkel μ_3, ν_3 den Hilfspunkt E_3. Obzwar der Punkt E unbekannt ist, so sind doch die Winkel $E_1EE_2 = AEB = \varphi$ und $E_2EE_3 = BEC = \psi$ durch die Peilungen bekannt und man kann daher den Punkt E durch Rückwärtseinschneiden gegen $E_1E_2E_3$ aus den Winkeln φ und ψ ermitteln. Ist E gefunden, so ergeben sich A, B, C durch Seitwärtseinschneiden.

---

* Andere Lösungen s. E. P. Dubois, Traité de navigation et d'Hydrographie, Paris 1859; D. J. Brower, Zeevartkunde, 2. Aufl. durch Simon van der Aa, Nieuwediep 1882, Kap. 9 (nach G. D. E. Weyer: Konstruktion zu einer Küstenaufnahme im Vorbeifahren unabhängig von der Strömung und Fahrtmessung; Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Sept. 1881; das Original des zweiten Werkes konnte ich nicht erhalten).

Beispiel: Es sei gepeilt:

in A: $NAD = -25°$; $NAE = +17°$; $NAF = +51°$
in B: $NBD = -79°$; $NBE = -12°$; $NBF = +81°$
in C: $NCD = -67°$; $NCE = -34°$; $NCF = +37°$

so ist:

$$\mu_1 = 42°, \quad \mu_2 = 67°, \quad \mu_3 = 33°$$
$$\nu_1 = 34°, \quad \nu_2 = 93°, \quad \nu_3 = 71°$$
$$\varphi = 29° \qquad \psi = 22°$$

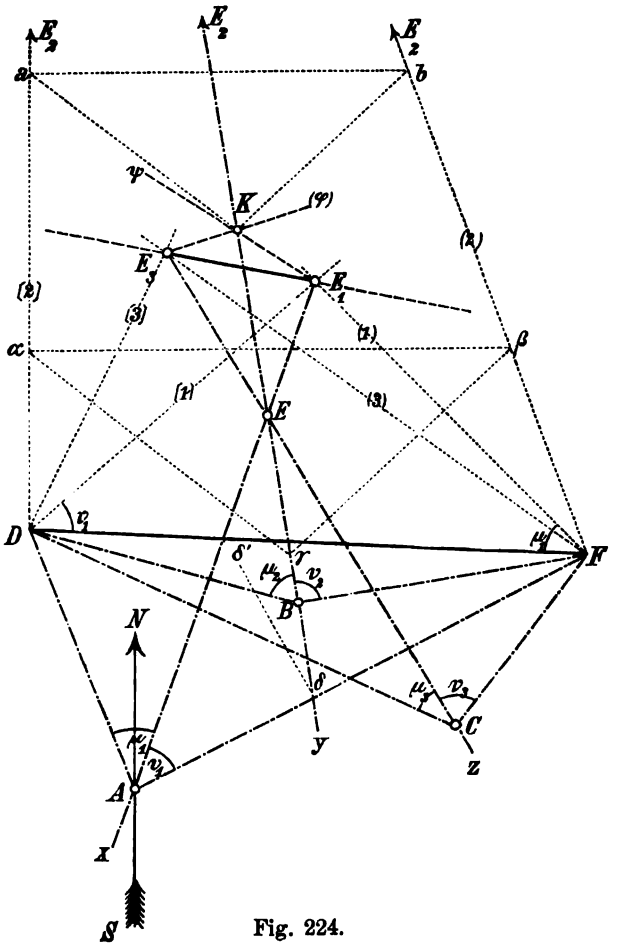


Fig. 224.

Konstruktion: DF wird beliebig angenommen; $DF(1)$, $DF(2)$, $DF(3)$ werden gleich μ_1, μ_2, μ_3, $FD[1]$, $FD[2]$, $FD[3]$ gleich ν_1, ν_2, ν_3 gemacht, wodurch man E_1, E_2, E_3 erhält. Sodann wird $E_3E_1(\psi) = \psi$, $E_1E_3(\varphi) = \varphi$ gemacht; E_2K ist die Gerade, auf welcher E und B liegen muß. Da E_3 außerhalb der Zeichnungsfläche liegt, so muß die Linie KE_3 durch eine Hilfskonstruktion ($\alpha\beta \parallel ab$; $\alpha\gamma \parallel aK$, $\beta\gamma \parallel bK$; $K\gamma$ die gesuchte Linie) gefunden werden. Nun wird $E_3EK = \psi$ (z. B. an einem willkürlichen Punkte von E_2K: $\sphericalangle K\delta\delta' = \psi$ und durch E_3 eine Parallele zu $\delta\delta'$ gezogen) ge-

macht, wodurch man den Punkt E erhält. Im selben Punkte E muß auch die durch E_1 unter dem Winkel φ zu E_2K gezogene Gerade diese treffen. Damit sind die drei Geraden E_1Ex, E_2Ey, E_3Ez, in welchen die Punkte A, B, C liegen müssen, gefunden und man hat nur mehr von D und F Linien zu ziehen, die gegen E_1E unter den Winkeln μ_1, ν_1, gegen E_2E unter den Winkeln μ_2, ν_2, gegen E_3E unter den Winkeln μ_3, ν_3 geneigt sind und erhält die Punkte A, B, C. Die Orientierung folgt aus $NAD = 25°$, der Maßstab durch Messung irgendeiner Distanz, z. B. AC in der Natur.

Die Konstruktion ist keineswegs von derjenigen Genauigkeit, die Punkte A, B, C mit großer Sicherheit zu geben und wenn die Genauigkeit der Winkelmessung etwas größer wird, so wird die Rechnung vorzuziehen sein. Peilungen mit der Bussole können allerdings kaum eine größere Genauigkeit verbürgen als $\frac{1}{2}°$ und wäre eine größere Genauigkeit in der Rechnung illusorisch; in diesem Falle wird man daher wohl mit der Konstruktion ausreichen. Sind jedoch die Winkel bei A, B, C z. B. photogrammetrisch bestimmt, so werden dieselben auf Bogenminuten erhalten und dann sind die Peilungen, welche die Winkel bei D, E, F geben, viel weniger genau, daher den anderen Beobachtungen nicht adäquat. In diesem Falle läßt sich aber eine gegenseitige Bestimmung von acht Punkten erlangen, wenn entweder an vier Punkten A, B, C, D die zwölf Winkel zwischen vier Objekten E, F, G, H gemessen werden oder aber, wenn von den drei Punkten A, B, C, die zwölf Winkel zwischen fünf Punkten D, E, F, G, H (Fig. 253) ermittelt werden, weshalb ich diese Aufgabe als Problem der acht Punkte bezeichnet habe.* Da es sich hierbei um Messungen handelt, die mindestens auf die Bogenminute genau erhalten werden, so wird die Rechnung vorzuziehen sein (s. Nr. 120).

87. *i*) **Aufnahmsmethoden.** Um eine Aufnahme in einem bestimmten Maßstabe zu machen, ist es nötig, die Länge einer gewissen Strecke, einer **Basis** zu kennen. Die Bestimmung einer solchen geschah in früheren Zeiten mittels der Meßkette: diese wurde an beiden Enden gefaßt, in der Richtung der zu messenden Strecke getragen, das rückwärtige Ende an den Anfangspunkt der Strecke angelegt, das vordere Ende in die Richtung derselben einvisiert und beim Endpunkte ein Kettennagel eingesteckt. Durch Weiterschreiten wird eine zweite Kettenlänge abgesteckt, wobei der vordere Kettenträger nach jeder Kettenlänge einen Kettennagel einsteckt, welchen der folgende Kettenträger übernimmt; die Zahl der Kettenlängen ergibt sich aus der Zahl der übernommenen Kettennägel, während das letzte Stück, welches nur einen Bruchteil der ganzen Kettenlänge betragen kann, an den Kettengliedern abgezählt wird. In derselben Weise kann die Messung mit dem Meßband vorgenommen werden.

Besser ist die Messung mittels Meßstäben. Auf stark geneigtem Terrain muß dabei die Latte L (Fig. 225) horizontal gelegt werden, wobei das eine Ende auf den Boden, das andere Ende auf das Lager λ kommt, welches

* S. des Verfassers „Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens, das Problem der acht Punkte", Sitzungsber. der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Klasse, Bd. CXIII, Abteil. II *a*.

an einer vertikalen Latte l so lange verschoben wird, bis eine aufgesetzte Libelle N einspielt. Die Latte l muß dabei auch genau vertikal sein, da sonst der Lattenabschnitt nicht die genaue Horizontaldistanz der beiden Punkte PQ gibt. Die einzelnen Lattenlagen bilden dabei Stufen, daher der Name Staffelmessung. Ist die vertikale Latte ebenfalls geteilt, so kann man gleichzeitig den Höhenunterschied bestimmen.

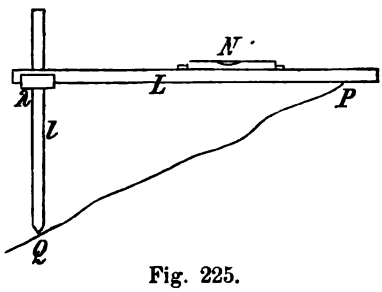


Fig. 225.

Eine große Genauigkeit ist hierdurch nicht zu erreichen und werden jetzt die Detailvermessungen ausschließlich an die Landestriangulation angeschlossen, aus welcher die Länge der Seiten des graphischen Dreiecksnetzes bekannt wird, so daß eine derselben oder eine an sie angeschlossene Länge die Basis der Detailvermessung bildet.

Hat man eine Reihe von Fixpunkten, entweder Dreieckspunkte des graphischen Netzes oder aus diesen (z. B. durch Rückwärtseinschneiden) erhaltene Punkte, so werden diese mittels ihrer Koordinaten (s. Nr. 121 und Nr. 134) auf das Meßtischblatt übertragen. Das entstehende Tischdreieck muß demjenigen in der Natur ähnlich sein, d. h. dessen Winkel müssen denjenigen in der Natur gleich sein. Würde man sich daher in einem Punkte A aufstellen, die Seite ab nach B orientieren, so müßte ac in die Richtung AC (Fig. 226) fallen; denn da man von diesen Punkten meist durch Winkelmessungen (Visieren und Schneiden) auf andere Punkte übergeht, so muß vollkommene Winkelgleichheit bestehen. Stimmen die Winkel nicht genau überein, so ist nach den Instruktionen für den Kataster in Österreich eine Korrektion gestattet, wenn der Fehler $\frac{1}{1000}$ der Distanz nicht überschreitet. Ist in diesem Falle Cab der Winkel in der Natur, cab aber der durch Eintragung der Fixpunkte entstandene Winkel und cx kleiner als $\frac{1}{1000}\,ac$, so wird die Korrektur vorgenommen, indem cx halbiert und durch den Halbierungspunkt die zu aC parallele Gerade a_0C gezogen wird. Ebenso verfährt man in b und man erhält so ein neues Dreieck $a_0b_0c_0$, dessen Winkel denjenigen des Felddreieckes gleich sind, an welches daher angeschlossen werden kann. Ehe diese Korrektion aber vorgenommen wird, muß eine sorgfältige Kontrolle der Übertragungen vorgenommen werden.

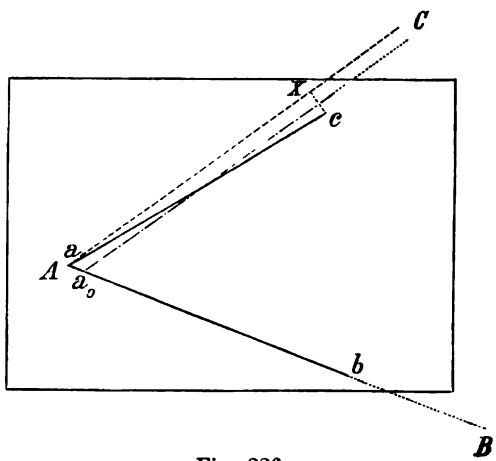


Fig. 226.

Fehler, die $\frac{1}{1000}$ der Distanz überschreiten, dürfen überhaupt nicht in dieser Weise korrigiert werden, sondern müssen durch neue Übertragung weggeschafft werden.

Größere Komplexe müssen von mehreren Fixpunkten aus aufgenommen

werden; denn zwei oder drei Fixpunkte reichen für das ganze Blatt nicht aus, da man in größeren Entfernungen von denselben zu schiefe Schnitte, also sehr unsichere Bestimmungen erhält. Man wird daher sofort noch eine Reihe von Fixpunkten ergänzen, möglichst sicher bestimmen, aus denen dann die Aufnahme ungestört fortgesetzt werden kann. Man kann dann einzelne Komplexe in nicht zu weiter Entfernung von einem Punkte durch die Methode des Visierens und Messens (s. Nr. 79) oder von zwei Punkten durch Visieren und Schneiden aufnehmen. Sind von einem Punkte zahlreiche Visuren zu nehmen, so wird man, um die Arbeit zu beschleunigen, in diesem Punkte eine Anschlag- oder Pikiernadel anbringen. Das Lineal wird dann aber nicht genau über dem Punkte, sondern um die halbe Nadeldicke seitlich angelegt und, um stets denselben Punkt beizubehalten, muß das Diopterlineal stets an derselben Seite der Nadel angelegt werden. Vollständig durchführbar ist dieses nicht, da ja schon beim Drehen des Lineales behufs Visierens in anderer Richtung dasselbe an einem andern Punkte anschlägt. Daraus folgt aber, daß man möglichst feine Anschlagnadeln zu verwenden hat.

Eine häufig angewendete Aufnahmsmethode ist die Koordinatenmethode. Die Verbindungslinie zweier passend gelegenen Fixpunkte AB wird als Abszissenachse angesehen von den einzelnen aufzunehmenden Punkten M, N, P (Fig. 227) werden Perpendikel gefällt (mittels des Winkelspiegels), dann die Strecken $Am, An, Ap \ldots, mM, nN, pP \ldots$ gemessen und im verjüngten Maßstabe auf das Meßtischblatt aufgetragen. Die Messung der Strecken kann mit der Kette, mit dem Meßband oder mit Stangen geschehen.

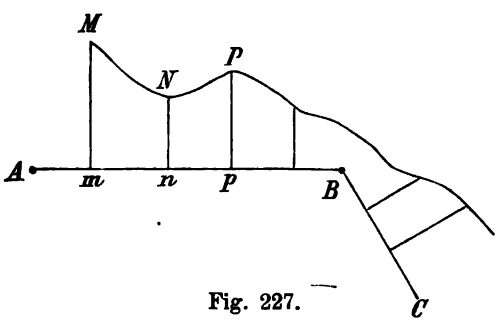


Fig. 227.

Punkte, welche zu weit von dieser Achse entfernt sind, können auf eine andere Achse BC bezogen werden.

Diese Methode empfiehlt sich besonders für die Aufnahme von Straßenzügen, krummen Linien (Gewässern). Hat man z. B. eine krummlinige Begrenzung (eines Teiches, eines Waldes) aufzunehmen, so wird diese von einem Polygon umschlossen, dessen Ecken je nach den Umständen durch Visieren und Schneiden (wenn alle von den Fixpunkten aus sichtbar sind) oder nach der Umfangsmethode (bei Wäldern) festgelegt werden und dessen Seiten dann als Koordinatenachsen angesehen werden, auf welche die eigentlichen Punkte der krummlinigen Begrenzung bezogen werden.

Namentlich für Grundstücke von höherem Werte (Weingärten usw.) empfiehlt sich diese Methode auch, weil dadurch alle Dimensionen in wahrer Größe erhalten und zu Flächenbestimmungen durch Rechnung verwendet werden können.

88. *k*) Ausgleichung von Fehlern. Hat man mehr als zwei Fixpunkte (Pole), so wird man gut tun, jeden Punkt durch mehr als zwei Richtungen zu bestimmen, d. h. jeden Schnitt zweier Visuren durch einen „Kontrollschnitt" sicherzustellen.

Bei der Umfangsmethode sind Kontrollschnitte meist nicht ausführbar, da diese Methode nur dann angewendet wird, wenn man von einem Punkte des Umfanges nur zum nächstgelegenen sieht; es können daher hier leicht Fehler vorkommen.

a) Ist der Fehler nur in einer Winkelmessung vorgekommen, so wird selbstverständlich von dem Punkte, in welchem der Orientierungs- oder Visurfehler vorfiel, die ganze Figur um einen gewissen Winkel gedreht sein; man hat daher statt des Polygonzuges 4561 (Fig. 228) denselben um einen kleinen Winkel nach 45′6′1′ gedreht; demzufolge muß 41′ = 41 sein. Erkennt man daher, daß der nicht mit dem Ausgangspunkte zusammenfallende Schließungspunkt 1′ von irgendeinem zweiten Polygonpunkte (hier 4) dieselbe Entfernung hat, so kann dieser Schlußfehler durch einen in diesem Punkte vorgefallenen Winkelfehler erklärt werden und man hat folglich den ganzen Linienzug 45′6′1′ um den Winkel 141′ bis zum Schließen zu drehen.

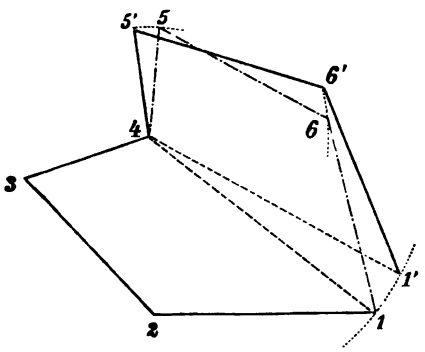


Fig. 228.

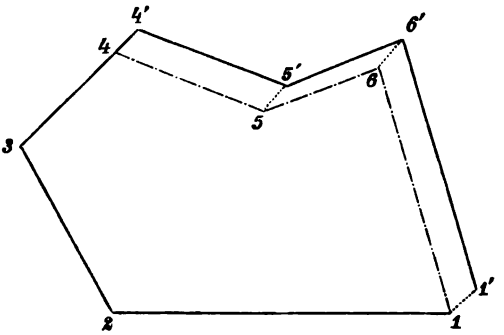


Fig. 229.

b) Hat der Fehler in einer Längenmessung stattgefunden, so wird der ganze Polygonzug von demjenigen Punkte an, in welchem der Messungsfehler vorfiel, parallel zur fehlerhaft gemessenen Seite verschoben sein. Ein Schlußfehler 1 1′ (Fig. 229) parallel zur Seite 34 deutet daher an, daß diese Seite 34 fehlerhaft gemessen wurde und der ganze Polygonzug 4′ 5′ 6′ 1′ um das Stück 1′ 1 zu verschieben ist.

Wenn möglich, ist es gut, durch neuerliches Aufstellen in den betreffenden Punkten beziehungsweise Neumessung der fehlerhaften Länge, sich von der Richtigkeit der Annahme über den Fehler zu vergewissern.

Findet sich keiner der unter *a*) und *b*) angegebenen Fehler, d. h. ergibt sich bei der Aufnahme von 1 gegen 3 über 2 und über 4, 5, 6 ein Schlußfehler 3′ 3″ (Fig. 230), der den Bedingungen *a*, *b* nicht entspricht, so wird, wenn der Fehler nicht größer als $\frac{1}{1000}$ (1)(3) ist, 3′3″ halbiert und 3 als der richtige Punkt angesehen; der Fehler wird dann auf die anderen Punkte proportional der Entfernung verteilt, was sehr nahe erzielt wird, indem die Punkte 4′, 5′, 6′ auf 1, 3″ als Abszissenachse bezogen

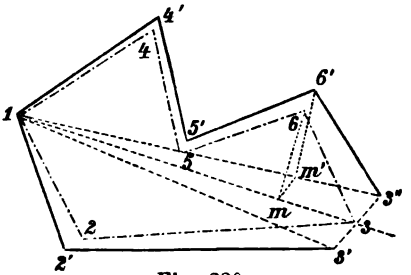


Fig. 230.

werden, durch eine Parallele $m\,m'$ die Abszisse $1\,m'$ nach $1\,m$ proportional verkürzt wird und in m die Ordinate $m\,6$ so übertragen wird, daß $m\,6 : m'\,6' = 1\,m : 1\,3$ ist.

Überschreitet der Schlußfehler die zulässige Grenze, so ist die Aufnahme zu wiederholen.

89. *l*) **Das Zeichnen der Schichtenlinien.** Schon bei der Meßtischaufnahme kann man nebst der Horizontalprojektion eines Punktes seine Höhe über dem Standpunkte ermitteln, entweder durch Messung des Höhenwinkels oder mittels der Tachymeterkippregel. Schreibt man nun zu jedem Punkte seine Höhe, so wird man leicht zwischen den eingezeichneten jene Punkte herausfinden, welche in gleicher Höhe liegen. Verbindet man diese, so erhält man die Isohypsen. Man wird jedoch nicht diejenigen zeichnen, welche einzelnen Punkten der Aufnahme entsprechen, sondern wählt solche, deren Höhenunterschied $1\,m$ oder $10\,m$ (in Karten $100\,m$) betragen. Für Tafel III sind die Höhen mittels des Barometers aufgenommen und die verzeichneten Schichtenlinien entsprechen dem Fallen des Barometers um je $1\,mm$. Um die Art der Zeichnung auseinanderzusetzen, sollen hier die Höhenkoten für die im westlichsten Teile gelegenen Punkte angegeben werden, da die Zahlen im Plane nicht eingesetzt wurden (Stand des Barometers um $n\,mm$ tiefer als in Punkt 1):

Punkt	n	Punkt	n	Punkt	n		Punkt	n
1	0·0	36	0·6	57	2·2		123	2·8
2	0·5	37	2·0	59	3·5		124	10·3
3	1·5	38	3·1	60	5·7	Schlucht	125	6·9
4	2·2	40	4·9	61	7·0		126	7·7
5	3·2	41	5·6	62	8·7		127	8·0
6	3·8	42	5·7	63	9·0		128	5·7
7	5·5	50	6·5	65	9·5		129	7·2
8	7·0			66	10·5		130	5·0
9	6·2						131	4·0
10	9·0						132	3·2
12	9·3						133	7·0
							134	5·8

Das Ziehen der Schichtenlinien entsprechend den Ständen $n = 1{\cdot}0$, $2{\cdot}0$, $3{\cdot}0$, . . . zwischen diesen Punkten wird hieraus ohne weiteres klar.

In vielen Fällen wird eine handschriftliche Notiz oder eine sofortige Skizze in einem Bereich, der nicht begangen werden konnte, gut sein. So wurde z. B. für die Wiese links vom Wege 68—69—70 eine „sattelförmige Einsenkung von Nord nach Süd" berücksichtigt, ebenso eine Erhebung zwischen ihr und dem Wege 82—83—84. Schon bei der Skizzierung kann die Form der Schichtenlinien angedeutet werden. Der Verlauf derselben in einer Schlucht in einem Sattel kann aus den hier erwähnten Stellen entnommen werden.

Für eine genaue Aufnahme müssen natürlich viel mehr Punkte bestimmt werden. Sind dieselben, wie oben, zerstreut über die ganze Fläche verteilt,

so nennt man die Aufnahmsart Flächennivellement mittels zerstreuter Punkte. Statt derselben kann auch nach den folgenden beiden Methoden verfahren werden.

1. Es werden Punkte gleicher Höhe bestimmt, indem man an einem Punkte ein Nivellierinstrument aufstellt und einen Gehilfen versuchsweise so fortschreiten läßt, daß die begangenen Punkte in derselben Höhe liegen. Die genau in der gleichen Höhe liegenden Punkte werden erhalten, indem an einer in nahe richtiger Höhe liegenden Stelle der Gehilfe so lange einvisiert wird, bis die festgestellte Zielscheibe der Nivellierlatte am Fadenkreuz des Fernrohres erscheint. Da das Nivellierinstrument meist keinen großen Bereich beherrschen wird, so werden ziemlich viele Stände nötig, auch ist das Begehen einer Schichtenlinie, namentlich in Gebirgsgegenden, nicht sehr einfach und die Sicht nach den Punkten gleicher Höhe sehr oft gedeckt. Es wird dann

2. die Aufnahme von Längen- und Querprofilen von einem Standpunkte in der Ebene, der das Profil beherrscht, vorzuziehen sein. Man wählt dazu die Profile der stärksten und schwächsten Böschungen und nach Bedarf eine größere Zahl von zwischenliegenden Profilen, pflockt dieselben aus, bestimmt die ausgepflockten Punkte ihrer Horizontaldistanz und Höhe nach, verzeichnet sie in die Aufnahme und schreibt ihre durch Tachymeter oder Höhenwinkel bestimmte Höhenkote dazu. Zwischendurch werden die Isohypsen in der oben erwähnten Art durchgezogen.

In derselben Weise können auch Fluß-Querprofile aufgenommen werden, indem man an bestimmten Punkten quer über den Fluß hinüber (z. B. in gleichen Entfernungen) die Tiefe mittels einer geteilten Latte oder mittels eines Senkbleies mißt.

90. *m*) Das Ausfertigen der Pläne. Die aufgenommenen Pläne können in Schwarz oder in Farben ausgearbeitet werden. Eigentlich wären Vorschriften für die Wahl gewisser Bezeichnungen unnötig, da in jeder Darstellung nur dafür zu sorgen ist, daß das Original des dargestellten Objektes aus diesem sofort erkannt wird. So werden Wälder durch Bäume dargestellt, und zwar Nadelwälder, Laubwälder und gemischte Wälder durch die Form der Bäume (vgl. Tafel III). Gerölle, Geschiebe, Sandhalden können durch Punktierungen, Felsen und Gestein durch eine diesen Strukturen nachgebildete Zeichnung (vgl. z. B. die Punkte 62, 150, dann die Felsen bei Punkt 8 und 81 in Tafel III) dargestellt werden. Wald- und Wiesenpfade werden durch gestrichelte Linien, breitere, fest ausgetretene Fußwege durch voll ausgezogene Linien, Fahrwege durch Parallellinien, Landstraßen durch breitere gedoppelte Parallellinien verzeichnet; Eisenbahnen ähnlich den Landstraßen, jedoch mit Andeutung der Schwellen. Straßendämme nach Art der Zeichnung bei Punkt 26, Tafel III. Hierbei muß oft der Maßstab überschritten werden. Eine Straße von 5 *m* Breite sollte bei einem Maßstabe von 1 : 10.000 durch eine Doppellinie von 0·5 *mm* Breite dargestellt werden, bei einem Maßstabe von 1 : 25.000 als Doppellinie von 0·2 *mm* Breite. Straßenzüge werden daher in Plänen dieser Art immer zu breit ausfallen, demnach das umgebende Gelände etwas ver-

schmälert. In noch viel erhöhterem Maße gilt dies von den Bäumen, welche selbstverständlich nur als typische Zeichen gewählt werden. Gebüsche werden von Waldkulturen dadurch unterschieden, daß die Bäume ohne Stämme gezeichnet werden (vgl. die Wege zwischen den Punkten 6 und 59). Auch schmale Bäche erscheinen im Verhältnisse oft zu breit. Breitere Flüsse werden möglichst genau aufgenommen, indem deren Ufer als krumme Linien durch zahlreiche Punkte vermessen werden.

Für Wiesen hat sich eine konventionelle Form herausgebildet, bei der der Graswuchs (ebenfalls ohne Rücksicht auf den Maßstab) angedeutet erscheint; vgl. die beiden Wiesen zu beiden Seiten des Punktes 12 im Plan. Sumpf wird überdies durch Querstrichelung angedeutet, vgl. Punkt 88. Häuser werden gestrichelt, wobei häufig ein Unterschied zwischen gemauerten Häusern (Strichelung in diagonaler Richtung) und Holzhäusern (Strichelung parallel zu den Begrenzungslinien) gemacht wird.

Kirchen und Kapellen werden durch Einzeichnung eines Kreuzes angedeutet; für Burgen, Ruinen, Post- und Telegraphenstationen sind ständige Zeichen, die den sie darstellenden Häusern beigefügt werden. Manche Zeichen sind nicht in allen Staaten identisch und sind Vorschriften für die Darstellung in speziellen „Instruktionen" zusammengestellt.*

Noch übersichtlicher werden kolorierte Pläne. Man unterscheidet dabei die Kulturen, Straßen, Häuser durch die Wahl der Farbe. Für Stein und Ziegel in den verschiedenen Anwendungen, also gemauerte Häuser, Steinblöcke, steinerne Brücken usw. wird durchwegs rot gewählt, und zwar meist Karmin; öffentliche Gebäude werden dabei durch dunkleren Ton hervorgehoben. Holzstrukturen: hölzerne Häuser und Brücken usw. werden in gelb (Gummigutt) dargestellt. Für Lehmgruben, Sandablagerungen wählt man orangegelb, für Sandlager häufig die Farbe, in welcher Wege und Straßen angelegt werden: Sepia, gemengt mit Sienna. Wiesen und Gärten werden gelbgrün (mit Gummigutt gemischter Grünspan), Wälder ebenso, aber in grau übergehend (mit blasser Tusche gemischt) dargestellt. Gewässer werden mit Berlinerblau angelegt; Seen, Teiche sowie breite Flüsse an den Rändern dunkler, gegen die Mitte zu blasser verlaufend; Sümpfe in Wiesenfarbe mit blauer Querstrichelung an einzelnen Stellen.

Über die farbige Darstellung kommen dann in möglichst schwarzer Tusche dieselben Zeichnungen wie auf nicht kolorierten Plänen (Bäume, Wiesen, Gärten usw.).**

Für die Skizzierung ist ebenfalls von Vorteil zu farbigen Darstellungen zu greifen, weil hierbei die Farbe selbst die Differenzierung rasch und leicht gestattet, was bei einfarbigen Plänen nur durch große Sorgfalt in den Zeichnungen möglich wird. Zu derartigen farbigen Skizzen wählt man am passendsten Pastellstifte und verwendet dabei die auch für die Ausfertigung von genauen Plänen benutzten Farben.

---

* Eine sehr gute Zusammenstellung gibt P. Kahle, „Die Aufzeichnung des Geländes beim Krokieren," Berlin, 1896. Vgl. auch Bd. XXIV der vorliegenden Sammlung.

** Die Kolorierung hat voranzugehen, da sonst leicht die Tuschlinien durch den Pinsel verwischt werden.

91. Eine besondere Erörterung bedarf noch die Darstellung der Höhen. Schichtenlinien können äußerst zart in Schwarz oder auch in Braun dargestellt werden. Die Steilheit der Böschung ist dann aus der Distanz der Schichtenlinien zu ersehen. Je näher dieselben aneinander sind, desto steiler ist die Böschung. Strenge genommen genügen diese Darstellungen vollständig. In der Praxis wird meist eine größere Übersichtlichkeit verlangt, welche dadurch erzielt werden kann, daß die einzelnen Schichten angelegt werden, und zwar in um so tieferen Tönen, je höher die Lage. Die tiefsten Schichten bleiben daher weiß, das von der ersten Schichtenlinie begrenzte Gebiet wird einmal angelegt; nach dem Trocknen das innerhalb der zweiten Schichtenlinie gelegene Gebiet nochmals, wodurch es einen doppelt so tiefen Ton erhält, weiters das innerhalb der dritten Schichtenlinie befindliche Gelände ein drittes Mal usw. Diese Praxis hat sich namentlich in Landkarten für die Tiefebene eingebürgert; mittlere Höhen etwa zwischen 200 bis 300 *m* bleiben weiß, Vertiefungen unter 200 *m* Seehöhe bis etwa 100 *m* Seehöhe werden in einem schwach grünen Ton angelegt; noch tieferliegende, unter 100 *m* in einem dunkelgrünen Ton. Auch für Erhebungen findet man mitunter diese Ausführung in Braun, und zwar bis zur mittleren Schneeregion ausgeführt; Höhen über diese hinaus (Gletscher) werden dann wieder weiß gelassen.

Durch Lehmann hat sich eine andere Darstellungsweise eingebürgert: die Bezeichnung der Terrainformation durch Striche. Diese werden in der Richtung des Wasserlaufes, d. i. des größten Gefälles, gezeichnet und die Stärke des Gefälles durch die Breite der dunklen Striche und der dazwischen liegenden weißen Zwischenräume angedeutet. In der Ausführung wird dann das Verhältnis zwischen der Strichbreite und den Zwischenräumen verschieden abgestuft. Horizontale Flächen, gleichgültig in welcher Höhe sie liegen, bleiben ganz weiß; einem Böschungswinkel von 5° entspricht eine Strichbreite von einem Teil gegenüber dem Zwischenraum von 9 Teilen; dem Böschungswinkel 10° die Strichbreite zwei Teile, der Zwischenraum 8 Teile usw. Auch hierbei herrscht nicht vollkommene Übereinstimmung. Lehmann zeichnete Böschungswinkel von 45°, die schon selten vorkommen, ganz schwarz; später ging man hiervon ab und nahm als Grenzwinkel 60°, welcher noch vielfach beibehalten ist und auch meist ausreicht. Doch kommen im Hochgebirge wohl auch noch viel steilere Böschungen vor; meist gibt auch die übliche Darstellung des Hochgebirges im großen und ganzen einen ausreichenden Überblick, weicht aber von der wirklichen Form bedeutend ab.

An Stelle der Schattierung wird häufig die Schummerung gewählt, d. i. eine Darstellung in Punkten, wobei die Dichte der Punkte (in der Handzeichnung die Dunkelheit des Bleistifttones) einen Begriff von der Steilheit der Böschung geben soll. Daß hierbei weder Schichtenlinien noch Böschungslinien ersichtlich sind, ist jedenfalls ein Nachteil; hingegeu ist es von Vorteil, daß keine absolute Schwärze auftritt. Man würde übrigens auch bei der Strichmanier an Deutlichkeit gewinnen, wenn man übereinkommen würde, allzu dunkle Töne zu vermeiden und für die Böschungswinkel 0° bis 90° (vertikale Wände) den Ton zwischen Null (ganz weiß) und $\frac{1}{2}$ (schwarze Striche gleich den weißen Zwischenräumen) abzustufen.*

* Z. B. Tonstärke $= {}^1/_2 \sin$ Böschungswinkel.

Man kann übrigens das Gefälle auch aus den Schichtenlinien allein entnehmen. Seien die Schichtenlinien für den Höhenabstand h gezogen (Beispiel 1. 100 m; Beispiel 2. die in Tafel III gewählte für je 1 mm barometrisches Gefälle, also etwa 11·5 m). Die Entfernung zweier Punkte a und b auf zwei benachbarten Schichtenlinien einer Karte im Maßstabe $1 : n$ (z. B. 1. 1:75.000, 2. 1:10.000) sei gemessen gleich a mm (1. 10 mm; 2. 5 mm) so entspricht diesem Abstande eine Entfernung in der Natur $AB = na$ $mm = \frac{na}{1000}$ m (1. 750 m; 2. 50 m); der Böschungswinkel ist daher

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{h}{\left(\frac{na}{1000}\right)} \qquad (1.\ \frac{100}{750} = 0{\cdot}1333;\quad 2.\ \frac{11{\cdot}5}{50} = 0{\cdot}2300),$$

woraus sich der Winkel α ergibt (1. $7\frac{1}{2}°$; 2. 13°). Damit ist das Gefälle in einer beliebigen Richtung in diesem Punkte gegeben; daß größte Gefälle erhält man, indem man die kürzeste Entfernung der Schichtenlinien in diesem Punkte sucht. Ist der Abstand der Schichten in diesem Falle d (1. 5 mm, 2. 2 mm), so wird das größte Gefälle α_0 gegeben durch

$$\operatorname{tang} \alpha_0 = \frac{h}{\left(\frac{nd}{100}\right)} \qquad (1.\ \frac{100}{375} = 0{\cdot}2667;\quad 2.\ \frac{11{\cdot}5}{20} = 0{\cdot}5750),$$

woraus folgt

$$1.\ \alpha_0 = 15°; \qquad 2.\ \alpha_0 = 30°.$$

Schichtenlinien würden demnach für die Darstellung der Höhenkonfiguration am brauchbarsten sein, haben aber den Nachteil, daß man die Abzählung derselben an der Karte nicht jedesmal leicht vornehmen kann, und ferner, daß bei Höhen, die unter der ersten Schichtenlinie bleiben (Hügeln) der Landschaftscharakter vollständig verschwindet, da diese Hügel überhaupt nicht zum Ausdrucke kommen. Aus diesem Grunde wäre die Lehmannsche Manier bei Karten vorzuziehen, während bei Plänen die Darstellung durch Isohypsen besser ist, um so mehr als auch dann die farbige Ausführung des Planes nicht behindert ist.

92. *n*) Die Benutzung der Pläne, Längen- und Flächenmessung. Um eine Karte oder einen Plan benutzen zu können, müssen dieselben zuerst orientiert werden. Hat man eine Bussole zur Verfügung, so wird mittels derselben die Nord-Südrichtung bestimmt und die Karte in jene Lage gebracht, daß die auf derselben verzeichnete Nord-Südrichtung mit der durch die Bussole angedeuteten zusammenfällt. Hat man keine Bussole, so kann man sich nach dem Stande der Sonne und der Zeit richten, wobei man das Azimut der Sonne genähert aus dem Stundenwinkel derselben schließen kann. Versagen beide Hilfsmittel, so wird man in der weiteren Umgebung befindliche Gegenstände zu identifizieren suchen und hiernach den Plan orientieren.

Weglängen wird man meist schätzen. Curvimeter, daß sind kleine Meßräder, die, längs der Wege auf dem Plane geführt, deren Länge in

Zentimeter zu bestimmen gestatten, daher die wahren Weglängen in Metern oder Kilometern, wenn der Maßstab der Karte bekannt ist, werden aber meist über die wahren Entfernungen, namentlich über die zur Zurücklegung nötigen Zeiten keinen Aufschluß geben können, wenn nicht Steigungen und Gefälle ausreichend berücksichtigt werden, was nicht immer möglich ist.

Zur Bestimmung der Flächen dienen die Planimeter (vgl. Nr. 64). Auch sie geben die Projektionen der wahren Flächen auf eine horizontale Ebene; wie erwähnt, ist aber nur diese maßgebend. Ist die Aufnahme der Figur durch Koordinaten erfolgt, so können diese zur Flächenberechnung dienen, da die Fläche durch die einzelnen Ordinaten in Streifen zerlegt wird, welche als Trapeze berechnet werden können.

Wesentlich einfacher wird die Flächenberechnung durch die Planimeter, welche ein bloßes Umfahren der Fläche erfordert, worüber in Nr. 64 gesprochen wurde.

93. *p*) Die Photogrammetrie. Über die photogrammetrischen Aufnahmen ist noch das folgende hinzuzufügen. Der Apparat wird auf dem Dreifuß aufgestellt, das Objektiv gehoben oder gesenkt, so daß das aufzunehmende Gebiet in der gewünschten Ausdehnung auf der Platte erscheint, gleichzeitig wird der Bildmittelpunkt notiert. Dann wird die Kassette eingesetzt, das Objektiv durch den Deckel gedeckt, eine Blende eingeschoben,* die Kassette geöffnet und durch Entfernen des Deckels kurze Zeit exponiert. Das Abheben des Deckels hat so zu erfolgen, daß er nach dem Abziehen nach oben weggeschoben wird, damit die unteren landschaftlichen Teile längere Zeit wirken als der intensivere Himmelshintergrund; aus demselben Grunde hat auch der Deckel wieder von oben aus aufgesetzt zu werden.

Das Entwickeln und Fixieren soll möglichst kurze Zeit, wo möglich unmittelbar darauf erfolgen, damit verdorbene Platten sofort durch andere Aufnahmen ersetzt werden können. Ist dies nicht möglich, so ist es ratsam, jede Aufnahme doppelt vorzunehmen.

Die sich aus den Photogrammen ergebenden Winkel können durch Zeichnung oder durch Messung erhalten werden; das letztere ist stets vorzuziehen, wo es sich um etwas genauere Angaben handelt.

Zum Ausmessen der Aufnahmen hat man eigene Meßapparate.** Da man hier die Winkel nur auf Bogenminuten genau braucht, so genügt die Abnahme mit dem Zirkel. Es ist gut, wenn die Platte zu diesem Zwecke auf einen Rahmen gelegt wird, der schief unter verschiedenen Winkeln aufgestellt und in jeder Lage festgeklemmt werden kann. Die Beleuchtung der Platte erfolgt durch einen darunter befindlichen Horizontalspiegel, welcher gegen das diffuse Tageslicht, wenn nötig gegen die einfallenden Sonnenstrahlen gerichtet wird. Ist der Spiegel von hinreichender Größe, so wird man bei jeder Sonnenhöhe genügendes Licht erhalten.

---

* Um die Randstrahlen abzuhalten; Bilder, die ohne Blenden erhalten wurden sind stets verwaschen.

** Einen solchen mit mikrometrischer Parallelverschiebung in zwei aufeinander senkrechten Richtungen, von Repsold in Hamburg, hat Verfasser in Bd. II der „Publikationen der v. Kuffnerschen Sternwarte", S. 6, beschrieben.

Durch Auflegen eines in Millimeter geteilten Glasnetzes werden dann die Entfernungen sehr bequem erhalten werden; doch müssen die Vertikal- und Horizontallinien der Netzquadrate parallel mit der Vertikal- und Horizontallinie der Aufnahme liegen.*

Teilung und Gelatineschicht müssen unmittelbar aufeinander liegen, d. h. nicht durch die Dicke der Glasplatten getrennt, damit nicht durch schiefes Daraufsehen (Parallaxe) ein Lesefehler entsteht. Zehntelmillimeter müssen hierbei geschätzt werden. Genauere Resultate erreicht man, wenn man ein dünnes Glimmerblatt oder Pauseleinwand auf die Gelatineschicht legt und die Entfernungen mit dem Zirkel abnimmt (auf der Gelatineschicht selbst kann nicht gemessen werden, da dieselbe hierdurch leicht verdorben wird) und auf einem Transversalmaßstabe abmißt. Die Entfernungen müssen aber ebenfalls in der Richtung der Horizontal- und Vertikallinie der Platte genommen werden, wozu auf der Schutzfläche zwei aufeinander senkrechte Linien gezogen sein müssen. Diese können eingerissen sein und dann durch Verschiebung der Transparentfläche in die richtige Lage gegen den Bildmittelpunkt beziehungsweise gegen die auf der Platte mitphotographierten Randmarken gebracht werden; oder aber sie werden nach diesen letzteren erst gezogen.

Wird die Platte verkehrt aufgestellt (Erdboden oben, Luftraum unten), so erhält man sofort die in der Natur rechts gelegenen Punkte auch auf der Platte rechts,** die links gelegenen links. Wird die Platte aber in aufrechter Lage zum Messen der Entfernungen verwendet, so hat man zu beachten, daß links und rechts auf der Platte vertauscht sind.

Meist wird man mehrere Aufnahmen von demselben Standpunkte zu einem Rundbilde vereinigen. Ist S (Fig. 231) der Standpunkt, so denke man

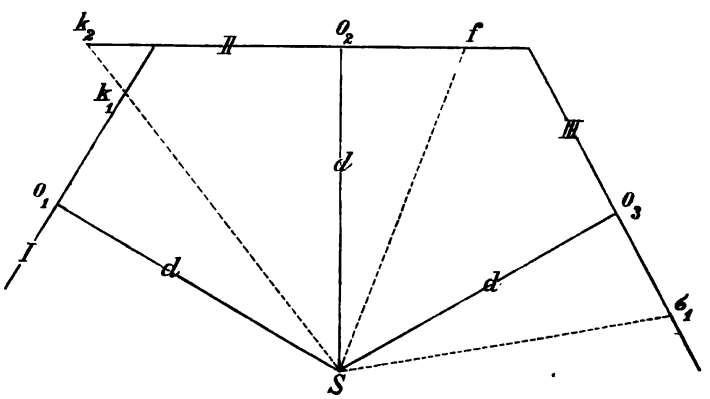


Fig. 231.

sich die Platten in der Entfernung d, gleich der Entfernung des Objektives von der lichtempfindlichen Platte aufgestellt, wobei die gegenseitige Lage

* Platte und Glasnetz müssen in ihrer Lage gegen Herabgleiten geschützt werden, was durch Schienen bewirkt werden kann, von denen die eine behufs Parallelstellung der Horizontallinien durch Fixierungsschrauben verstellbar eingerichtet sein muß.

** Die Gelatineschicht ist dabei nach aufwärts gekehrt vorausgesetzt.

der Linien So_1, So_2, So_3, d. i. der Visuren zu den Plattenmitten durch die Winkel zwischen denselben gegeben sind. Diese Winkel werden bekannt, wenn sich auf den verschiedenen, auf demselben Standpunkt S aufgenommenen Platten identische Punkte finden. Ist K ein solcher, dessen Bild auf Platte I k_1, auf Platte II k_2 ist, so erhält man durch Abmessungen die Entfernungen o_1k_1, o_2k_2, aus diesen die Winkel k_1So_1, k_2So_2 und damit den Winkel o_1So_2.

Beispiel: Auf den Platten (21) und (22), aufgenommen vom Standpunkte L_0 (Tafel III), ergaben sich die Entfernungen von drei identischen Punkten (zweier Häuser).

Auf Platte (21): Punkt 1: $+91{\cdot}0\,mm$; Punkt 2: $+93{\cdot}2\,mm$; Punkt 3: $+81{\cdot}2\,mm$
„ „ (22): „ 1: $-68{\cdot}0\,mm$; „ 2: $-66{\cdot}2\,mm$; „ 3: $-78{\cdot}0\,mm$.

Mit der Brennweite 32 *cm* (vgl. Nr. 65) folgten hieraus die Winkel von der Plattenmitte:

Platte (21): Punkt 1: $+15°\,52{\cdot}5'$; Punkt 2: $+16°\,14{\cdot}3'$; Punkt 3: $+14°\,14{\cdot}3'$
„ (22): „ 1: $-11°\,59{\cdot}8'$; „ 2: $-11°\,41{\cdot}3'$; „ 3: $-13°\,41{\cdot}9'$

und damit die Winkel zwischen den Richtungen nach den Plattenmitten:

aus Punkt 1: $27°\,52{\cdot}3'$; aus Punkt 2: $27°\,55{\cdot}6'$; aus Punkt 3: $27°\,56{\cdot}2'$,

im Mittel $27°\,54{\cdot}7'$, womit die Winkel zwischen beliebigen Objekten erhalten werden können. Befindet sich auf der Platte das Bild f eines Fixpunktes F, so wird man die Winkel von diesem aus erhalten können. Ist ferner die Lage zweier Standpunkte S, S_1 gegenüber dem Fixpunkte F bereits bestimmt, so können dieselben ihrer gegenseitigen Lage nach auf ein Zeichenblatt aufgetragen werden, so daß man eine Darstellung der bekannten Objekte ss_1f erhält. Die in s und s_1 (Fig. 232) von den Richtungen sf und s_1f_1 aus gezählten Winkel können direkt eingetragen werden, wodurch man für jedes Objekt o zwei Richtungen sx, s_1y erhält, deren Schnitt den Bildpunkt o ergibt; man hat daher jedes Objekt nach der Standlinienmethode bestimmt.

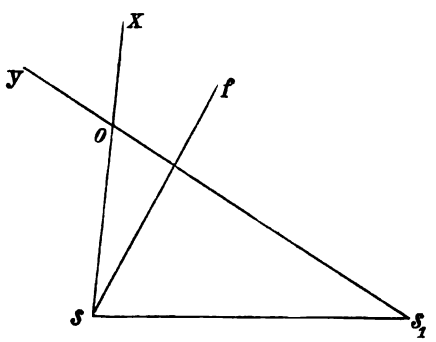


Fig. 232.

Ganz anders verhält es sich aber, wenn ein Dreieck ss_1f nicht erhalten werden kann, entweder weil ein Fixpunkt f nicht zur Verfügung steht oder nicht sichtbar ist, oder aber weil die Lage der Standpunkte S, S_1 gegen diesen nicht bekannt ist. Der letztere Fall liegt übrigens bei jeder beliebigen Aufnahme vor, wobei irgendein Punkt der Gegend (ein Kirchturm) als Fixpunkt angenommen werden kann, aber die Lage der Standpunkte gegen diesen nicht bekannt ist. In diesem Falle wird man die Standpunkte S, S_1 so wählen, daß jeder von dem andern aus gesehen und aufgenommen werden kann. Man erhält daher auf der Aufnahme in S ein Bild σ_1 (Fig. 231) von dem Standpunkt S_1 und der Winkel σ_1Sf bestimmt

die Lage des Fixpunktes gegen die Richtung $S\sigma_1$ und kann in den Plan eingetragen werden. Anderseits wird man das Bild σ des Standpunktes S, welches auf den Platten der Aufnahme in S_1 auftritt, ebenso verwenden können, um den Winkel $\sigma S_1 f$ zu bestimmen und diesen auf dem Tischblatt nach $ss_1 f$ auftragen, wodurch sich der Punkt f bestimmt. Man nennt σ, σ_1 die Kernpunkte der Photogramme. Dabei bleibt noch der Maßstab der Aufnahme unbestimmt; er wird aber bekannt, sobald man entweder die Entfernung SS_1 oder aber die Entfernung irgend zweier anderer Punkte $O_1 O_2$ kennt.

Sind die Kernpunkte nicht zu erhalten, was immer dann auftritt, wenn die Standpunkte nicht zu fixieren sind (Standpunkte im freien Felde) oder wenn man kein Rundbild aufnahm, so wird man die folgenden Fälle zu unterscheiden haben:

1. Es sind drei Punkte der Aufnahme ihrer gegenseitigen Lage nach völlig bekannt; dann kann der Standpunkt nach der Methode des Rückwärtseinschneidens aus den Winkeln gegen die drei bekannten Punkte bestimmt werden;

2. hat man drei Aufnahmen an drei verschiedenen Standpunkten gemacht und finden sich auf den Photogrammen drei identische Punkte, so kann man die gegenseitige Lage der sechs Punkte nach der Methode des Flying survey (Nr. 86) ermitteln, wenn in allen drei Aufnahmspunkten die Richtung der Camera orientiert wurde, d. h. durch eine Bussole die Richtung der mittleren Visur (Verbindungslinie des Objektivmittelpunktes mit der Plattenmitte) bestimmt wurde. Da diese aber weitaus ungenauer (höchstens auf halbe Grade) als die Winkel aus den Photogrammen ermittelt werden kann, so kann dabei die Genauigkeit der Photogramme nicht ausgenutzt werden. Man kann dann

3. ohne Peilungen die gegenseitige Lage von acht Punkten bestimmen, wenn sich fünf verschiedene Objekte O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 auf allen drei Aufnahmen von den drei verschiedenen Standpunkten S_1, S_2, S_3 wiederfinden. Diese Methode wird von besonderer Wichtigkeit, weil es dadurch dem Forschungsreisenden möglich ist, aus drei an vorübergehenden, nicht weiter fixierten Punkten gemachten Aufnahmen, wenn sich nur fünf identische Punkte auf allen drei Aufnahmen ergeben, den ganzen Plan der Gegend mit viel größerer Genauigkeit aufzunehmen, als dieses durch bloße Skizzierung möglich ist. Da eine graphische Lösung der Aufgabe auf Schwierigkeiten stößt, so muß hier die analytische Lösung vorgezogen werden, welche in Nr. 120 gegeben ist.

D. Vermessungen.

94. *a*) Längenmessungen. Über die Längenmessung mit Kette Meßband und Meßstäben wurde bereits gesprochen. Näher zu erörtern ist noch die Distanzmessung mit den Distanzmessern, welche in der Tachymetrie verwendet wird.

α) Die Distanz ist horizontal, die Latte vertikal, d. h. normal zur mittleren Visur. Es gilt die Gleichung S. 88

$$\Delta = kg + k_1,$$

wenn g der veränderliche Lattenabschnitt ist, der zwischen die Fäden des Distanzmessers fällt.

β) Die Distanz ist schief; die mittlere Visur normal zum Lattenabschnitte; dann ist die schiefe Distanz durch dieselbe Formel gegeben, also

$$D = kg + k_1,$$

demnach die Horizontaldistanz (Fig. 233)

$$\Delta = D \cos\alpha + mn = (kg + k_1)\cos\alpha + \frac{g}{2}\sin\alpha,$$

wenn α die Neigung der mittleren Visur ist.

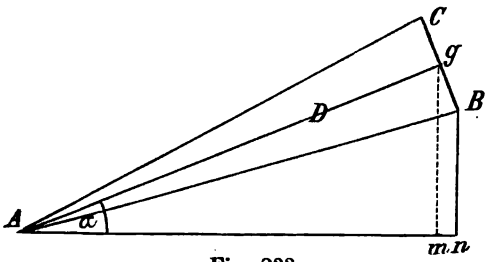


Fig. 233.

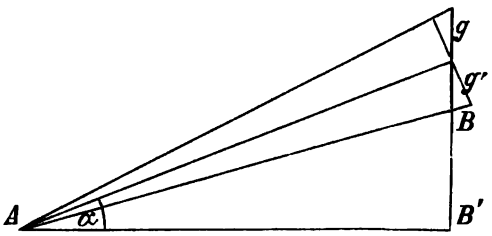


Fig. 234.

γ) Die Distanz ist schief, die Latte vertikal. Projiziert man den Lattenabschnitt g (Fig. 234) normal zur mittleren Visur, so wird $g' = g\cos\alpha$; dieser Lattenabschnitt ist es, der hier in der Formel zu verwenden ist; daher wird

$$D = kg\cos\alpha + k_1$$

und

$$\Delta = kg\cos\alpha^2 + k_1\cos\alpha.$$

Für anallatische Distanzmesser ist $k_1 = 0$; α wird an dem Gradbogen abgelesen.

Eine besondere Methode der Distanzmessung gestatten die Instrumente mit Tangentenschraube. Da diese gleichzeitig zum Nivellieren verwendet werden, so sollen beide Anwendungen (Nivellieren und Distanzmessen) gemeinschaftlich behandelt werden (vgl. Nr. 110).

95. *b*) **Winkelmessungen.** Von den Aufnahmen mit der Bussole wurde schon früher gesprochen und ist hier nichts weiter darüber zu ergänzen. Die Aufnahmen sind bezüglich ihrer Genauigkeit nicht so bedeutend, daß diese Methode weitere Anwendungen zuläßt. Reduktionen, welche dazu dienen, Instrumentalfehler zu eliminieren, wie dieselben bei genaueren im folgenden zu besprechenden Beobachtungen nötig werden, sind bei Bussoleninstrumenten meist unnötig, weil die Korrektionen weit unterhalb denjenigen Grenzen liegen, welche bei Bussolenaufnahmen noch in Betracht kommen. Sollten sie ausnahmsweise nötig werden, z. B. wegen sehr stark exzentrischer Aufstellung oder besonders großer Exzentrizität des Teilkreises, so wird man leicht aus dem folgenden das Nötige entnehmen.

Die Aufnahmen mit Theodolit und Universalinstrument sind an sich sowohl für Horizontalwinkel als für Vertikalwinkel bereits in Nr. 48 bis 51

erörtert. Allein bei diesen Aufnahmen werden die Genauigkeitsgrenzen auf Bruchteile der Bogenminute, ja selbst der Sekunde erreicht und durch kleine Fehler der Instrumente können die Werte der gesuchten Winkel etwas unrichtig erhalten werden. Es handelt sich also darum: 1. wenn die Instrumentalfehler bekannt sind, ihren Einfluß auf die beobachteten Winkel zu berechnen; 2. die Instrumentalfehler aus den Beobachtungen selbst zu bestimmen oder 3. wenn möglich, den Einfluß dieser Fehler durch zweckmäßige Anordnung der Beobachtungen wegzuschaffen.

96. Die Teilungsfehler der Kreise. Zum Herstellen der Kreisteilungen bedient man sich jetzt großer Teilmaschinen, für welche die Originalteilungen bis zu 1 *m* Durchmesser und mehr haben. Der zu teilende Kreis wird konzentrisch zur Originalteilung festgeklemmt, beide Kreise gemeinschaftlich um einen bestimmten Winkel, z. B. $\frac{1}{12}°$ gedreht und nach jeder Drehung mit dem an derselben nicht teilnehmenden Grabstichel ein feiner Strich in radialer Richtung eingeritzt. Die Größe der Drehung wird mittels genügend vergrößernder Mikroskope an dem Originalkreise genau eingehalten; nichtsdestoweniger kommen „Teilungsfehler" vor, welche zur Erreichung der größten Genauigkeit nicht übergangen werden dürfen.

Die Teilungsfehler sind zweierlei Art. 1. Gewisse Fehler entstehen dadurch, daß die Striche bald etwas zu weit weg, bald etwas zu nahe dem vorhergehenden gezogen werden, sogenannte zufällige Teilungsfehler. Ihre Ursache liegt in der Unvollkommenheit der Sinne, die Größe der Drehung absolut genau zu treffen und den Grabstichel absolut genau zu führen; 2. eine zweite Gruppe entsteht aber durch den Einfluß der Temperatur, der einseitigen Erwärmung der Kreise, so daß die Intervalle, z. B. eine Zeit lang immer größer und größer werden, dann wieder abnehmen, sogenannte periodische Teilungsfehler.

Der Einfluß der Teilungsfehler der ersten Art, der zufälligen Teilungsfehler, wird aber um so geringer, je mehr Ablesungen an verschiedenen Stellen des Kreises vorgenommen werden. Wurde nämlich ein Winkel durch Ablesungen an zwei Teilstrichen des Kreises erhalten und wäre es möglich, den Kreis dann zu verstellen und damit denselben Winkel zwischen zwei ganz anderen Teilstrichen zu erhalten, so werden natürlich jetzt andere Lesungen erhalten und daraus ein etwas anderer Wert des Winkels; der Unterschied wird davon herrühren, daß eben die „Fehler der Teilstriche" andere sind, z. B. die früher verwendeten zwei Teilstriche zu nahe, die bei der zweiten Messung verwendeten zu weit voneinander. Es könnten aber auch noch im zweiten Falle die Teilstriche zu nahe sein, so daß auch aus zwei Beobachtungen der Fehler nicht völlig eliminiert wird; wenn man aber an vier oder fünf verschiedenen Stellen abliest, so wird wohl kaum der Fall eintreten, daß überall der Fehler im selben Sinne erscheint; denn es ist eben eine charakteristische Eigenschaft dieser zufälligen Fehler, daß sie ganz unregelmäßig sind, bald zu große, bald zu kleine Werte geben und im Mittel würde man schließlich doch, jedenfalls mit großer Wahrscheinlichkeit, das richtige Resultat erhalten.

Deshalb sind tatsächlich die Kreise nicht festgeschraubt, sondern mit

starker Reibung verschiebbar. Hat man z. B. eine Beobachtung bei einer gewissen Kreisstellung gemacht (es bezieht sich dies nicht auf die Kreisverstellung bei Repetitionstheodoliten, sondern bei einfachen Theodoliten) und die Lesungen für einen Horizontalwinkel erhalten, so wird der Kreis verstellt, z. B. um 60° (dieses braucht durchaus nicht genau zu sein, sondern nur genähert), dann wieder um 60° usw.

Beispiel: Die aufeinanderfolgenden Beobachtungen wären:

Objekt *A* (links) Mikroskop I		II		Objekt *B* (rechts) Mikroskop I		II	
157°	34′	16″	12″	242°	15′	47″	35″
214	25	37	27	299	7	4	1
278	17	65	56	2	59	26	32
337	5	19	21	61	46	46	57
35	57	8	18	120	38	37	42
98	22	15	22	183	3	51	44.

Hieraus ergibt sich als Mittel der Lesungen für

Objekt *A*			Objekt *B*			Winkel *AOB*		
157°	34′	14·0″	242°	15′	41·0″	84°	41′	27·0″
214	25	32·0	299	7	2·5		41	30·5
278	18	0·5	2	59	29·0		41	28·5
337	5	20·0	61	46	51·5		41	31·5
35	57	13·0	120	38	39·5		41	26·5
98	22	18·5	183	3	47·5		41	29·0
						Mittel 84°	41′	28·8″.

Die hier erscheinenden Abweichungen sind aber durchaus nicht bloß den Teilungsfehlern zuzuschreiben, die wesentlich kleiner sind, sondern auch den Einstell- und Ablesefehlern, die ebenso unregelmäßig verlaufen. Im Grunde genommen, wäre es für den bisher erwähnten Zweck gleichgültig, wie der Kreis verstellt würde. Die Theorie ergibt aber,* daß bei nahe gleicher Verstellung des Kreises in der oben angegebenen Art auch die periodischen Teilungsfehler eliminiert werden.

Da der Kreis mit starker Reibung aufsitzt, so erfordert es einer gewissen Kraftanstrengung, den Kreis gegen die Achse zu verstellen; man hält dabei die Achse fest (durch Klemmung) und dreht vorsichtig, indem man am besten an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen anfaßt, den Kreis um den gewünschten Betrag (meist 45° oder 60° oder 90°). Da es sich nicht um eine genaue Drehung handelt, so wird man leicht, die Größe der Drehung während der Operation selbst am Index verfolgend, in der richtigen Stellung anhalten. Reißen, Ziehen nach aufwärts oder Druck nach abwärts sind sorgfältig zu vermeiden.

* Vgl. z. B. Herr, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, S. 243, Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, 4. Aufl., S. 441. Ferner Bessel, „Erste Leistung eines auf der Königsberger Sternwarte befindlichen Meridiankreises," Astron. Nachrichten, Bd. XXI, S. 1 ff., sowie einige Abhandlungen von Peters, Nyrén, Struve u. a. in den Astron. Nachrichten.

97. Die Exzentrizität des Kreises. Wird der zu teilende Kreis nicht genau zentrisch auf das Zentrum der Originalteilung der Teilmaschine gebracht, so werden natürlich an der einen Seite die Teilstriche näher zusammenrücken, an der entgegengesetzten Seite etwas auseinanderrücken. Auch dies wäre eine Art periodischer Teilungsfehler. Allein, da die Exzentrizität sehr klein sein wird, so kann man stets als Mittelpunkt des Kreises den Mittelpunkt der Kreisteilung ansehen. Dann wird aber die Azimutalachse des Instrumentes nicht mit diesem Kreiszentrum zusammenfallen; auch dann, wenn zufällig Kreiszentrum und Teilungszentrum zusammenfallen würden, könnte die vertikale Umdrehungsachse des Instrumentes seitlich stehen. Man nennt den Unterschied in der Lage der Azimutalachse des Instrumentes gegenüber dem Kreisteilungsmittelpunkte die **Exzentrizität** oder den **Exzentrizitätsfehler** des Kreises.

Sei C (Fig. 235) der Mittelpunkt der Kreisteilung, O der Ort, in welchem die Azimutalachse, d. i. die vertikale Umdrehungsachse des Instrumentes die Teilungsebene trifft (Mittelpunkt der Drehung) und A, A' die Punkte, in welchen die Linie OC den Kreisumfang trifft; liegt der Nullpunkt der Teilung bei o, so wird bei A eine gewisse Lesung l_0 stehen, die aber, da man C nicht sieht und daher die Richtung OC nicht kennt, vorerst unbekannt bleibt. Bei einer Drehung der Visur um den Winkel w würde ein in der Richtung OC gedachter Arm nach OB kommen und man würde eine Lesung l machen, die aber dem Zentriwinkel $ACB = \alpha$ entspricht. Aus dem Zentriwinkel $\alpha = l - l_0$ ist die wahre Größe des Winkels w abzuleiten. Der Unterschied hängt natürlich von der Größe der Exzentrizität $OC = \varepsilon$ ab und man hat, wenn $BP \perp OA$ errichtet wird und r den Halbmesser des Kreises, x die unbekannte, veränderliche Entfernung OB bedeutet:

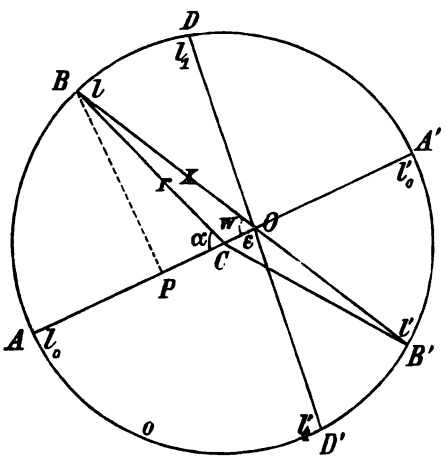


Fig. 235.

$$BP = x \sin w = \quad = r \sin \alpha$$
$$OP = x \cos w = OC + CP = \varepsilon + r \cos \alpha$$

Da die Kenntnis von x nicht gefordert wird, so kann man diesen Wert durch Division der beiden Gleichungen eliminieren und findet

$$\operatorname{tang} w = \frac{r \sin \alpha}{\varepsilon + r \cos \alpha}.$$

ε ist immer sehr klein, folglich wird auch w von α nicht sehr verschieden sein und es ist besser den Unterschied von w und α zu suchen. Multipliziert man die Gleichungen für $x \sin w$, $x \cos w$ einmal mit $-\cos \alpha$, $+\sin \alpha$ und addiert, dann mit $+\sin \alpha$, $+\cos \alpha$ und addiert wieder, so erhält man

$$x \sin (\alpha - w) = \varepsilon \sin \alpha$$
$$x \cos (\alpha - w) = r + \varepsilon \cos \alpha,$$

welche Gleichungen auch direkt erhalten werden können, wenn man von O das Perpendikel auf CB fällt, da Winkel $OBC = \alpha - w$ ist.

Hieraus folgt

$$\operatorname{tang}(\alpha - w) = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{r + \varepsilon \cos \alpha}$$

oder, wenn man die kleine numerische Größe

$$\frac{\varepsilon}{r} = \eta \text{ und } \alpha - w = y$$

setzt:

$$\operatorname{tang} y = \frac{\eta \sin \alpha}{1 + \eta \cos \alpha}.$$

Hier wie im folgenden werden derartige kleine Unterschiede immer durch Reihenentwicklungen bestimmt. Man erhält:*

$$w - \alpha = -\frac{\varepsilon}{r} \sin \alpha + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2 \sin 2\alpha - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^3 \sin 3\alpha + \ldots .$$

---

* Führt man für die sinus und cosinus ihre Ausdrücke durch die imaginäre Exponentialgröße ein ($i = \sqrt{-1}$, e die Basis der natürlichen Logarithmen), d. i.

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{+i\alpha} + e^{-i\alpha}); \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{+i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

so wird

$$\operatorname{tang} y = \frac{1}{i}\,\frac{e^{+iy} - e^{-iy}}{e^{+iy} + e^{-iy}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\eta(e^{+i\alpha} - e^{-i\alpha})}{2 + \eta(e^{+i\alpha} + e^{-i\alpha})}$$

Läßt man beiderseits i im Nenner weg, denkt beide Brüche als Verhältnisse, daher die Gleichung als eine Proportion, so folgt nach dem Satze, daß sich die Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zu ihrer Summe verhält wie die Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses zu deren Summe:

$$\frac{2e^{-iy}}{2e^{+iy}} = \frac{2 + 2\eta e^{-i\alpha}}{2 + 2\eta e^{+i\alpha}}$$

oder

$$e^{-2iy} = \frac{1 + \eta e^{-i\alpha}}{1 + \eta e^{+i\alpha}}.$$

Geht man jetzt auf die natürlichen Logarithmen über, so folgt

$$-2iy = \log_n(1 + \eta e^{-i\alpha}) - \log_n(1 + \eta e^{+i\alpha}).$$

Es ist aber

$$\log_n(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

demnach

$$-2iy = [\eta e^{-i\alpha} - \tfrac{1}{2}\eta^2 e^{-2i\alpha} + \tfrac{1}{3}\eta^3 e^{-3i\alpha} - \ldots]$$
$$-[\eta e^{+i\alpha} - \tfrac{1}{2}\eta^2 e^{+2i\alpha} + \tfrac{1}{3}\eta^3 e^{+3i\alpha} - \ldots]$$
$$2iy = \eta(e^{+i\alpha} - e^{-i\alpha}) - \tfrac{1}{2}\eta^2(e^{+2i\alpha} - e^{-2i\alpha}) + \tfrac{1}{3}\eta^3(e^{+3i\alpha} - e^{-3i\alpha}) \ldots .$$

Dividiert man durch $2i$ und benutzt wieder die Beziehung für $\sin \alpha$, so wird

$$y = \eta \sin \alpha - \tfrac{1}{2}\eta^2 \sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}\eta^3 \sin 3\alpha - \ldots .$$

Ist r mehrere Zentimeter (z. B. 16 *cm*), ε nur Bruchteile eines Millimeter (z. B. 1 *mm*, was schon eine sehr bedeutende Exzentrizität bedeutet die bei guten Instrumenten nie vorkommt), so wäre

$$\frac{\varepsilon}{r} = \frac{1}{160} = 0{\cdot}00625, \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2 = 0{\cdot}0000195,$$

daher der Maximalwert des ersten Gliedes (der Winkel, dessen Bogen 0·00625 ist, vgl. die Tafel der Bögen im Anhange, Tabelle I) 21·5′, des zweiten Gliedes 4″. Für $\varepsilon = 0{\cdot}1$ *mm* würde der Maximalwert des ersten Gliedes 2·1′, derjenige des zweiten Gliedes nur 0·04″ sein. Beschränkt man sich daher auf das erste Glied, so wird

$$w - \alpha = -\frac{\varepsilon}{r}\sin\alpha.$$

Man erhält daher aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} y = \frac{\eta \sin\alpha}{1 + \eta\cos\alpha}$$

die Reihenentwicklung

$$y = \eta\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\eta^2\sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}\eta^3\sin 3\alpha - \ldots.$$

Setzt man hier $180^\circ - \alpha$ für α, so ergibt sich sofort für die Gleichung

$$\operatorname{tang} y = \frac{\eta \sin\alpha}{1 - \eta\cos\alpha}$$

die Reihenentwicklung

$$y = \eta\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\eta^2\sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}\eta^3\sin 3\alpha + \ldots.$$

Eine im späteren häufig wiederkehrende Reihe läßt sich einfach aus dieser ableiten. Ist nämlich

$$\operatorname{tang} x = \nu \operatorname{tang} y$$

und ν nahe gleich 1, so wird x von y nur wenig verschieden sein und man könnte $x - y$ suchen. Man erhält aber aus der letzten Gleichung

$$\operatorname{tang}(x-y) = \frac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y}{1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y} = \frac{(\nu-1)\operatorname{tang} y}{1 + \nu \operatorname{tang} y^2} = \frac{(\nu-1)\sin y\cos y}{\cos y^2 + \nu \sin y^2} =$$

$$= \frac{(\nu-1)\sin 2y}{1 + \cos 2y + \nu(1-\cos 2y)} = \frac{(\nu-1)\sin 2y}{(\nu+1) - (\nu-1)\cos 2y} = \frac{\frac{\nu-1}{\nu+1}\sin 2y}{1 - \frac{\nu-1}{\nu+1}\cos 2y}$$

und diese Gleichung entsteht aus der eben behandelten, wenn η durch $\frac{\nu-1}{\nu+1}$, α durch $2y$ und y durch $x - y$ ersetzt wird. Man erhält daher für

$$\operatorname{tang} x = \nu \operatorname{tang} y$$

die Reihenentwicklung

$$x - y = \frac{\nu-1}{\nu+1}\sin 2y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\nu-1}{\nu+1}\right)^2 \sin 4y + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu-1}{\nu+1}\right)^3 \sin 6y + \ldots.$$

Sämtliche hier erhaltene Reihen sind konvergent, d. h. die aufeinanderfolgenden Glieder werden immer kleiner und die Summe der unendlichen Reihe ist eine endliche Größe, wenn η beziehungsweise $\frac{\nu-1}{\nu+1}$ kleiner als 1 ist und man wird zur Berechnung nur wenige Glieder benötigen, wenn diese Werte sehr klein sind.

Da nun $\alpha = l - l_0$ ist, so kann man schreiben

$$w = (l - l_0) - \frac{\varepsilon}{r} \sin (l - l_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Bringt man in der Verlängerung des Armes OA einen zweiten Arm OA' an, so wird bei der Drehung um den Winkel α der Doppelarm AA' nach BB' kommen und es wird der Winkel $AOB' = w'$ (in derselben Richtung $ABDA'B'$ gezählt) in ähnlicher Weise bestimmt. Nun ist es aber nicht möglich, zwei Nonien oder Mikroskope genau in 180° Distanz (in genau entgegengesetzter Richtung) anzubringen; schließen daher die beiden Arme einen Winkel $180° + z$ ein, so ist $w' = 180° + z + w$ und $ACB' = \alpha' = 180° + l' - l_0$, wenn l' die mit l nahe identische (daher um 180° von der wahren verschiedene) Lesung ist* und es ist wie oben:

$$180° + z + w = 180° + l' - l_0 - \frac{\varepsilon}{r} \sin (180° + l' - l_0),$$

demnach

$$w = -z + (l' - l_0) + \frac{\varepsilon}{r} \sin (l' - l_0),$$

$l' - l_0$ kann nun nicht gleich sein $l - l_0$, aber die beiden Werte werden wegen der Kleinheit von $\frac{\varepsilon}{r}$ nur äußerst wenig verschieden sein und man kann auch genügend genau setzen

$$w = -z + (l' - l_0) + \frac{\varepsilon}{r} \sin (l - l_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Im arithmetischem Mittel aus den beiden Werten von w, die sich aus den beiden Lesungen l' und l ergeben, fällt daher ε heraus, denn es ist

$$w = -\tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} (l + l') - l_0.$$

Hier sind noch l_0 und z unbekannt. Bei einer weiteren Drehung des Doppelarmes AA' nach DD' wird sich ein anderer Winkel $AOD = w_1$ ergeben und dieser folgt aus den gemachten Lesungen l_1, l_1' gleich

$$w_1 = -\tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} (l_1 + l_1') - l_0,$$

daher der Winkel

$$BOD = A = w_1 - w = \tfrac{1}{2} (l_1 + l_1') - \tfrac{1}{2} (l + l').$$

Bringt man zwei diametral gegenüberstehende Nonien oder Mikroskope an, so fällt bei Benutzung des Mittels aus den beiden Lesungen in jeder Stellung des Mikroskopträgers der Einfluß der Exzentrizität des Kreises heraus.

In dem Beispiel Seite 227 waren stets beide Mikroskope gelesen; vergleicht man die Differenzen der beiden Mikroskoplesungen für verschiedene Stellungen der Visur, so ergibt sich ein ziemlich regelmäßiger Gang. Es sind die Differenzen

---

* Im Beispiel Seite 227 ist z. B. $l = 157° 34' 16''$; $l' = 157° 34' 12''$, die wirkliche Lesung ist jedoch $180° + l = 337° 34' 12''$.

	Mikr. I — Mikr. II			Mikr. I — Mikr. II
bei Kreislesung	3°	+ 6″	bei Kreislesung 183°	— 7″
	36°	+ 10	214°	— 10
	62°	+ 11	242°	— 12
	98°	+ 7	278°	— 9
	121°	+ 5	299°	— 3
	158°	— 4	337°	+ 2

Die Ursache dieser Erscheinung ist die Exzentrizität des Kreises und man kann auch aus den Abweichungen die Richtung finden, in welcher dieselbe Null und in welcher sie ein Maximum wird; die erstere ist etwa 140°—320°, die letztere nahe senkrecht dazu 60°—240°. Ist der Betrag der größten Abweichung ω (hier etwa 12″), so ist

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} r\,\omega.$$

Die Hälfte der Maximalabweichung von 12″ gibt den Betrag von $\frac{\varepsilon}{r}$; dieser entspricht daher dem Bogen von 6″, d. i. 0·000029, daher für einen Kreis von 8 *cm* Halbmesser $\varepsilon = 80 \times 0{\cdot}000029\ mm = 0{\cdot}0023\ mm$.*

98. Berücksichtigung der Aufstellungsfehler des Instrumentes. Es war bereits in Nr. 48 erwähnt worden, daß die Azimutalachse

---

* Genauer folgt der Wert durch Subtraktion der beiden Gleichungen (1) und (2) für w; es ergibt sich

$$0 = -z + l' - l + 2\frac{\varepsilon}{r}\sin(l - l_0).$$

$l' - l$ sind die oben angeschriebenen Differenzen der Mikroskoplesungen; l_0 ist unbekannt, ebenso wie ε; zur Bestimmung von beiden kann man schreiben

$$\frac{\varepsilon}{r}\sin(l - l_0) = \frac{\varepsilon}{r}\sin l\cos l_0 - \frac{\varepsilon}{r}\cos l\sin l_0,$$

daher wenn man

$$\frac{\varepsilon}{r}\sin l_0 = x$$

$$\frac{\varepsilon}{r}\cos l_0 = -y$$

setzt

$$z + 2x\cos l + 2y\sin l = l' - l.$$

Setzt man hier $l = 3°$, $l' - l = +6''$; $l = 36°$, $l' - l = +10''$ usw., so erhält man so viele Gleichungen, als Kreislesungen gemacht wurden (im vorliegenden Falle 12), mit den drei Unbekannten x, y, z. Diese werden nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst. Die allgemeine Auflösung dieser Gleichungen, wenn deren Zahl a ist, gibt die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} a\,z + 2x\,\Sigma\cos l + 2y\,\Sigma\sin l &= \Sigma(l' - l) \\ z\,\Sigma\cos l + 2x\,\Sigma\cos l^2 + 2y\,\Sigma\sin l\cos l &= \Sigma(l' - l)\cos l \\ z\,\Sigma\sin l + 2x\,\Sigma\sin l\cos l + 2y\,\Sigma\sin l^2 &= \Sigma(l' - l)\sin l. \end{aligned}$$

Diese können aber einfach aufgelöst werden, wenn man die Peripherie in gleiche Teile teilt und l die fortlaufenden Einstellungen z. B. 0°, 30°, 60° . . . sind; dann ist nämlich

$$\Sigma\sin l = 0,\quad \Sigma\cos l = 0,\quad \Sigma\sin l\cos l = 0,\quad \Sigma\sin l^2 = \Sigma\cos l^2 = \frac{a}{2}$$

genau vertikal, die Höhenachse genau horizontal zu stellen ist und daß die Visierlinie des Fernrohres senkrecht zur Höhenachse sein sollte. Bei der größten Sorgfalt wird dies indes nie ganz zu erreichen sein. Würden alle Objekte im Horizonte liegen und die Neigung der Höhenachse einen kleinen konstanten Winkel betragen, so würden Azimutalachse, Höhenachse und Visierlinie ein festes System bilden, gemeinschaftlich gedreht werden und die Drehung der Visierlinie würde immer gleich der am Horizontalkreise abgelesenen Drehung. Die Aufstellungsfehler werden aber einen um so größeren Einfluß haben, je größer die Höhen- oder Tiefenwinkel der Objekte sind.* Da bei Azimutbestimmungen, die in Nr. 132 behandelt werden, diese Berücksichtigung von großer Wichtigkeit ist, so müssen die Formeln hierfür abgeleitet werden.

(vgl. z. B. Herr, Lehrbuch der höheren Mathematik, 2. Aufl., I. Bd., S. 78) und man erhält:

$$\varepsilon = \frac{\Sigma(l'-l)}{a}; \qquad x = \frac{\Sigma(l'-l)\cos l}{a} \operatorname{arc} 1''; \qquad y = \frac{\Sigma(l'-l)\sin l}{a} \operatorname{arc} 1''.$$

In dem vorliegenden Falle sind nun allerdings die Lesungen nicht bei 0°, 30° ... erfolgt, sondern nur in deren Nähe; da aber die $(l'-l)$ klein sind, so kann man noch diese Formeln verwenden. Der Faktor arc 1″ rührt daher, daß die $(l'-l)$ in Bogensekunden gegeben sind, x, y aber in Bogenmaß ausgedrückt werden müssen; statt $(l'-l)$ ist daher überall $(l'-l)\operatorname{arc} 1''$ zu setzen, welche Multiplikation am Schlusse ausgeführt werden kann. Sind die Werte von x, y, z bekannt, so erhält man l_0, ε aus

$$\operatorname{tang} l_0 = -\frac{x}{y}; \qquad \eta = \frac{\varepsilon}{r} = \sqrt{x^2+y^2}$$

oder direkt aus den Gleichungen

$$\eta \sin l_0 = x$$
$$\eta \cos l_0 = -y.$$

Für den vorliegenden Fall ist (die zu benützenden Zahlenwerte der sin und cos sind insgesamt 0, 0·500, 0·866, 1)

$$\Sigma l' - l = -4{\cdot}0''; \quad \Sigma(l'-l)\sin l = +49{\cdot}84''; \quad \Sigma(l'-l)\cos l = +43{\cdot}01''$$

und da $a = 12$, arc 1″ = 0·000004848 ist:

$$\begin{aligned} \log \eta \sin l_0 = \log x &= 5{\cdot}2400 \\ \text{sin oder cos} \qquad\quad &\quad 9{\cdot}8791 \\ \log \eta \cos l_0 = \log(-y) &= 5{\cdot}3040_n \\ \log \operatorname{tang} l_0 &= 9{\cdot}9360_n \\ l_0 &= 139°\,12' \\ \log \eta &= 5{\cdot}4249 \\ \log r &= 1{\cdot}9031 \\ \log \varepsilon &= 7{\cdot}3280 \\ \varepsilon &= 0{\cdot}00213\ mm. \end{aligned}$$

Hieraus ersieht man, mit welcher Präzision die Instrumente gearbeitet sein müssen, da so außerordentlich geringe Exzentrizitäten bereits beträchtliche Differenzen in den Lesungen geben.

* Die Neigung der Ebene des Horizontalkreises gegen den Horizont wäre ebenfalls zu untersuchen; da jedoch die Horizontalstellung stets bis auf wenige Sekunden erreicht werden kann, so ist, wie die Untersuchung zeigt, der Einfluß verschwindend. (Vgl. z. B. des Verfassers Artikel „Universalinstrument“ in Valentiner „Handwörterbuch der Astronomie“, Enzyklopädie Trewendt.)

Sei HH' (Fig. 236) eine Horizontalebene, Z das Zenit, CA die wirkliche Lage der Höhenachse, CA' die horizontale Lage, die sie haben sollte, CO die Richtung der Visierlinie des Fernrohres gegen ein Objekt O, so aber daß dieselbe nicht senkrecht steht auf CA, und der Winkel $ACO = 90° + c$, also c sehr klein. Desgleichen ist der Winkel ACA', die Neigung der Höhenachse i, ein sehr kleiner Winkel; beide so weit berichtigt, daß sie unter 10 bis 15″ bleiben. Die Mikroskope können irgendwo, das eine z. B. bei L, angebracht sein und es wird in dieser Stellung die Lesung L_1 gemacht, wobei der Abstand $LA' = \lambda$ sei. Dreht man das Instrument, um auf einen andern Punkt zu visieren, so drehen sich die Punkte A', O' mit dem Kreise (oder mit den Mikroskopen) zusammen und die Drehung wird bei L abgelesen, sie sei L_2; aber der abgelesene Bogen $O'O'_1$ wird verschieden sein von OO_1, wenn das zweite Objekt nicht in derselben Höhe liegt.

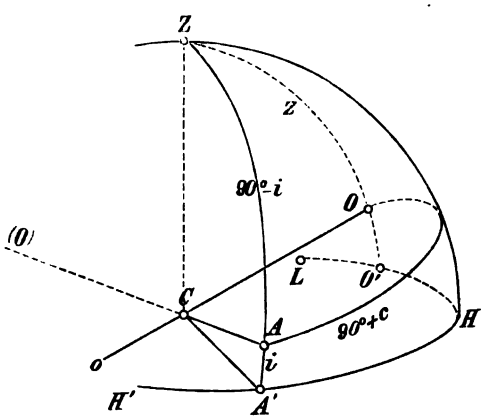


Fig. 236.

In dem sphärischen Dreieck ZOA ist nun $ZO = z$ die Zenitdistanz des Objektes, $ZA = 90° - i$ die Zenitdistanz des Achsenendes und $OA = 90° + c$; der Winkel OZA ist gleich dem Bogen $O'A'$, aber sehr nahe 90° (wenn O nicht zu nahe dem Zenit liegt) und man kann $O'A' = 90° + x$ setzen. Dann wird:

$$\cos(90° + c) = \cos z \cos(90° - i) + \sin z \sin(90° - i) \cos(90° + x)$$

oder

$$-\sin c = \cos z \sin i - \sin z \cos i \sin x.$$

Da nun c, i und x sehr klein sind, so kann man statt der sinus die Bögen setzen und erhält dann

$$-c = i \cos z - x \sin z$$

oder indem x ausgedrückt wird

$$x = i \cot z + c \operatorname{cosec} z.$$

Dann ist der Winkel

$$LO' = LA' - A'O' = \lambda - (90° + x) = \lambda - 90° - i_1 \cot z_1 - c \operatorname{cosec} z_1,$$

wenn die Achsenneigung in dieser Stellung i_1 die Zenitdistanz des Objektes z_1 ist. Nach dem Drehen auf ein anderes Objekt wird der Abstand LA' sich ändern, und zwar um $L_2 - L_1$, die Differenz der Lesungen, wenn L_2 die neue Lesung ist. Auch Neigung und Zenitdistanz können sich geändert haben, sie seien i_2, z_2; es wird daher

$$LO_1' = \lambda + (L_2 - L_1) - 90° - i_2 \cot z_2 - c \operatorname{cosec} z_2,$$

demnach der Horizontalwinkel zwischen den beiden Objekten

$$O'O_1' = LO_1' - LO' = L_2 - L_1 - (i_2 \cot z_2 + c \operatorname{cosec} z_2) + (i_1 \cot z_1 + c \operatorname{cosec} z_1)$$
$$= (L_2 - i_2 \cot z_2 - c \operatorname{cosec} z_2) - (L_1 - i_1 \cot z_1 - c \operatorname{cosec} z_1).$$

Hieraus folgt, daß man jede Lesung L um den Wert $-i\cot z - c\,\mathrm{cosec}\,z$ zu korrigieren und zur weiteren Rechnung den so korrigierten Wert zu verwenden hat. Es ist die korrigierte Lesung $L - i\cot z - c\,\mathrm{cosec}\,z$. Wie aus der Figur folgt, beziehen sich hierbei die Größen i und c auf das rechte Achsenende, denn man sieht in der Richtung oO zum Objekte, so daß man das Achsenende A zur rechten Hand hat. Ist das rechte Achsenende das tiefere, so wird nur i negativ zu nehmen sein. Ebenso ist c positiv oder negativ, je nachdem die Richtung von OC gegen das rechte Achsenende einen Winkel größer oder kleiner als 90° einschließt. Würde man das Fernrohr durchschlagen, so daß man in der Richtung $C(O)$ sieht, so wäre der Winkel $(O)CA = 90° + c$ geblieben, daher der Winkel mit dem nunmehr rechtsliegenden Achsenende $90° - c$. Man muß daher stets wissen, von welchem Achsenende aus c gerechnet wird; die beiden Achsenenden sind aber voneinander unterschieden; an einer Seite des Fernrohres befindet sich nämlich der fein geteilte Kreis zur Ablesung der Mikroskope und man nennt dieses Ende das Kreisende der Achse. Sei dieses Kreisende A; dann wird man stets i und c auf das Kreisende beziehen und man erkennt,* daß die korrigierte Lesung

für Kreis rechts (K. R.): $L - i\cot z - c\,\mathrm{cosec}\,z$
für Kreis links (K. L.): $L + i\cot z + c\,\mathrm{cosec}\,z$

ist; dabei ist i die Neigung des Kreisendes, positiv, wenn das Kreisende das höhere ist, und $90° + c$ der Winkel der Visierlinie OC mit dem Kreisende, c positiv, wenn dieser Winkel größer als 90° ist.

Beispiel. Sei das Mittel aus den beiden Mikroskoplesungen

bei K. R. 157° 26′ 36·8″, Neigung des Kreisendes $i = +4{\cdot}7''$, der Kollimationsfehler $c = -5{\cdot}8''$; daher das Kreisende das höhere und der Winkel zwischen Visierlinie und Kreisende 89° 59′ 54·2″. Die Zenitdistanz des anvisierten Objektes sei 59° 17′. Man findet aus den Tafeln

$$\cot 59° 17' = 0{\cdot}594,\quad \mathrm{cosec}\ 59°17' = 1{\cdot}163,$$

dann wird

$$-i\cot z = -2{\cdot}8'';\quad -c\,\mathrm{cosec}\,z = +6{\cdot}7'',$$

daher die korrigierte Lesung

$$157° 26' 36{\cdot}8'' - 2{\cdot}8'' + 6{\cdot}7'' = 157° 26' 40{\cdot}7''$$

Wäre für ein zweites Objekt i dasselbe, z dasselbe, so sind natürlich die beiden Reduktionen identisch und es wäre gleichgültig, ob man den Zwischenwinkel aus den korrigierten oder aus den unkorrigierten Lesungen bildet. Ist aber i, z ein anderes, so wird dies nicht mehr der Fall sein. Sei für ein zweites Objekt die unkorrigierte Lesung 234° 15′ 58·9″, $i = +3{\cdot}9''$, $c = -5{\cdot}8''$ (natürlich dasselbe), $z = 27° 38'$, daher

$$\cot z = 1{\cdot}910,\quad \mathrm{cosec}\ z = 2{\cdot}156,$$

* Es kann auch c und i auf das andere Achsenende bezogen werden; dann wären nur die Zeichen der Instrumentenkorrektionen die entgegengesetzten, ebenso aber auch diejenigen der Instrumentalfehler.

so wird

$$-i\cot z = -7{\cdot}4''; \quad -c\,\mathrm{cosec}\,z = +12{\cdot}5''$$

und die korrigierte Lesung

$$234^\circ\,15'\,58{\cdot}9'' - 7{\cdot}4'' + 12{\cdot}5'' = 234^\circ\,16'\,4{\cdot}0'',$$

daher der Zwischenwinkel $76^\circ\,49'\,23{\cdot}3''$.

Wie man sieht, ist gerade bei Sterndurchgängen (Azimutbestimmungen) die Korrektion nicht zu übersehen, da die Sterne in verschiedenen, oft kleinen Zenitdistanzen beobachtet werden, daher cot z, cosec z beträchtlich werden können.

Die Neigung wird mittels des Niveaus bestimmt. Der Kollimationsfehler c kann durch Umlegen in den Achsenlagern erhalten werden, wird aber bei Universalinstrumenten einfacher durch Drehen um 180° und Durchschlagen bestimmt. Ist nämlich der Kollimationsfehler Null, so muß dabei, da die Drehung des Fernrohres genau um 180° stattfindet, wenn in beiden Kreislagen (K. R. und K. L.) dasselbe Objekt pointiert wurde, die Differenz der Lesungen 180° sein. Ist aber der Kollimationsfehler nicht Null, so hat man (das Objekt sei der Einfachheit halber im Horizonte)

die korrigierte Lesung bei K. R.: $L_1 - c$.

Nach dem Durchschlagen des Fernrohres und Drehen des Kreises wird neuerdings pointiert und dann muß natürlich die Drehung des Fernrohres genau 180° sein. Ist

die korrigierte Lesung bei K. L.: $L_2 + c$

so muß

$$L_2 + c = L_1 - c + 180^\circ,$$

folglich

$$c = \frac{180^\circ + L_1 - L_2}{2}$$

sein.

Beispiel: Sei die eine Lesung* bei K. R.:

$$L_1 = 149^\circ\,26'\,38{\cdot}5'',$$

die zweite nach dem Durchschlagen, bei K. L.:

$$L_2 = 329^\circ\,26'\,15{\cdot}7'',$$

so wird

$$c = \frac{329^\circ\,26'\,15{\cdot}7'' - 329^\circ\,26'\,38{\cdot}5''}{2} = -11{\cdot}4''.$$

Man kann dies auch verwenden, um den Kollimationsfehler wegzuschaffen oder doch wenigstens, wenn er zu groß sein sollte, zu verkleinern. Ist nämlich der Kollimationsfehler nicht Null, so wird nach dem Durchschlagen des Fernrohres bei der Drehung um 180° am Kreise (so daß daher

* Die Lesungen sind stets als Mittel der beiden Mikroskoplesungen zu denken, so daß der Exzentrizitätsfehler des Kreises weggeschafft ist. Die Grade der Einstellung brauchen dabei, wie man sieht, nicht notiert zu werden, sie werden sich stets um 180° unterscheiden.

für das obige Beispiel die Lesung am Horizontalkreise 329° 26′ 38·5″ statt 15·7″ wäre) das Objekt nicht mehr am Vertikalfaden erscheinen, und man hat den Faden mittels der dazu dienenden Korrektionsschräubchen um die Hälfte der Abweichung gegen das Bild des Objektes zu zu nähern. Eine neuerliche Wiederholung des Verfahrens (Pointieren des Objektes und Durchschlagen) wird zur Prüfung der Richtigkeit der Korrektion eventuell zu einer zweiten, weiteren Berichtigung dienen.

99. Ist das Fernrohr exzentrisch, bei a' (Fig. 237) angebracht, wobei sich dann der Kreis an der entgegengesetzten Seite bei a befindet und sei $xa'O = c$ der Kollimationsfehler, so kann man sich in C, dem Punkte der Höhenachse, der sich vertikal über der Azimutalachse befindet, ein anderes Fernrohr denken, an welchem ebenfalls das Objekt O pointiert sei, dessen Kollimationsfehler aber $yCO = C$ ist. Da aber

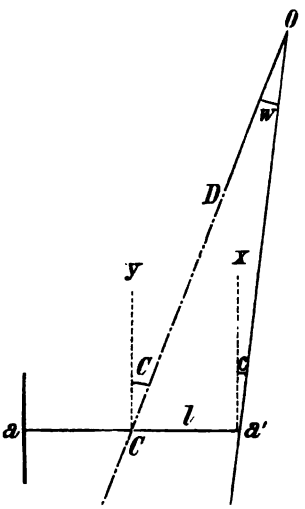


Fig. 237.

$$\sphericalangle aCO = Ca'O + COa'$$

ist, demnach

$$90° + C = 90° + c + COa',$$

so wird

$$C = c + COa'.$$

Aus dem Dreiecke OCa' folgt aber, wenn die Entfernung $CO = D$ und die halbe Länge der Höhenachse $Ca' = l$ gesetzt wird,

$$\frac{\sin COa'}{\sin Oa'C} = \frac{l}{D}$$

demnach

$$\sin COa' = \frac{l}{D} \cos c.$$

Ist nun die Entfernung D gegenüber l sehr groß, so wird der Winkel COa' nur klein und man kann statt des Sinus den Bogen, ferner $\cos c = 1$ setzen und erhält

$$COa' = w = \frac{l}{D \operatorname{arc} 1''}.$$

demnach

$$C = c + w.$$

Ist $D = \infty$, für Sterne, so fällt natürlich das Zusatzglied weg.

Beispiel: Mit einem kleinen Universalinstrumente mit exzentrischem Fernrohr, für welches $l = 10\,cm$ war, wurde der Winkel zwischen zwei Objekten gemessen. Die Beobachtungen waren:

Kreislage	Objekt	Index	Mikroskop I	Mikroskop II	Achsenlibelle*
K. R.	A	95° 40′	2′ 55·6″	3′ 8·7″	14·7 5·3 / 13·4 6·8
	B	132 25	4 16·2	4 25·8	13·6 6·7 / 14·9 5·2
K. L.	A	275 40	1 12·7	0 59·8	7·5 12·8 / 8·6 11·6
	B	312 25	3 22·1	3 15·9	8·8 11·5 / 7·7 12·6

Es war ferner für die beiden Objekte

	die Entfernung D,	Zenitdistanz z	cot z	cosec z
A	345 m	74° 52′	+ 0·270	+ 1·036
B	562 m	95° 8′	— 0·090	+ 1·004

Die Achsenlibelle hatte den Nullpunkt in der Mitte, ihr Parswert war gleich 6·42″.

Berechnung der Neigung (für die erste Beobachtung):

14·7 5·3
13·4 6·8

28·1 12·1 Differenz + 16·0; $\frac{\mu}{4} = 1{\cdot}605''$; $i = + 25{\cdot}7''$

ebenso für die drei anderen Beobachtungen:

		+ 26·6″,	— 13·3″,	— 12·2″,
demnach $\pm i \cot z =$	— 6·9″	+ 2·4	— 3·6	+ 1·1.

Berechnung von w für

	Objekt A	Objekt B
$l:D =$	$\frac{10}{34500}$	$\frac{10}{56200}$
$\log (l:D) =$	6·4622	6·2503
$w =$	59·8″	36·7″

Da der Kollimationsfehler c unbekannt ist, so kann man $c + w$ nicht bilden; es ist aber z. B. für die erste Beobachtung die Korrektion wegen Kollimationsfehler

$$-(c + 59{\cdot}8'') \times 1{\cdot}036 = -61{\cdot}9'' - 1{\cdot}036\, c$$

und ebenso für die übrigen Beobachtungen.

Es folgt daher:

	Mikroskopmittel	Korrektion wegen Neigung	Korrektion wegen Kollimationsfehler	korrigierte Lesung
K. R. A	95° 43′ 2·1″	— 6·9″	— 61·9″ — 1·036 c	95° 41′ 53·3″ — 1·036 c
B	132 29 21·0	+ 2·4	— 36·8 — 1·004 c	132 28 46·6 — 1·004 c
K. L. A	275 41 6·2	— 3·6	+ 61·9 + 1·036 c	275 42 4·5 + 1·036 c
B	312 28 19·0	+ 1·1	+ 36·8 + 1·004 c	312 28 56·9 + 1·004 c

* Dieses Beispiel gibt auch die Anordnung der Beobachtungen im Manuale; in den beiden Lesungen der Achsenlibelle bezieht sich die vorangehende (links stehende) auf das Kreisende. Das Umsetzen der Libelle bei jeder Einstellung ist immer rätlich.

Vergleicht man die Beobachtungen des Objektes A bei K. R. und K. L., so kann man aus dem Unterschiede den Kollimationsfehler bestimmen; denn es müßte die Differenz

$$180° 0' 11{\cdot}2'' + 2{\cdot}072\, c = 180°$$

sein und ebenso aus den Beobachtungen des Objektes B bei K. R. und K. L.

$$180° 0' 10{\cdot}3'' + 2{\cdot}008\, c = 180°$$

und daraus $c = -5{\cdot}40''$ beziehungsweise $-5{\cdot}13''$, im Mittel $c = -5{\cdot}27''$.

Allein c braucht man gar nicht zu kennen; es fällt im Mittel aus beiden Beobachtungen weg; es wird das vom Kollimationsfehler befreite Mittel beider Einstellungen

des Objektes A: $95° 41' 58{\cdot}9''$
des Objektes B: $132\ 28\ 51{\cdot}7$

wobei der Unterschied von 180°, da er bei beiden Objekten auftritt, weggelassen wird.

Der Winkel zwischen beiden Objekten wird demnach:

$$36° 46' 52{\cdot}8''.$$

Wie man sieht, fällt aber auch die wegen Exzentrizität des Fernrohres anzubringende Korrektion weg, denn während (für das Objekt A) bei K. R. die Lesung um $61{\cdot}9''$ zu vermindern ist, ist sie bei K. L. um ebensoviel zu vermehren. Läßt man daher diese Korrektion ganz weg, so hat man die bloß wegen Neigung korrigierten Mikroskopmittel

	K. R.	K. L.
für Objekt A:	$95° 42' 55{\cdot}2''$	$275° 41' 2{\cdot}6''$
„ „ B:	$132\ 29\ 23{\cdot}4$	$312\ 28\ 20{\cdot}1$

Diese beiden Lesungen weichen nun stark voneinander ab; dieses ist aber nicht ein Fehler der Beobachtung, sondern eine Folge der Exzentrizität des Fernrohres; die Mittel

für Objekt A: $95° 41' 58{\cdot}9''$
„ „ B: $132\ 28\ 51{\cdot}7$

stimmen mit der oberen überein und geben denselben Winkel $36° 46' 52{\cdot}8''$. Daraus folgt die Regel: Beobachtet man mit einem exzentrischen Fernrohr in beiden Kreislagen und nimmt die Mittel aus beiden Beobachtungen, so fällt Kollimationsfehler und Korrektion wegen Exzentrizität des Fernrohres weg; man braucht nur die Korrektion wegen Neigung anzubringen.*

100. Beobachtungen mit dem Sextanten. Korrektionen wegen der Neigung der Spiegel und der Visierlinie gegen die Limbusebene sind mit Rücksicht auf die angestrebte und erreichbare Genauigkeit, bei welcher

* Hingegen würden die nur in einer Kreislage gemachten Beobachtungen das fehlerhafte Resultat $36° 46' 28{\cdot}2''$ beziehungsweise $36° 47' 17{\cdot}5''$ geben.

höchstens die Bogensekunde erhalten werden kann, stets verschwindend.* Hingegen wird man einen mit dem Sextanten gemessenen Winkel AOB (Fig. 238), da er meist nicht ein Horizontalwinkel ist, auf den Horizont projizieren müssen, um den Horizontalwinkel $A'OB'$ zu erhalten. Zu diesem Zwecke bedarf man der Höhen (oder Zenitdistanzen) der beiden Objekte. Der gemessene Winkel w tritt dann als Seite in dem sphärischen Dreiecke ABZ (wobei Z das Zenit ist) auf, während der Horizontalwinkel w' gleich dem Winkel BZA in dem sphärischen Dreiecke ist.

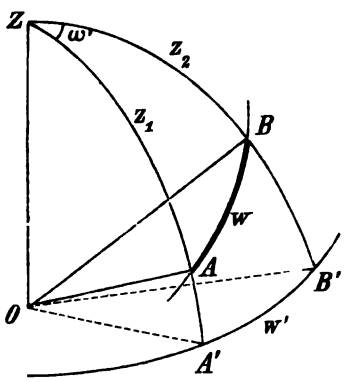


Fig. 238.

In diesem Dreiecke hat man

$$\cos w = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 \cos w'$$

und daraus**

$$\cos w' = \frac{\cos w - \cos z_1 \cos z_2}{\sin z_1 \sin z_2} = \frac{\Delta}{\sin z_1 \sin z_2}.$$

Beispiel: Sei

$$w = 54^\circ\,36'\,45''; \quad h_1 = 5^\circ\,19{\cdot}4' \quad h_2 = 11^\circ\,34{\cdot}2'.$$

Man hat

$$\begin{array}{llll} z_1 = 84^\circ\,40{\cdot}6' & \log\cos z_1 = 8{\cdot}96744 & \log\sin z_1 = 9{\cdot}998123 \\ z_2 = 78^\circ\,25{\cdot}8' & \log\cos z_2 = 9{\cdot}30226 & \log\sin z_2 = 9{\cdot}991084 \\ & 8{\cdot}26970 & 9{\cdot}989207 \\ \cos z_1 \cos z_2 = 0{\cdot}018608 & & \log\Delta = 9{\cdot}748572 \\ \cos w = 0{\cdot}579103 & & \log\cos w' = 9{\cdot}759365 \\ \Delta = 0{\cdot}560495 & & w' = 54^\circ\,55'\,42'' \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rl} \log(\cos z_1 \cos z_2) = & 8{\cdot}26970 \\ \log\cos w = & 9{\cdot}762756 \\ \text{Subtraktionslogarithmus}\,*** = & 9{\cdot}985816 \\ \log\Delta = & 9{\cdot}748572 \end{array}$$

101. Repetitionsbeobachtungen, Satzbeobachtungen. Beim Winkelmessen selbst können zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden.

---

* Vgl. des Verf. Artikel „Spiegelsextant und Prismenkreis" in Valentiner „Handwörterbuch der Astronomie", Bd. III, 1. Abt., S. 25.

** Oder die logarithmisch taugliche Form:

$$\operatorname{tang}\frac{w'}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - z_1)\sin(s - z_2)}{\sin s \sin(s - w)}},$$

wobei

$$s = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2 + w)$$

ist.

*** Über den Gebrauch der Additions- und Subtraktionslogarithmen s. Nr. 114.

Man mißt entweder jeden einzelnen Winkel durch Repetition, so daß auch die nebeneinanderliegenden Winkel *IOII*, *IIOIII* (Fig. 137) unabhängig voneinander bestimmt werden. Oder aber man visiert bei unveränderter Stellung des Instrumentes nach und nach alle zu beobachtenden Punkte hintereinander an und liest jedesmal den Kreis ab. Man erhält dann sofort die sämtlichen einzelnen Winkel dadurch, daß man die Differenzen der Kreislesungen bildet, welche den zugehörigen Objekten entsprechen. Diese Beobachtungen nennt man Richtungsbeobachtungen oder Satzbeobachtungen. In diesem Falle wird man nämlich nicht eine einzige Reihe von Lesungen vornehmen; die Erfahrung ergab, daß sich im Laufe des Tages eine Drehung der Pfeiler, und zwar mit dem Sonnenstande zeigt, wodurch entweder alle Winkel zu groß oder alle Winkel zu klein folgen würden. Um diesen Fehler zu eliminieren, werden die Lesungen bei geänderter Reihenfolge vorgenommen; in der ersten Reihe wird zuerst auf das Objekt *I*, dann *II*, *III* . . . eingestellt und gelesen, dann wird der Vorgang in umgekehrter Reihenfolge . . . *III*, *II*, *I* wiederholt. Eine solche doppelte Beobachtungsreihe bildet einen „Satz". Man beobachtet stets mehrere Sätze. Um dabei den Einfluß der unregelmäßigen und periodischen Teilungsfehler zu eliminieren, wird aber jeder Satz bei einer anderen Stellung des Kreises vorgenommen. Man wird nach dem ersten Satz den Horizontalkreis um 60° verstellen, nach dem zweiten Satz neuerdings usw. und erhält so sechs über die ganze Peripherie gleichmäßig verteilte Sätze. Um auch den eventuellen Kollimationsfehler des Fernrohres zu eliminieren, wird man dann das Fernrohr durchschlagen und neuerdings sechs Sätze, wieder bei den sechs verschiedenen Stellungen des Kreises, beobachten.

Da man aber sowohl bei Repetitions- als bei Satzbeobachtungen mehr Beobachtungen zur Verfügung hat als es nötig ist, so werden infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nicht alle Beobachtungen dasselbe Resultat ergeben; die Beobachtungen müssen daher streng ausgeglichen werden. Bei der Landestriangulierung und Erdmessung erfolgt diese Ausgleichung strenge nach der Methode der kleinsten Quadrate; wo, wie in der Detailvermessung die größte Genauigkeit nicht unbedingt erforderlich ist, weil kleine Unsicherheiten in den gemessenen Winkeln nur unbedenkliche Fehler in den Seitenlängen erzeugen, welche die Darstellung des vermessenen Gebietes nur unmerklich (weit unterhalb der zulässigen Fehlergrenze) beeinflussen, genügt eine genäherte Ausgleichung, wenn nur alle gemachten Beobachtungen bei der Ableitung des Resultates mitwirken.*

Hat man bei den Repetitionsbeobachtungen nicht nur am Anfang und Ende der Beobachtung abgelesen, sondern auch z. B. nach jeder zweiten Repetition, so kann man diese verwenden, indem man aus je zwei aufeinanderfolgenden Lesungen den Winkel ableitet und diese Werte vergleicht. Sei z. B. erhalten worden:

---

* Eine derartige Aufnahme mit dem Theodoliten an Stelle der Meßtischaufnahme ist aus dem Grunde sehr vorteilhaft, weil alle beobachteten Winkel bleibend in Zahlen ausgedrückt sind, daher jederzeit in beliebigem Maßstabe reproduziert werden können. Auch werden noch kleine Triangulierungen nötig, wenn für die Detailaufnahme eine größere Anzahl von Hauptpunkten benötigt werden.

			daraus der doppelte Winkel
Erste Lesung	45° 37′ 26·5″		
nach zweimaliger Repetition	91 51 18·3		46° 13′ 51·8″
„ viermaliger „	138 5 8·0		46 13 49·7
„ sechsmaliger „	184 18 58·9		46 13 50·9
„ achtmaliger „	230 32 51·2		46 13 52·3
„ zehnmaliger „	276 46 40·6		46 13 49·4
	Mittel		46° 13′ 50·8″
daher der einfache Winkel			23 6 55·4

Derselbe Wert muß aber auch aus der ersten und letzten Beobachtung allein folgen;* man erhält dann als zehnfachen Winkel 231° 9′ 14·1″ und daraus den einfachen Winkel 23° 6′ 55·4″, wie oben. In der Tat müssen die Zwischenlesungen bei dieser Rechnung herausfallen. Sind diese nämlich ganz allgemein

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots .\ n_\lambda$$

so folgt für eine μ-malige Repetition der μ-fache Winkel

$$n_2 - n_1,\ n_3 - n_2,\ n_4 - n_3,\ \ldots .\ n_\lambda - n_{\lambda-1}$$

und das arithmetische Mittel dieser Werte ist

$$\frac{(n_2 - n_1) + (n_3 - n_2) + (n_4 - n_3) \ldots . + (n_\lambda - n_{\lambda-1})}{\lambda} = \frac{n_\lambda - n_1}{\lambda}$$

für den μ-fachen Winkel und daher für den einfachen Winkel

$$\frac{n_\lambda - n_1}{\mu\lambda}.$$

Die erhaltenen Einzelwerte ermöglichen aber ein Urteil über die Genauigkeit der Beobachtungen. Im obigen Beispiele sind die Abweichungen der einzelnen Werte vom Mittel + 1·0″, — 1·1″, + 0·1″, + 1·5″, — 1·4″ positiv, wenn der beobachtete Wert größer ist, negativ, wenn er kleiner ist, also im Sinne „Beobachtung weniger Rechnung“ $(B - R)$, daher die mittlere Abweichung, wenn alle ihrem absoluten Werte nach genommen werden, $\pm\frac{5{\cdot}1''}{5} = \pm\,1{\cdot}0''$. Diese mittlere Abweichung ist je nach den Umständen sehr verschieden. Bei Sextantenbeobachtungen kann sie auf 10″ und mehr steigen; gestatten die geteilten Kreise überhaupt nur Ablesungen auf 1′, so kann die mittlere Abweichung der Lesungen auch zu diesem Betrage ansteigen. Aber auch die Übung des Beobachters, die äußeren Umständen (Helligkeit der Objekte, Güte des Objektivs, Stärke der Vergrößerung) wirken mit, so daß dieses Mittel der Abweichung als Charakteristik für die Beobachtungen gelten kann und in den einfachsten Fällen auch als „mittlerer Fehler der Beobachtung“ auftritt.

* Mitunter wird dies so dargestellt, als ob durch die obige Rechnung das Resultat genauer erhalten würde.

Bei Satzbeobachtungen wird man ebenso für jeden einzelnen Winkel eine Reihe von Werten aus der Differenz der Lesungen erhalten und man wird dann für eine Detailtriangulation als ausreichende Näherung das Mittel aus allen Einzelwerten bilden.

Beispiel. 1887, Juli 29., maß ich von dem Ostfenster des I. Vertikalraumes der v. Kuffnerschen Sternwarte in Wien die Winkel zwischen Leopoldsberg L, k. k. Universitätssternwarte W (Spitze der Hauptkuppel) und Stephansturm S (Spitze) mit einem Starkeschen Universalinstrument. Einige dieser Beobachtungen sind:

	L	W	S	
K. R.	290° 14′ 56·7″	316° 52′ 26·9″	355° 20′ 5·7″	vor
	15 0·1	52 29·7	19 59·4	zurück
K. L.	110 14 12·4	136 51 45·1	175 19 11·7	vor
	14 21·9	51 46·1	19 9·8	zurück
K. L.	92 44 24·9	119 21 53·8	157 49 14·8	vor
K. R.	272 44 52·7	299 22 16·3	337 49 41·3	vor
K. R.	249 4 52·6	275 42 21·1	314 9 42·9	zurück
K. L.	69 4 21·0	95 41 50·9	134 9 25·8	zurück.

Daraus leiten sich die folgenden Einzelwerte der Winkel ab:

$\sphericalangle LOW$	$\sphericalangle WOS$
26° 37′ 30·2″	38° 27′ 38·8″
29·6	29·7
32·7	26·6
24·2	23·7
28·9	21·0
23·6	25·0
28·5	21·8
29·9	34·9

deren Mittel 26° 37′ 28·5″ beziehungsweise 38° 27′ 27·7″ sind; die mittleren Abweichungen der Einzelwerte von diesen Mitteln sind beziehungsweise $\pm$ 2·1″ und $\pm$ 3·7″.

Leitet man den letzten Winkel aus dem letzten Objekte und dem ersten ab, so erhält man sämtliche Winkel um den ganzen Horizont, einen sogenannten Horizontabschluß. Bei Richtungsbeobachtungen muß diese Summe stets 360° geben; denn sind die aufeinanderfolgenden Lesungen n_1, n_2, $n_3 \ldots n_\lambda$, so sind die Winkel

$$w_1 = n_2 - n_1, \quad w_2 = n_3 - n_2 \ldots, \quad w_{\lambda-1} = n_\lambda - n_{\lambda-1}, \quad w_\lambda = n_1 - n_\lambda,$$

daher die Summe

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_{\lambda-1} + w_\lambda = 360°,$$

und zwar für jeden Satz. Nicht dasselbe muß bei Repetitionsbeobachtungen auftreten; in diesem Falle wurde jeder Winkel für sich abgeleitet und man erhält daher für die sämtlichen um einen Punkt herumliegenden Winkel

eine Bedingungsgleichung: ihre Summe muß 360° geben. Stimmt dies nicht, so daß

$$w_1^{(o)} + w_2^{(o)} + w_3^{(o)} + \ldots + w_\lambda^{(o)} = 360° + m \qquad (a)$$

wäre, wobei m immerhin ein kleiner Beitrag sein wird, so müssen an die sämtlichen beobachteten Werte $w_1^{(o)}, w_2^{(o)} \ldots$ gewisse Korrektionen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ angebracht werden, so daß die korrigierten Winkel

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1^{(o)} + \omega_1 \\ w_2 &= w_2^{(o)} + \omega_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

die Bedingung

$$(w_1^{(o)} + \omega_1) + (w_2^{(o)} + \omega_2) + \ldots + (w_\lambda^{(o)} + \omega_\lambda) = 360°$$

strenge erfüllen. Mit Rücksicht auf die Gleichung (a) wird hieraus

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_n + m = 0.$$

Jeder Horizontalschluß gibt eine derartige Bedingungsgleichung zwischen den anzubringenden Korrektionen $\omega_1, \omega_2 \ldots$

Beispiel: Seien durch Einzelmessungen die Winkel um einen Punkt erhalten worden:

$$\begin{aligned} w_1^{(o)} &= 35° 48' 26{\cdot}7'' \\ w_2^{(o)} &= 78\ 37\ 51{\cdot}6 \\ w_3^{(o)} &= 102\ 16\ 24{\cdot}8 \\ w_4^{(o)} &= 81\ 50\ 7{\cdot}9 \\ w_5^{(o)} &= 29\ 8\ 14{\cdot}3 \\ w_6^{(o)} &= 32\ 18\ 41{\cdot}2 \end{aligned}$$

daher Summe $= 359° 59' 46{\cdot}5''$;

demnach ist

$$m = -13{\cdot}5''$$

und die Bedingungsgleichung zwischen den Korrektionen wird:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 - 13{\cdot}5'' = 0.$$

Diese Korrektionen können natürlich, wenn nichts weiter bekannt ist, sehr verschieden verteilt werden, aber sie können nicht beliebig groß werden, sie müssen im Gegenteil möglichst klein bleiben, allgemein: die Summe der Quadrate* der übrigbleibenden Fehler muß ein Minimum werden (daher der Name: Methode der kleinsten Quadrate). Übrigens werden in den meisten Fällen noch andere Bedingungsgleichungen hinzutreten (vgl. Nr. 126).

102. Zentrieren der Winkel. Ist man durch irgendwelchen Umstand verhindert, sich auf dem eigentlichen Fixpunkte P (Fig. 239), der als solcher

* Damit man von den Zeichen der Korrektionen unabhängig ist. Positive und negative Korrektionen könnten nämlich sehr groß werden und dennoch eine sehr kleine Summe geben; die Quadrate der Korrektionen sind aber stets positiv und die Summe nur dann sehr klein, wenn die einzelnen Korrektionen, gleichgültig ob positiv oder negativ, sehr klein sind.

für die Visuren von den anderen Beobachtungspunkten aus dient, mit dem Instrumente aufzustellen, so wird der Theodolit in einem wenig davon entfernten Punkte Q aufgestellt und hier beobachtet. Ist der Winkel $AQB = w$ zwischen zwei Objekten A, B gemessen, so ist aus diesem Winkel nunmehr der unbekannte Winkel $x = APB$ zwischen den Objekten, gesehen von dem eigentlichen Dreieckspunkte P aus, zu berechnen. Hierzu ist die Kenntnis der Lage des Punktes Q nötig, welche gegeben ist durch die Entfernung d desselben vom Dreieckspunkte und den Winkel v gegenüber einer der Visuren. v soll dabei der Winkel sein, den man erhält, wenn man von der Richtung QP ausgehend, in der Richtung der wachsenden Azimute (zur rechten Hand herum) zu dem in dieser Richtung zunächst folgenden der anzuvisierenden Objekte kommt. Sind α, β die Winkel PAQ, PBQ, so folgt aus den entsprechenden beiden Dreiecken, wenn die Entfernungen $PA = a$, $PB = b$ sind,

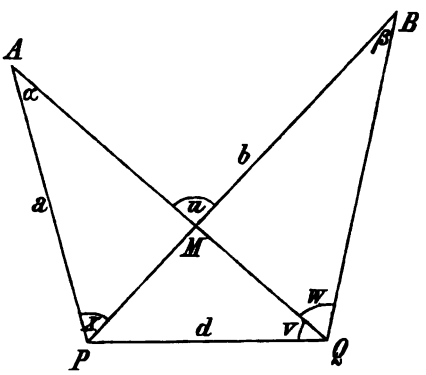


Fig. 239.

$$\sin\alpha = \frac{d}{a}\sin v; \qquad \sin\beta = \frac{d}{b}\sin(v+w).$$

Sind die Winkel v und $v + w$ kleiner als 180°, so wird α, β positiv.* Ist einer der beiden Winkel größer als 180°, so wird der zugehörige parallaktische Winkel negativ; dann ist, wie man sich leicht für alle Fälle überzeugt,

$$x + \alpha = w + \beta$$

gleich dem Außenwinkel u in den beiden Dreiecken APM, BQM. Liegt z. B. B auf der andern Seite von PQ (Fig. 240), so daß $v + w$ ein stumpfer

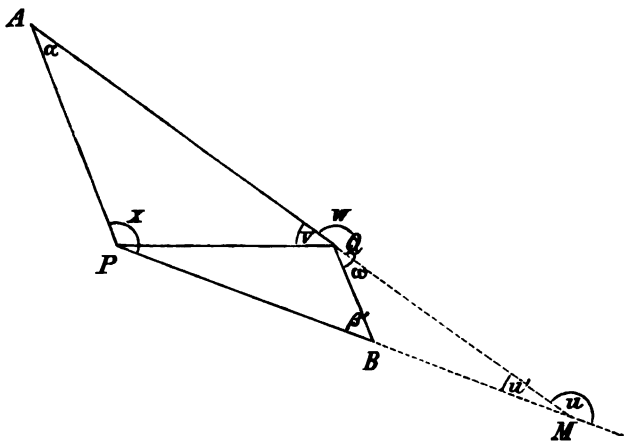


Fig. 240.

* Dieses der Grund, warum die Zählung des Winkels v in der oben erwähnten Weise festgesetzt wurde.

Winkel wird, so ist β negativ $= -\beta'$; dann ist $x + \alpha = u = 180° - u'$ und $u' = \beta' - \omega = -\beta - (w - 180°)$, demnach

$$x + \alpha = 180° + (\beta + w - 180°) = w + \beta.$$

Ist d gegenüber den Entfernungen a, b nur klein, so kann man die sinus durch die Bogen ersetzen und erhält

$$x + \frac{d}{a} \sin v = w + \frac{d}{b} \sin (v + w),$$

demnach

$$x = w + \frac{d}{b \text{ arc } 1''} \sin (v + w) - \frac{d}{a \text{ arc } 1''} \sin v.$$

Beispiel. Sei $d = 5{\cdot}85\ m$; $v = 54° 8' 35{\cdot}7''$; $w = 187° 18' 47{\cdot}9''$; $a = 8{\cdot}47\ km$ (genähert); $b = 15{\cdot}62\ km$ (genähert).* Man erhält $v + w = 241° 27' 23{\cdot}6''$ und, alle Entfernungen in Metern ausgedrückt:

$\log a$	$= 3{\cdot}92788$	$\log \alpha''$	$= 2{\cdot}06245$
$\log \sin v$	$= 9{\cdot}90874$	$\log \beta''$	$= 1{\cdot}83163_n$
$\log d$	$= 0{\cdot}76716$	α''	$= 115{\cdot}5'' = +1' 55{\cdot}5''$
$\log \sin (v + w)$	$= 9{\cdot}94372_n$	β''	$= -67{\cdot}9'' = -1' 7{\cdot}9''$
$\log b$	$= 4{\cdot}19368$	w	$= 187° 18' 47{\cdot}9''$
$\log \sin \alpha$	$= 6{\cdot}74802$	$x = w + \beta - \alpha$	$= 187° 15' 44{\cdot}5''$
$\log \text{arc } 1''$	$= 4{\cdot}68557$		
$\log \sin \beta$	$= 6{\cdot}51720_n$.		

103. Messung der Vertikalwinkel. Als Fehlerquellen, deren Berücksichtigung nötig wird, sind hier die Refraktion und die Konvergenz der Lotlinien bei großer horizontaler Entfernung zu berücksichtigen.

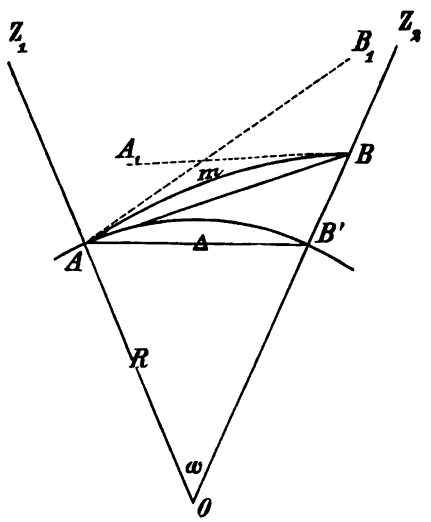


Fig. 241.

Einfluß der Refraktion. Die Lichtstrahlen pflanzen sich nur solange geradlinig fort, als sie in einem überall gleich dichten Medium bleiben. Gehen sie von einem Medium in ein dichteres über, so findet Brechung zum Lote statt, beim Übergange in ein weniger dichtes Medium Brechung vom Lote. Da nun die Luft in größeren Höhen eine immer geringere Dichte hat, so werden die Lichtstrahlen von einem Punkte B (Fig. 241) nach einem Punkte A nicht in der geraden Linie BA gelangen, sondern in der krum-

* Für diese Rechnungen sind Näherungswerte der Entfernungen, wie sie eine erste Berechnung mit $d = 0$ ergeben, d. h. wo auf die exzentrische Aufstellung des Instrumentes nicht Rücksicht genommen wird, ($x = w$) völlig ausreichend.

men Linie BmA. Die Richtungen gegen das Zenit sind in den beiden Punkten AZ_1 und BZ_2 und es wäre die wahre Zenitdistanz des Punktes B, beobachtet in A: $z_1 = Z_1AB$, die wahre Zenitdistanz von A, beobachtet in B: $z_2 = Z_2BA$.

Wenn aber das von B nach A kommende Licht den Weg BmA zurücklegt, so gelangt es in A in der Richtung der Tangente B_1A ins Auge und das in A beobachtende Auge verlegt den Punkt B in die Richtung AB_1. Die scheinbare Zenitdistanz des Punktes B wird daher $\zeta_1 = Z_1AB_1$. Der Gang des von A ausgehenden, nach B kommenden Lichtstrahles ist ebenfalls AmB und das in B beobachtende Auge sieht daher den Gegenstand A in der Richtung BA_1 in der Zenitdistanz $Z_2BA_1 = \zeta_2$. Man nennt die Unterschiede

$$z_1 - \zeta_1 = r_1, \quad z_2 - \zeta_2 = r_2$$

die Refraktion, und zwar die terrestrische Refraktion, zum Unterschied gegen die astronomische Refraktion, bei welcher die anvisierten Objekte Gestirne sind, also sich in einer gegenüber dem Erdhalbmesser außerordentlich großen Distanz befinden. Während die astronomische Refraktion nur von der Zenitdistanz und dem Luftzustande (Temperatur und Barometerstand) abhängig ist, hat sich aus den geodätischen Beobachtungen ergeben, daß die terrestrische Refraktion nahe proportional ist der Entfernung der Objekte, d. h. dem Winkel AOB am Erdmittelpunkte, den die Erdradien der beiden Punkte einschließen. Hieraus würde folgen, daß die Refraktion in A und B gleich groß ist und in jedem dieser Punkte denselben Betrag erreicht, in welcher Höhe auch sich die beiden Objekte über dem Horizonte befinden. Denn in dem Ausdrucke

$$r = \frac{k}{2}\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wo k der Koeffizient der terrestrischen Refraktion genannt wird, kommt außer ω keine Größe vor, welche auf einen Einfluß der Höhenlage von A oder B hindeuten würde, und überdies ist, da für A und B der Winkel ω derselbe ist, $r_1 = r_2$.

Daß der Koeffizient k (und damit die Refraktion) von der Höhe sowohl als auch von den meteorologischen Elementen beeinflußt wird, ist schon lange bekannt und es hat sich wesentlich Bauernfeind* durch theoretische Untersuchungen um diese Frage besonders verdient gemacht. Für geringe Entfernungen, wie dieselben in der niederen Geodäsie auftreten, kann man jedoch unbedenklich die Annahme (1) beibehalten, während für Entfernungen, wie dieselben bei der Landestriangulation vorkommen, auf diesen Umstand bei der trigonometrischen Höhenmessung Rücksicht zu nehmen wäre.

Die Bestimmung des Refraktionskoeffizienten k kann aus Zenitdistanzmessungen selbst erfolgen. Man hat nämlich aus dem Dreiecke ABO

$$\measuredangle BAO + \measuredangle ABO + \omega = 180°$$

oder

$$180° - z_1 + 180° - z_2 + \omega = 180°,$$

* Elemente der Vermessungskunde, Bd. II, S. 335 ff.

daher

$$\omega = z_1 + z_2 - 180°.$$

Da aber

$$z_1 = \zeta_1 + r_1, \quad z_2 = \zeta_2 + r_2$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}\omega &= \zeta_1 + \zeta_2 - 180° + r_1 + r_2 \\ &= \zeta_1 + \zeta_2 - 180° + k\omega\end{aligned}$$

und daraus

$$k = \frac{180° + \omega - (\zeta_1 + \zeta_2)}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Der für k anzunehmende Wert ist hinreichend genau

$$k = 0{\cdot}13.$$

Die terrestrische Refraktion wird jedoch bei Messungen, bei denen die Entfernung der beiden Objekte unter 5 *km* ist, immer unter 10″ betragen; denn es entspricht einer Entfernung von 30 *m* auf der Erdoberfläche ein Zentriwinkel von 1″; daher einer Entfernung von 5 *km* ein Zentriwinkel $\omega = 167'' = 2'\,47''$, daher die terrestrische Refraktion in dieser Entfernung $r = 0{\cdot}065 \times 167'' = 10{\cdot}8''$.

Bei der Benutzung von Instrumenten, die nur mit Nonien versehen sind, welche 10 bis 20″ abzulesen gestatten, wird man bei Entfernungen unter 2 *km* die Refraktion ganz übergehen können und bei genauen Vermessungen mit Instrumenten, welche Bogensekunden abzulesen gestatten, wird man die Refraktion nach der Formel $r = \frac{k}{2}\omega$ berechnen. Der Einfluß des Barometerstandes und der Temperatur, der nur wenige Prozente des Gesamtwertes beträgt, wird, wenn sich deren Veränderungen innerhalb der lokalen Schwankungen bewegen, stets unter 1″ bleiben. Nicht dasselbe gilt aber von der Höhenlage und bei weiten Entfernungen und in sehr verschiedenen Seehöhen der beobachteten Objekte müßte ein theoretisch richtiger Wert jedenfalls zu bevorzugen sein. Hier tritt nun aber eine Schwierigkeit anderer Art auf. Es ist allgemein bekannt, daß die astronomische Refraktion in der Nähe des Horizontes außerordentlichen Unsicherheiten unterliegt, weil die Lichtstrahlen durch weite Strecken in der Nähe der Erdoberfläche gehen, und die Unkenntnis des Luftzustandes in diesen Schichten, welche bisher allen Bestrebungen zu genaueren Untersuchungen über die astronomische Refraktion im Horizonte Schwierigkeiten in den Weg legte, muß selbstverständlich auch ebenso der genaueren Bestimmung und Berücksichtigung der terrestrischen Refraktion auf weite Entfernungen hin hinderlich sein. Auch trigonometrische Höhenmessungen auf weite Entfernungen hinaus unterliegen daher erheblichen Unsicherheiten, und wenn diese auch weitaus nicht die Größe der bei barometrischen Höhenmessungen zu erwartenden Fehler erreichen, so können sie mit den durch das Präzisionsnivellement erhaltenen Werten doch den Vergleich nicht aushalten.

104. Berechnung der Höhen (Einfluß der Konvergenz der Lotlinien). Ist die durch A gelegte Niveaufläche nicht als Ebene anzusehen

(d. h. die Krümmung der Erde nicht zu vernachlässigen), so wird man die Höhe H über der durch A gehenden Niveaufläche zählen. Ist die Höhe H aus den Beobachtungen in A zu bestimmen, so wird, wenn R der Erdhalbmesser ist,

$$\frac{R+H}{R} = \frac{\sin BAO}{\sin ABO}$$

oder da

$$BAO = 180° - z_1 = 180° - (\zeta_1 + r_1)$$
$$ABO = BAZ_1 - AOB = z_1 - \omega$$

ist,

$$1 + \frac{H}{R} = \frac{\sin[\zeta_1 + \tfrac{1}{2}k\omega]}{\sin[\zeta_1 - (1-\tfrac{1}{2}k)\omega]}$$

$$\frac{H}{R} = \frac{\sin[\zeta_1 + \tfrac{1}{2}k\omega] - \sin[\zeta_1 - (1-\tfrac{1}{2}k)\omega]}{\sin[\zeta_1 - (1-\tfrac{1}{2}k)\omega]}$$

und wenn man im Zähler die Differenzen der sinus durch Produkte der goniometrischen Funktionen ersetzt:

$$H = \frac{2R\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos[\zeta_1 - (1-k)\tfrac{1}{2}\omega]}{\sin[\zeta_1 - (1-\tfrac{1}{2}k)\omega]}.$$

Da aber

$$2R\sin\tfrac{1}{2}\omega = AB' = \Delta$$

ist, so wird*

$$H = \frac{\Delta\cos[\zeta_1 - \tfrac{1}{2}(1-k)\omega]}{\sin[\zeta_1 - (1-\tfrac{1}{2}k)\omega]} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Wurden auf beiden Seiten gleichzeitig Zenitdistanzen gemessen, so erhält man die Höhe unabhängig von k; substituiert man für $k\omega$ den aus ζ_1 und ζ_2 ausgedrückten Wert (Formel 2, S. 242), so folgt

$$\zeta_1 - \tfrac{1}{2}(1-k)\omega = \zeta_1 - \tfrac{1}{2}\omega + 90° + \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_2) = 90° + \tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)$$
$$\zeta_1 - (1-\tfrac{1}{2}k)\omega = \zeta_1 - \omega + 90° + \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_2) = 90° - \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2),$$

demnach

$$H = \Delta\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)}{\cos\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1 + \omega)} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die beiden Formeln für H können in eine für die Anwendung bequemere Form gebracht werden, wenn man berücksichtigt, daß ω stets ein sehr kleiner Winkel ist. Setzt man dann

$$\zeta_1 - (1-\tfrac{1}{2}k)\omega = u, \text{ daher } \zeta_1 - \tfrac{1}{2}(1-k)\omega = u + \tfrac{1}{2}\omega,$$

so wird.

$$\cos[\zeta_1 - \tfrac{1}{2}(1-k)\omega] = \cos(u + \tfrac{1}{2}\omega) = \cos u\cos\tfrac{1}{2}\omega - \sin u\sin\tfrac{1}{2}\omega$$
$$\sin[\zeta_1 - (1-\tfrac{1}{2}k)\omega] = \sin u$$
$$\cos\tfrac{1}{2}[\zeta_2 - \zeta_1 + \omega] = \cos\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)\cos\tfrac{1}{2}\omega - \sin\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)\sin\tfrac{1}{2}\omega$$

und daher aus (1):

$$H = \Delta\frac{\cos u - \tfrac{1}{2}\omega\sin u}{\sin u} = \Delta(\cot u - \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$H = \Delta\cot u - \tfrac{1}{2}\Delta.\omega \quad \ldots\ldots (3)$$

---

* Mit Vernachlässigung der Konvergenz der Lotlinien ($\omega = 0$) wird

$$H = \Delta\cot\zeta_1 = \Delta\tan g\, h_1$$

wie auch unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreiecke zwischen den beiden Punkten folgt.

und $$H = \Delta \frac{\sin \frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)}{\cos \frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) - \frac{1}{2}\omega \sin \frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)}$$

$$H = \Delta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)\,[1 + \tfrac{1}{2}\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)] \quad \ldots . (4)$$

Beispiel. Es sei ein Punkt in der Entfernung $\Delta = 4{\cdot}58\ km$ in der Zenitdistanz $\zeta_1 = 82^\circ\,17'\,35{\cdot}8''$ beobachtet. Man erhält mit der Verwandlungszahl $30\ m = 1''$ oder genauer mit der Annahme für den Erdhalbmesser $R = 6370{\cdot}3\ km$:* $\omega = \Delta : R$

$$\begin{aligned}
\log \Delta &= 0{\cdot}66087 \\
\log R &= 3{\cdot}80416 \\
\log \omega &= \overline{6{\cdot}85671} \\
\log \text{arc } 1'' &= 4{\cdot}68557 \\
\log \omega'' &= \overline{2{\cdot}17114} \\
r = \tfrac{1}{2}k\omega &= 9{\cdot}6'';
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \Delta\omega &= 7{\cdot}51758 \\
\Delta\omega &= 0{\cdot}00329\ km = 3{\cdot}29\ m \\
\omega &= 148{\cdot}3'' = 2'\,28{\cdot}3'' \\
(1 - \tfrac{1}{2}k)\omega &= \omega - r = 2'\,18{\cdot}7'' \\
u &= 82^\circ\,15'\,17{\cdot}1''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \cot u &= 9{\cdot}13357 \\
\log \Delta &= 0{\cdot}66087 \\
\log \Delta \cot u &= 9{\cdot}79444
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Delta \cot u &= 0{\cdot}62293\ km = 622{\cdot}93\ m \\
\tfrac{1}{2}\Delta\omega &= 1{\cdot}64\ m \\
H &= 621{\cdot}3\ m.**
\end{aligned}$$

Hätte man beiderseits beobachtet, so wäre

$$\zeta_1 = 82^\circ\,17'\,35{\cdot}5'', \qquad \zeta_2 = 97^\circ\,44'\,33{\cdot}3''$$

gefunden worden; da nun $\omega = 2'\,28{\cdot}3''$ ist, so würde man für die Berechnung von k erhalten:

$$180^\circ + \omega - (\zeta_1 + \zeta_2) = 19{\cdot}5'',$$

daher

$$k = \frac{19{\cdot}5}{148{\cdot}3} = 0{\cdot}131.$$

Man kann aber die Höhe ohne Benutzung von k nach Formel (4) erhalten; es ist nämlich

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 15^\circ\,26'\,57{\cdot}8''; \qquad \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) = 7^\circ\,43'\,28{\cdot}9''$$

$$\begin{aligned}
\log R &= 3{\cdot}80416 \\
\log \Delta &= 0{\cdot}66087 \\
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) &= 9{\cdot}13240 \\
\log \tfrac{1}{2}\omega &= \overline{6{\cdot}55568} \\
\log [\tfrac{1}{2}\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)] &= \overline{5{\cdot}68808} \\
1 + \tfrac{1}{2}\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) &= 1{\cdot}000049 \\
\log [1 + \tfrac{1}{2}\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)] &= 0{\cdot}00002 \\
\log \Delta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) &= 9{\cdot}79327 \\
\log H &= 9{\cdot}79329 \\
H &= 0{\cdot}6213\ km = 621{\cdot}3\ m.
\end{aligned}$$

---

* Der Radius einer der Erde gleichen Kugel (vgl. Nr. 141).

** Ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung und der Refraktion erhielte man $H = \Delta \cot \zeta_1$

$$\begin{aligned}
\log \cot \zeta_1 &= 9{\cdot}13138 \\
\log \Delta &= 0{\cdot}66087 \\
\log H &= \overline{9{\cdot}79225}
\end{aligned}
\qquad H = 0{\cdot}6198\ km = 619{\cdot}8\ m$$

über der durch den Beobachtungspunkt gelegten Horizontalebene.

Man sieht hieraus, daß man in Formel (4) das von ω abhängige Zusatzglied $\frac{1}{2}\omega \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)$ gegen die Einheit meist wird vernachlässigen können; dann hat man ausreichend genau

$$H = \Delta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

105. Zentrieren der Vertikalwinkel. Bei den Zenitdistanzen wird ebenso wie bei den Horizontalwinkeln eine Reduktion nötig, wenn man sich mit dem Instrumente nicht in dem Punkte selbst, sondern entweder etwas höher oder tiefer oder aber näher oder entfernter von dem anzuvisierenden Objekte aufgestellt hat. Wird z. B. aus B (Fig. 242) die Spitze S eines in A befindlichen Signales anvisiert, während man das Instrument unter diesem Signal etwa auf dem Erdboden aufgestellt hat, so wird in A nicht der Winkel ζ_1 gemessen, welcher in voriger Nummer zur Bestimmung der relativen Höhe nötig ist, sondern der Winkel ζ, aus welchem erst ζ_1 abzuleiten ist. Es ist

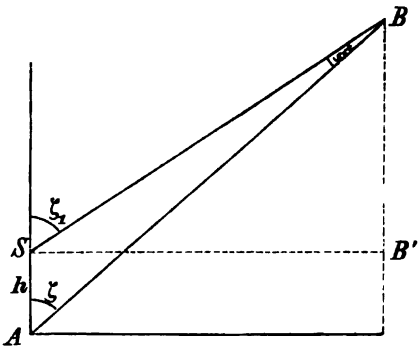


Fig. 242.

$$\zeta_1 = \zeta + \xi$$

und wie aus dem Dreiecke SAB folgt

$$\sin \xi = \frac{h}{D} \sin \zeta,$$

wo h die Höhe des Signales AS, D die schiefe Distanz SB ist. Führt man zunächst statt dieser die Horizontaldistanz Δ ein, so ist wegen $\measuredangle SBB' = \zeta_1$

$$D = \frac{\Delta}{\sin \zeta_1}.$$

Eigentlich hätte man auch hier auf die Konvergenz der Lotlinien Rücksicht zu nehmen; da aber ξ immer ein sehr kleiner Winkel ist, so wird ξ innerhalb der geforderten Genauigkeitsgrenzen identisch ausfallen, ob man diese Konvergenz berücksichtigt oder nicht und ebenso kann man in dem resultierenden Werte

$$\sin \xi = \frac{h}{\Delta} \sin \zeta \sin \zeta_1$$

rechts statt ζ_1 den gemessenen Winkel ζ und links ξ an Stelle von $\sin \xi$ setzen, so daß

$$\xi = \frac{h}{\Delta} \sin \zeta^2, \text{ daher } \zeta_1 = \zeta + \frac{h \sin \zeta^2}{\Delta \operatorname{arc} 1''} \quad \ldots\ldots (1)$$

wird. Kann man sich dabei auch nicht vertikal unter dem Signalkopf S aufstellen, sondern muß einen Standpunkt C (Fig. 243) wählen, so ist wieder die Kenntnis der Zentrierungselemente nötig. Ist d die Horizontaldistanz des Aufstellungspunktes vom Signal, ω der Winkel zwischen dem Signal und dem anzuvisierenden Punkte (Signal links, ω wieder von 0° bis 360° gezählt), so hat man, wenn η, η' die Höhenwinkel bedeuten, also

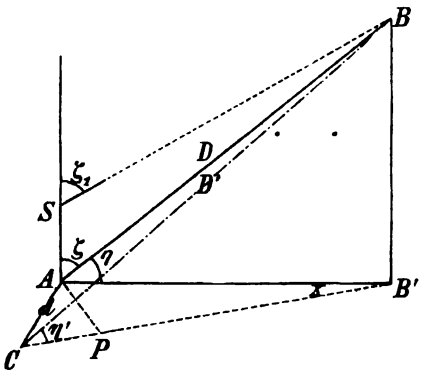


Fig. 243.

$$\eta = 90° - \zeta; \quad \eta' = 90° - \zeta'$$
$$\eta - \eta' = \zeta' - \zeta$$

ist;

$$BB' = D \sin \eta = D' \sin \eta'$$
$$AB' = D \cos \eta, \quad CB' = D' \cos \eta'$$

und aus dem Dreiecke ACB' (für mäßige Distanzen das Dreieck als eben betrachtet), wenn der Winkel $AB'C$ mit x bezeichnet wird und $AP \perp B'C$ gefällt wird:

$$AP = d \sin \omega = AB' \sin x$$
$$CB' = B'P + CP = AB' \cos x + d \cos \omega,$$

somit

$$D \sin \eta = D' \sin \eta'$$
$$D \cos \eta \sin x = d \sin \omega$$
$$D \cos \eta \cos x = D' \cos \eta' - d \cos \omega.$$

Wegen der Kleinheit von d gegenüber D wird der Winkel x sehr klein sein, denn es ist nach der zweiten Gleichung

$$\sin x = \frac{d}{D \cos \eta} \sin \omega$$

und braucht auch nicht gerechnet zu werden; man kann dann, wenn η nicht zu groß ist, $\cos x = 1$ setzen und erhält

$$D \sin \eta = D' \sin \eta'$$
$$D \cos \eta = D' \cos \eta' - d \cos \omega.$$

Multipliziert man hier die erste Gleichung mit $\cos \eta'$, die zweite mit $-\sin \eta'$ und addiert, so folgt

$$D \sin (\eta - \eta') = d \cos \omega \sin \eta'$$

oder

$$D \sin (\zeta' - \zeta) = d \cos \omega \sin (90° - \zeta')$$

und da $\zeta' - \zeta$ nur sehr klein ist, wieder

$$\zeta' - \zeta = \frac{d}{D \operatorname{arc} 1''} \cos \omega \cos \zeta',$$

demnach

$$\zeta = \zeta' - \frac{d}{D \operatorname{arc} 1''} \cos \omega \cos \zeta'$$

oder wenn wieder $D = \frac{\Delta}{\sin \zeta}$ oder genügend genau gleich $\frac{\Delta}{\sin \zeta'}$ eingeführt wird:

$$\zeta = \zeta' - \frac{d}{\Delta \operatorname{arc} 1''} \cos \omega \cos \zeta' \sin \zeta' = \zeta' - \frac{d}{2 \Delta \operatorname{arc} 1''} \cos \omega \sin 2\zeta'.$$

Vereinigt man beide Korrektionen, so wird

$$\zeta_1 = \zeta' - \frac{d}{2 \Delta \operatorname{arc} 1''} \cos \omega \sin 2\zeta' + \frac{h \sin \zeta'^2}{\Delta \operatorname{arc} 1''}.$$

Beispiel: Es sei die Höhe des Signalkopfes über dem Aufstellungspunkte $h = 18{\cdot}5\ m$ und $\Delta = 4{\cdot}58\ km = 4580\ m$; und für den exzentrischen Aufstellungspunkt $d = 6{\cdot}87\ m$, $\omega = 212°\ 24{\cdot}5'$ (d. h. der Aufstellungspunkt jenseits AB' und näher zu B' als der Hauptpunkt A). Die daselbst gemessene Zenitdistanz ist $\zeta' = 82°\ 1'\ 53{\cdot}0''$; so wird

$$\begin{array}{llll} \log \Delta = 3{\cdot}66087 & 2\,\zeta' = 164°\ 3'\ 46'' & \log \text{Korrekt}_1 = 1{\cdot}55463 \\ \log \text{arc } 1'' = 4{\cdot}68557 & 2 \log \sin \zeta' = 9{\cdot}99158 & \log \text{Korrekt}_2 = 2{\cdot}91231 \\ \log \Delta \text{ arc } 1'' = 8{\cdot}34644 & \log h = 1{\cdot}26717 & \end{array}$$

$$\log \frac{1}{\Delta \text{ arc } 1''} = 1{\cdot}65356 \qquad \text{Korrekt}_1 = +\ 35{\cdot}9''$$

$$\log \tfrac{1}{2} d = 0{\cdot}53593 \qquad \text{Korrekt}_2 = +817{\cdot}2''$$

$$\log \cos \omega = 9{\cdot}92647_n$$

$$\log \sin 2\,\zeta' = 9{\cdot}43867$$

$$\zeta_1 = 82°\ 1'\ 53{\cdot}0'' + 35{\cdot}9'' + 13'\ 37{\cdot}2'' = 82°\ 16'\ 6{\cdot}1'',$$

welcher Wert für die weitere Rechnung zu verwenden ist.

106. Eine Korrektion dieser Art wird nötig, wenn man die Zenitdistanz eines in endlicher Entfernung befindlichen Objektes mit dem Sextanten mißt. Geht man zunächst auf Höhen über, so erhält man mit dem Sextanten den Winkel zwischen der Visur nach dem Objekte B und dem Spiegelbilde B_0 (Fig. 244), also $BCB_0 = w = \eta + \eta_1$, da

$$\measuredangle\, y\,CB_0 = x\,EB_0 = x\,EB = \eta_1$$

ist. Nun aber ist

$$\measuredangle\, CBE = BEB_0 - BCB_0 =$$
$$= 2\,\eta_1 - (\eta + \eta_1) = \eta_1 - \eta.$$

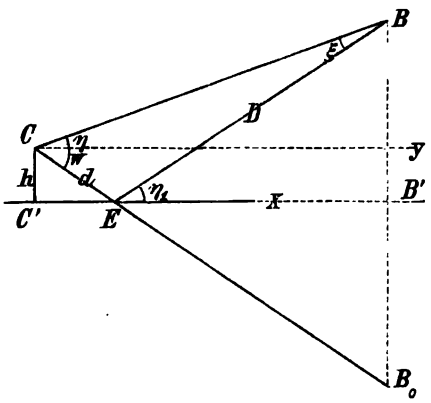


Fig. 244.

Aus den beiden Gleichungen

$$\eta_1 - \eta = \xi; \quad \eta_1 + \eta = w$$

folgt aber

$$\eta = \tfrac{1}{2}(w - \xi).$$

Ist die Distanz $EB = D$, so wird wieder, wenn das Perpendikel von E auf CB gefällt wird, dieses Perpendikel gleich

$$D \sin \xi = d \sin w.$$

Ist die Höhe des Beobachters über dem künstlichen Horizont $CC' = h$ und $C'B' = \Delta$, so wird

$$D = (\Delta - EC') \sec \eta_1,$$

wobei EC', da es nur 1 bis 2 m beträgt, gegenüber der Entfernung EB' auch vernachlässigt werden kann; genauer wird:

$$D = \Delta \sec \eta_1 - EC' \sec \eta_1 = \Delta \sec \eta_1 - d.$$

Ferner ist

$$d = h \operatorname{cosec} \eta_1,$$

demnach

$$\left(\frac{\Delta}{\cos \eta_1} - d\right) \sin \xi = \frac{h}{\sin \eta_1} \sin w$$

und hieraus wieder der kleine Winkel ξ:

$$\xi = \frac{h}{\Delta - d \cos \eta_1} \sin w \cot \eta_1$$

$$= \frac{h}{\Delta} \sin w \cot \eta_1 \left(1 + \frac{d}{\Delta} \cos \eta_1\right)$$

und da η_1 nahe gleich $\frac{1}{2} w$ ist mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung:

$$\xi = \frac{h}{\Delta} \cdot 2 \sin \tfrac{1}{2} w \cos \tfrac{1}{2} w \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} w}{\sin \frac{1}{2} w} = \frac{2h}{\Delta} \cos \tfrac{1}{2} w^2$$

$$\eta = \tfrac{1}{2} w - \frac{h}{\Delta \operatorname{arc} 1''} \cos \tfrac{1}{2} w^2$$

$$H = By + yB' = \Delta \operatorname{tang} \eta + h.$$

Beispiel: Sei $h = 1{\cdot}75\ m$, $\Delta = 3{\cdot}82\ km = 3820\ m$, $w = 26° 14' 25''$, so ist $\frac{1}{2} w = 13° 7' 12{\cdot}5''$,

$\log \cos \frac{1}{2} w$	$= 9{\cdot}98851$	Korrekt	$= -\ 1'\ 29{\cdot}6''$
$\log \cos \frac{1}{2} w^2$	$= 9{\cdot}97702$	$\frac{1}{2} w$	$= 13°\ 7\ 12{\cdot}5$
$\log h$	$= 0{\cdot}24304$	η	$= 13°\ 5'\ 43''$
$\log$ Zähler	$= 0{\cdot}22006$	$\log \operatorname{tang} \eta$	$= 9{\cdot}36665$
$\log \Delta$	$= 3{\cdot}58206$	$\log \Delta$	$= 3{\cdot}58206$
$\log \operatorname{arc} 1''$	$= 4{\cdot}68557$	$\log \Delta \operatorname{tang} \eta$	$= 2{\cdot}94871$
$\log$ Korrekt.	$= 1{\cdot}95243$		
Korrekt.	$= 89{\cdot}6''$	$\Delta \operatorname{tang} \eta$	$= 888{\cdot}60\ m$
		$H = \Delta \operatorname{tang} \eta + h$	$= 890{\cdot}35\ m.$

Für Gestirne wird diese Korrektion wegen $\Delta = \infty$ verschwinden; es ist dann $\eta = \frac{1}{2} w$.

Handelt es sich nur um die Berechnung der Höhe H, so kann man einfacher verfahren; es ist nämlich $H = (\Delta - C'E) \operatorname{tang} \eta_1 = \Delta \operatorname{tang} \eta_1 - C'E \operatorname{tang} \eta_1 = \Delta \operatorname{tang} \eta_1 - h$ und da

$$\eta_1 = \tfrac{1}{2} (w + \xi)$$

ist, so wird:

$$H = \Delta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (w + \xi) - h = \Delta \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} w + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \xi}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} w \operatorname{tang} \frac{1}{2} \xi} - h =$$

$$\Delta (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w + \tfrac{1}{2} \xi) (1 + \tfrac{1}{2} \xi \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w) - h =$$

$$\Delta [\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w + \tfrac{1}{2} \xi (1 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w^2)] - h =$$

$$\Delta \left(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w + \frac{\frac{1}{2} \xi}{\cos \frac{1}{2} w^2}\right) - h = \Delta \left(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w + \frac{h}{\Delta}\right) - h$$

demnach

$$H = \Delta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w.$$

Für die Berechnung der Höhe kann man daher von der Erhöhung des Standpunktes ganz absehen; es kommt dies darauf hinaus, das Dreieck BCB_0 als gleichschenklig mit $CB_0 = CB$ anzusehen. Für das obige Beispiel wird

$$\log \Delta = 3{\cdot}58206$$
$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w = \underline{9{\cdot}36750}$$
$$\log H = 2{\cdot}94956, \quad H = 890{\cdot}34\ m.$$

107. Zur See beobachtet man die Höhe der Gestirne über dem scheinbaren Horizont. Ist der Winkel zwischen der Richtung nach dem Gestirne und der Tangente an die Erdoberfläche w (Fig. 245), x der Winkel zwischen dieser Tangente und dem Erdradius des Beobachtungspunktes P und ist ζ die gesuchte Zenitdistanz, so ist

$$\zeta + w + x = 180°,$$

daher

$$\zeta = 180° - w - x$$

und

$$\sin x = \frac{R}{R+h},$$

wenn R der Erdhalbmesser, h die Höhe des Beobachtungspunktes über der Erdoberfläche ist. $90° - x = \omega$ ist die Kimmtiefe, welche daher bestimmt wird durch

$$\cos \omega = \frac{R}{R+h},$$

woraus man leicht findet

$$1 - \cos \omega = 2 \sin \tfrac{1}{2} \omega^2 = \frac{h}{R+h}$$

oder, da ω sehr klein ist und h gegenüber R vernachlässigt werden kann

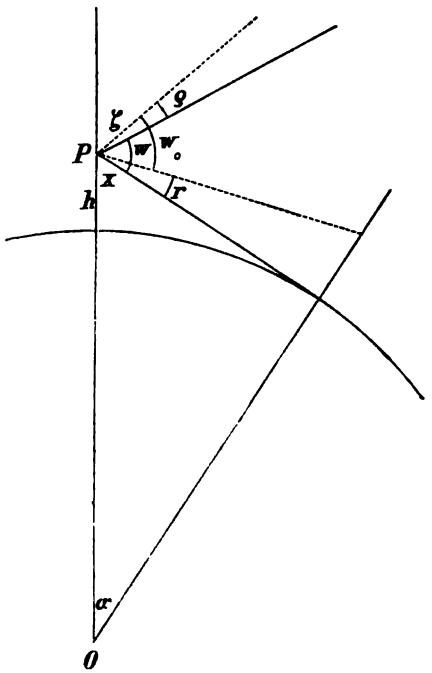


Fig. 245.

$$2 \frac{\omega^2}{4} = \frac{h}{R} \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{1}{\text{arc } 1''} \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Tatsächlich wird aber nicht der Winkel ω beobachtet, sondern der Horizont erscheint infolge der terrestrischen Refraktion gehoben, und zwar um einen Winkel $r = \frac{1}{2} k \omega$ und ebenso erscheint das Gestirn um einen Winkel ϱ gehoben, welchen man die astronomische Refraktion nennt. Ist daher w_0 der beobachtete Winkel, so ist

$$w = w_0 + r - \varrho = w_0 - \varrho + \tfrac{1}{2} k \omega,$$

demnach

$$\zeta = 90° - w + 90° - x = 90° - w_0 + \varrho - \tfrac{1}{2} k \omega + \omega.$$

Führt man hier den Wert

$$90° - w_0 = \zeta_0$$

als „beobachtete Zenitdistanz“ ein, so wird

$$\zeta = \zeta_0 + \varrho + (1 - \tfrac{1}{2} k)\,\omega.$$

Ist der Standpunkt 30 *m* über dem Meeresspiegel und die gemessene Zenitdistanz

$$\zeta_0 = 54° 28' 16'',$$

so wird $\omega = 10' 33''$

$$(1 - \tfrac{1}{2} k)\,\omega = \quad + 9' 52'',$$

daher

$$\zeta = 54° 38' \ 8'' + \varrho,$$

wo ϱ die astronomische Refraktion ist, die besonders berechnet werden muß.

108. Die astronomische Refraktion hängt von der Zenitdistanz und dem Luftzustande ab. Der erste Teil, die mittlere Refraktion, ist gegeben durch

$$\varrho_0 = \alpha \operatorname{tang} \zeta,$$

wo α jedoch selbst mit der Zenitdistanz etwas veränderlich ist. Nach Bessel ist

$$\log \varrho = \log (\alpha \operatorname{tang} \zeta) + A\,(\log B + \log T) + \lambda \log \gamma,$$

wobei α, A, λ von der Zenitdistanz, B vom Barometerstande, T von der Temperatur des Quecksilbers, γ von der Lufttemperatur abhängig ist. Für die strenge Reduktion der Beobachtungen, namentlich in großen Zenitdistanzen, muß nach diesen strengen Formeln gerechnet werden, wobei die Werte von A, α, λ, γ, B, T Tafeln zu entnehmen sind. Kommt es nicht auf die äußerste Genauigkeit an und ist das beobachtete Gestirn dem Horizont nicht zu nahe, so kann man diese Tafeln in derjenigen Form ziemlich einfach verwenden, welche ich in Bd. I der Publikationen der v. Kuffnerschen Sternwarte gab, welche in gekürzter Form in des Verfassers „Lehrbuch der mathematischen Geographie“ wiedergegeben sind. Nach diesen Tafeln wird

mit dem Barometerstande $\log B$
mit dem Thermometerstande* $\log T$
mit der Summe $\log B + \log T = \text{Arg}$

gebildet, und mit diesem Argument und der mittleren Refraktion ϱ_0 die Korrektion δ entnommen und dann ist

$$\varrho = \varrho_0 + \delta.$$

Beispiel: Beobachtet wurde die scheinbare Zenitdistanz 56° 17′ 58·3″; dabei war: Barometerstand 739 *mm*, Temperatur + 17·5°, damit ist

* Strenge genommen, zerfällt log *T* in zwei Teile, die mit dem äußeren Thermometer (Lufttemperatur) und mit dem inneren Thermometer (Quecksilbertemperatur) zu entnehmen sind; bei der hier angestrebten Genauigkeit können dieselben vereinigt werden.

$\log B = -73$	Mittlere Refraktion $\varrho_0 =$	$86{\cdot}4''$
$\log T = -134$	Korrektion	$-4{\cdot}0''$
Arg $= -207$	Wahre Refraktion $\varrho =$	$+1'\,22{\cdot}4''$
	Wahre Zenitdistanz	$56°\,19'\,20{\cdot}7$

109. Das Nivellieren. Der Vorgang beim Nivellieren, das Rektifizieren der Instrumente, wurde bereits in Nr. 54 besprochen; es erübrigt noch die Berücksichtigung des Einflusses der Erdkrümmung und der terrestrischen Refraktion. Ist R der Erdhalbmesser und nivelliert man von dem Punkte A (Fig. 246) gegen den Punkt B hin, in welchem die Nivellierlatte aufgestellt ist, so würde bei horizontaler Visur die in B aufgestellte Latte in C getroffen; allein infolge der terrestrischen Refraktion erscheint im Fernrohr ein Punkt C', der um den Winkel r tiefer liegt; man erhält daher an der Latte einen Höhenunterschied $C'B$ für zwei Punkte A, B, die auf der Erdoberfläche liegen und aus $C'B$ ist $BC = \eta$ zu ermitteln. Der zur Entfernung $AB = \Delta$ gehörige Zentriwinkel ω ist bestimmt durch $\Delta = R\omega$ und es ist

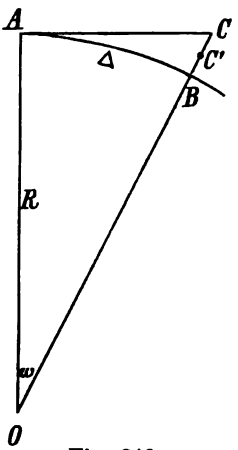


Fig. 246.

$$\cos\omega = \frac{AO}{OC} = \frac{R}{R+\eta},$$

demnach

$$1 - \cos\omega = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{\eta}{R}; \qquad \omega^2 = \frac{2\eta}{R}$$

$$\eta = \frac{R\,\omega^2}{2} = \frac{R^2\,\omega^2}{2\,R} = \frac{\Delta^2}{2\,R}.$$

Der wahre Lattenabschnitt $BC' = \eta'$ ist aber wegen des Refraktionswinkels r kleiner und es ist

$$r = \tfrac{1}{2}k\,\omega \text{ und } CC' = \Delta.r,$$

wenn man CC' als den zum Winkel r gehörigen Bogen mit dem Halbmesser $AC = AB = \Delta$ ansieht, was bei kleinen Zielweiten stets gestattet ist. Damit wird

$$\eta - \eta' = \Delta.\tfrac{1}{2}k\,\omega = \Delta.\tfrac{1}{2}k.\frac{\Delta}{R} = k\,\frac{\Delta^2}{2\,R} = k\,\eta,$$

daher

$$\eta' = \eta - k\,\eta = (1-k)\,\frac{\Delta^2}{2\,R}.$$

Mit $k = 0{\cdot}13$ wird

$$\eta' = 0{\cdot}435\,\frac{\Delta^2}{R}$$

und da $R = 6370{\cdot}3\ km$ ist, so erhält man leicht die folgende kleine Hilfstafel:

$\Delta =$	$\eta =$	$\eta' =$
50 *m*	0·000 *m*	0·000 *m*
100	0·001	0·001
150	0·002	0·002
200	0·003	0·003
250	0·005	0·004
300	0·007	0·006
350	0·009	0·008
400	0·013	0·011
450	0·016	0·014
500	0·020	0·017.

Ergibt sich daher für eine Erhebung die Höhe H über der horizontalen Visur in A,* so ist die Erhebung über die Kugelfläche (Niveaufläche) in B gleich $H + \eta'$. Da η' stets dasselbe Zeichen hat, so wird man, so klein der Wert auch ist, für eine größere Anzahl von Ständen doch eine nicht zu vernachlässigende Korrektion erhalten. Für eine nivellierte Strecke von 10 *km*, bei Zielweiten von durchschnittlich 200 *m*, wozu daher 50 Stände nötig sind, wird die Korrektion

$$\Sigma \eta' = 50 \times 0{\cdot}003 = 0{\cdot}15\ m.$$

110. Distanzmessung und Nivellement mit Benutzung der Tangentenschraube. Sei das Nivellierinstrument in A aufgestellt, die Latte in B (Fig. 247). Das Instrument wird nun mit der Schraube horizontal gestellt (durch Einspielen der rektifizierten Libelle), sodann wird auf die untere Zielscheibe U und auf die obere O eingestellt; die hierbei von dem Instrumente beschriebenen Winkel sind ψ, φ und man erhält den konstanten Lattenabschnitt**

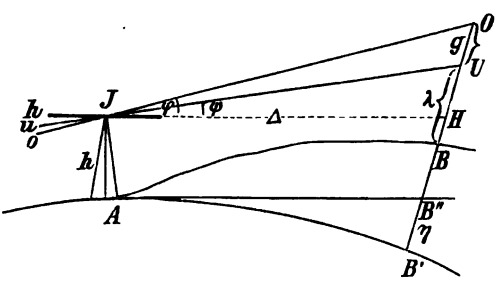


Fig. 247.

$$g = \Delta(\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\psi),$$

wenn Δ die Horizontaldistanz ist. Für diese folgt daher

$$\Delta = \frac{g}{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\psi}.$$

---

* Mit Berücksichtigung dieser Korrektion wird dann das Nivellement mit festem Fernrohr und fester Libelle beziehungsweise die Parallelstellung der Visur zur Libelle (vgl. Nr. 55) folgendermaßen: Seien Instrumentenhöhe und Lattenabschnitt für das Nivellement von A nach B: h, l und für das Nivellement von B nach A: h_1, l_1, so wird die wirkliche Steigung um η größer, das Gefälle um η kleiner als die gelesenen Höhen, also

$$x = h - (l - z) + \eta = (l_1 - z) - h_1 - \eta$$

und daraus

$$x = \tfrac{1}{2}[(h - h_1) - (l - l_1)]$$
$$z = \tfrac{1}{2}[l + l_1) - (h + h_1)] - \eta.$$

** Eigentlich ist $HU = \frac{\Delta \sin\psi}{\sin(\psi + JHU)}$ und ebenso HO; aber da $JHU = 90° + \omega$ und ω nur wenige Bogensekunden, so kann man $HU = \Delta\,\text{tang}\,\psi$ setzen.

Ist nun die eingestellte für das ganze Nivellement konstante Höhe der unteren Zielscheibe vom Boden $UB = \lambda$, die in jedem Stande zu messende Instrumentenhöhe $AJ = h$, so wird die Höhe des Punktes B über der Niveaufläche (d. i. der krummen Fläche AB'):

$$H = BB' = UH + HB'' + B''B' - UB,$$

daher* $$H = \Delta \operatorname{tang} \psi + h + \eta - \lambda.$$

Nennt man den durch das Nivellierinstrument angegebenen Höhenunterschied $UH = H'$, so daß

$$H' = \Delta \operatorname{tang} \psi$$

ist, so wird $$H = H' + h + \eta - \lambda$$

und es ist** $$\Delta = \frac{g \cos \varphi \cos \psi}{\sin (\varphi - \psi)}$$

$$H' = \Delta \operatorname{tang} \psi = \frac{g \operatorname{tang} \psi}{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \psi} = \frac{g \sin \psi \cos \varphi}{\sin (\varphi - \psi)}.$$

Für das Nivellieren aus der Mitte ergibt sich für den Höhenunterschied bei

Visur vor $$H_v = \frac{g \sin \psi \cos \varphi}{\sin (\varphi - \psi)} + h - \lambda + \eta$$

Visur zurück $$H_r = \frac{g \sin \psi_1 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 - \psi_1)} + h - \lambda - \eta_1$$

demnach

$$H = H_v - H_r = g \left[\frac{\sin \psi \cos \varphi}{\sin (\varphi - \psi)} - \frac{\sin \psi_1 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 - \psi_1)} \right] + (\eta + \eta_1),$$

weil die Instrumentenhöhe unverändert bleibt, demnach h sowie λ herausfällt.

Beispiel: Es sei $\lambda = 1{\cdot}0\,m$; $g = 2{\cdot}0\,m$; $h = 1{\cdot}75\,m$ und

	1.	2.
φ	$= 6^\circ\ 21'\ 15''$	$+ 0^\circ\ 5'\ 18''$
ψ	$= 6^\circ\ 4'\ 38''$	$- 0^\circ\ 7'\ 51''$
$\varphi - \psi$	$= 0^\circ\ 16'\ 37''$	$+ 0^\circ\ 13'\ 9''$
$\log \cos \psi$	$= 9{\cdot}99755$	$0{\cdot}00000$
$\log g$	$= 0{\cdot}30103$	$0{\cdot}30103$
$\log \cos \varphi$	$= 9{\cdot}99733$	$0{\cdot}00000$
$\log \sin \psi$	$= 9{\cdot}02477$	$7{\cdot}35859_n$
$\log (g \sin \psi \cos \varphi)$	$= 9{\cdot}32313$	$7{\cdot}65962_n$
$\log \sin (\varphi - \psi)$	$= 7{\cdot}68426$	$7{\cdot}58265$
$\log (g \cos \psi \cos \varphi)$	$= 0{\cdot}29591$	$0{\cdot}30103$
$\log H'$	$= 1{\cdot}63887$	$0{\cdot}07697_n$
$\log \Delta$	$= 2{\cdot}61165$	$2{\cdot}71838$
Δ	$= 408{\cdot}9\,m$	$522{\cdot}8\,m$
H'	$= +43{\cdot}54\,m$	$- 1{\cdot}19\,m$
$h - \lambda + \eta$	$= + 0{\cdot}77$	$+ 0{\cdot}77$
H	$= +44{\cdot}31\,m$	$- 0{\cdot}42\,m.$

** In diesem Falle hat man nicht den wegen Refraktion korrigierten Winkel η', sondern η zu verwenden, da g und λ durch die Refraktion nicht affiziert werden, weil sämtliche Lesungen um denselben Betrag geändert werden.

*** Δ ergibt sich stets positiv; denn ist B höher, so werden φ, ψ positiv und $\varphi > \psi$; liegt aber B tiefer, so sind φ, ψ negativ, also $\varphi = -\varphi'$; $\psi = -\psi'$ und $\varphi' < \psi'$, daher

$$\Delta = \frac{g}{\operatorname{tang} \psi' - \operatorname{tang} \varphi'}; \qquad \psi' > \varphi'.$$

Sind die Winkel φ und ψ sehr klein, also entweder die Entfernungen sehr groß oder die Höhenunterschiede gering, so kann man dieselben ohne Gradbogen durch Lesungen an der Schraube bestimmen. Ist die Schraubenlesung bei horizontaler Visur des Nivellierfernrohres h, wird dann das Fadenkreuz einmal auf die untere und dann auf die obere Zielscheibe eingestellt, wobei die Lesungen u beziehungsweise o sind, so ist

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(h-o)\,R}{f}; \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{(h-u)\,R}{f},$$

wenn f die Brennweite des Objektives, R der Wert einer Schraubenrevolution (in derselben Einheit wie f) ist und die Schraube in einer vertikalen Bohrung das sich darauf stützende Instrument (vgl. die Fig. 152 bis 156) hebt und senkt. Dann folgt sofort:

$$H' = g\,\frac{h-u}{u-o}$$

$$\Delta = g\,\frac{f}{(u-o)\,R} = \frac{K}{u-o}\cdot g,$$

wenn

$$\frac{f}{R} = K$$

gesetzt wird. Wäre z. B. $f = 150\ mm$, $R = 0{\cdot}5\ mm$, so wäre $K = 300$.* Sei mit diesem Instrumente mit $g = 2\ m$, $\lambda = 1\ m$, $h = 1{\cdot}80\ m$ beobachtet:

$$h = 9{\cdot}59, \quad u = 3{\cdot}47, \quad o = 1{\cdot}62,$$

so wird

$$H' = 6{\cdot}62\ m, \quad H = 7{\cdot}42\ m; \quad \Delta = \frac{600}{1{\cdot}85} = 324\ m.$$

Die ursprüngliche Stampfersche Schraube war aber keine Tangentenschraube, sondern nach Art der Fig. 10 gelagert, also eigentlich eine Sehnenschraube: die Differenz der Lesungen $s' = o - u$, $s = h - o$, mißt die Sehnen. Da aber für jeden Winkel x:

$$x = \sin x + \tfrac{1}{6}\sin x^3 + \ldots$$

$$\operatorname{tang} x = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin x^3 + \ldots = 2\sin\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2}^3 + \ldots$$

ist, so würde

$$\operatorname{tang}\varphi = s + \frac{3}{8}s^3 \ldots \qquad \operatorname{tang}\psi = s' + \frac{3}{8}s'^3 + \ldots$$

Statt dessen nimmt Stampfer eine empirische Formel:**

$$\operatorname{tang}\varphi = a\,(h-o) + b\,(h-o)^2 + c\,(h-o)^3 + \ldots$$
$$\operatorname{tang}\psi = a\,(h-u) + b\,(h-u)^2 + c\,(h-u)^3 + \ldots$$

---

* Die Bestimmung von K erfolgt aber nicht durch Messung von f und R, sondern durch Messung einer genau bekannten Distanz mittels des Instrumentes; es ist nämlich

$$K = \frac{\Delta}{g}\,(u-o)$$

und ist hier Δ und g bekannt, o und u beobachtet, so erhält man K.

** Vgl. z. B. Hartner, Handbuch der niederen Geodäsie, herausgegeben von Wastler, S. 727.

aus welcher sich dann eine ziemlich komplizierte Formel für die Berechnung von Δ und H ergibt, deren Anwendung durch Tafeln, welche für jedes Instrument mit den ihm zugehörigen Konstanten berechnet werden müssen, erleichtert werden kann.

111. Barometrisches Höhenmessen. Bei dem Quecksilberbarometer hat man sich dieses als den einen Schenkel zweier kommunizierender Röhren zu denken, dessen zweiter Schenkel eine andere Flüssigkeit, die Luft, enthält. Die Höhe der Quecksilbersäule in dem einen Schenkel, dem Barometerrohr, wird so hoch sein, daß ihr Druck auf jede Fläche, z. B. die Flächeneinheit, gerade so groß ist wie der Druck der in dem anderen (gedachten) Schenkel d. h. über der freien Quecksilberoberfläche befindlichen Luftsäule. Je niedriger diese ist, d. h. je höher man sich über dem Meeresniveau erhebt, desto niedriger wird auch die Quecksilbersäule, d. h. das Barometer fallen müssen. Nun wiegt 1 dm^3 Luft in der Seehöhe 1·293 g; das Gewicht einer Luftsäule von 10·5 m = 105 dm Höhe und 1 cm^2 = 0·01 dm^2 Querschnitt, also 1·05 dm^3 Volumen ist gleich 1·358 g; um diesen Betrag nimmt der Luftdruck ab, wenn man sich um 10·5 m erhebt, da der Druck dieser untersten Luftsäule von 10·5 m weniger vorhanden ist. Ist aber die Quecksilbersäule um 1 mm niedriger, so ist der Druck auf 1 cm^2 Fläche um das Gewicht eines kleinen Prismas oder Zylinders von Quecksilber von 1 mm = 0·1 cm Höhe und 1 cm^2 Querschnitt, also von 0·1 cm^3 Volumen kleiner. Da das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13·59 g pro cm^3 ist, so wiegt 0·1 cm^3 Quecksilber 1·359 g, also gerade so viel, wie die auf demselben Querschnitt stehende Luftsäule von 10·5 m Höhe. Erhebt man sich daher um 10·5 m über dem Meeresniveau, so fällt das Barometer um 1 mm.

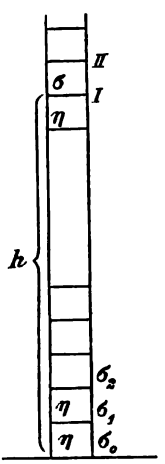


Fig. 248.

Dieses gilt aber nur in der Höhe des Meeresniveaus selbst; steigt man höher, so wird die Luft weniger dicht und das Gewicht von 1·359 g einer 1 mm hohen Quecksilbersäule von 1 cm^2 Querschnitt wird erst durch eine höhere Luftsäule erhalten; man muß sich daher höher erheben, damit das Quecksilber um 1 mm sinkt.

Teilt man die Luftsäule in Schichten von gleicher Höhe η (Fig. 248) und sind in den einzelnen Säulchen von der Höhe η die spezifischen Gewichte der Luft $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots$, so hat man

an der Meeresfläche: Druck p_0, Barometerstand b_0, Dichte der Luft σ_0
um η höher: „ p_1, „ $b_0 - x$, „ „ „ σ_1

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0 p_1}{p_0}.$$

Sei in einem höher gelegenen Punkte, in der Höhe $h = n\eta$ das spezifische Gewicht der Luft σ, so wird einer Luftsäule von ηm Höhe eine Quecksilbersäule von $\beta = \frac{\eta\sigma}{s}$, das Gleichgewicht halten, wenn $s = 13{\cdot}59$ das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist. Ist der Luftdruck an der Stelle I

durch eine Quecksilbersäule von der Höhe b gemessen, so wird die Quecksilbersäule an der Stelle II kleiner, nämlich $b' = b - \beta = b - \frac{\eta\sigma}{s}$.

σ ist aber veränderlich, vom Drucke selbst abhängig, und zwar ist nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze:

$$\sigma : \sigma_0 = b : b_0,$$

wo $\sigma_0 = 1{\cdot}293\,g$ pro dm^3, das spezifische Gewicht der Luft für den Barometerstand $b_0 = 760\,mm$ ist. Daraus folgt

$$\sigma = \frac{b}{b_0}\,\sigma_0,$$

demnach

$$b' = b - \eta\,\frac{b}{b_0}\,\frac{\sigma_0}{s} = b\left(1 - \frac{\sigma_0}{s}\,\frac{\eta}{b_0}\right) = Kb,$$

wenn

$$K = 1 - \frac{\sigma_0}{s}\,\frac{\eta}{b_0}$$

gesetzt wird. Nachdem vorausgesetzt wurde, daß die Luftsäule vom Meeresniveau in gleichen Schichten von der Höhe η geteilt wurde, so sind die Barometerstände in den einzelnen Teilungspunkten, u. zw.

am Meeresniveau: b_0

um η höher: $b_1 = b_0\left(1 - \frac{\sigma_0}{s}\,\frac{\eta}{b_0}\right) = b_0\,K$

um 2η höher: $b_2 = b_1\left(1 - \frac{\sigma_0}{s}\,\frac{\eta}{b_0}\right) = b_1\,K = b_0K^2$

. . . . .

in der Höhe $h = n\eta : b_n = b_0K^n$.

Die Barometerstände nehmen daher in geometrischer Progression ab, wenn die Höhen in arithmetischer Progression zunehmen. Will man n in Metern haben, so muß $\eta = 1\,m$ angenommen werden; da $\frac{\sigma_0}{s}$, $\frac{\eta}{b_0}$ bloße Verhältniszahlen sein müssen, so müssen σ_0 und s (bezogen auf dieselbe Volumseinheit, z. B. dm^3) in derselben Einheit angenommen werden, ebenso η und b_0: es ist also, da $\eta = 1\,m$ angenommen wurde, $b_0 = 0{\cdot}76\,m$ und

$$\frac{\sigma_0}{s} = \frac{1{\cdot}293\,g}{13590\,g} = \frac{0{\cdot}001293\,g}{13{\cdot}59\,g}$$

und es wird

$$\log(\sigma_0 : s) = 5{\cdot}97838$$
$$\log(\eta : b_0) = 0{\cdot}11919$$
$$K = 1 - 0{\cdot}0001252 = 0{\cdot}9998748.$$

Dann wird

$$n \log K = \log b_n - \log b_0$$
$$n = \frac{\log b_n - \log b_0}{\log K}$$

oder, da K ein echter Bruch ist, wenn man $\frac{-1}{\log K} = C$ setzt

$$n = C(\log b_0 - \log b_n).$$

Mit dem oberen Werte für K wird

$$\log K = 9{\cdot}9999460 - 10$$
$$= - 0{\cdot}0000540,$$

daher
$$C = \frac{1}{0{\cdot}0000540} = 18520$$

112. Genauere Formeln. Diese Bestimmung gibt aber nur einen genäherten Begriff von dem Werte von C; denn erstens wurden hier selbst mit siebenstelligen Logarithmen nur drei Stellen (540) in K erhalten; anderseits aber ist die Annahme, daß die Änderung der Dichte sprungweise mit jedem Meter stattfindet, nicht korrekt. Eigentlich müßte η unendlich klein angenommen werden und die Zahl der Schichten unendlich groß.*

---

* Man kann korrekter schreiben: die Abnahme des Barometerstandes (Quecksilberhöhe) $b' - b$ und die Zunahme der Höhe (Luftsäule) $h - h'$ sind umgekehrt proportional den Dichten s und σ von Quecksilber und Luft, also

$$b' - b : h - h' = \sigma : s.$$

Dies gilt auch für unendlich kleine Änderungen von b und h, daher auch für Differentiale, so daß

$$db = - \frac{\sigma}{s} dh$$

ist. s ist wohl konstant, nicht aber σ; es ist aber nach dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz

$$\sigma = \frac{\sigma_0 b}{b_0 (1 + \alpha t)}$$

daher

$$db = - \frac{\sigma_0}{s b_0} \frac{b\, dh}{1 + \alpha t}.$$

Eine Schwierigkeit liegt nun in der Unkenntnis des Gesetzes der Temperatur der Luft in verschiedenen Höhen und eine der Hauptaufgaben der wissenschaftlichen Ballonfahrten ist die Erforschung des Gesetzes der Temperaturabnahme mit der Höhe. Schreibt man genähert an Stelle des veränderlichen t ein mittleres $t = \frac{1}{2}(t_0 + t_1)$, wobei t_0 die Temperatur des tiefsten, t_1 diejenige des höchsten Punktes ist (d. h. die Temperaturen an den beiden Orten, deren Höhenunterschied man finden will), so folgt, da

$$\frac{s b_0}{\sigma_0} \left(1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2}\right) = N$$

konstant ist:

$$N \frac{db}{b} = - dh$$

und daraus durch Integration

$$N(\log_n b - \log_n b_0) = - h$$

oder da

$$\log_n A = \frac{\log A}{\log e}$$

ist:

$$h = \frac{s}{\sigma_0} \frac{b_0}{\log e} \left[1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2}\right] (\log b_0 - \log b),$$

Man erhält dann

$$h = C\,[1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(t_0 + t_1)]\,(\log b_0 - \log b_1),$$

wo α der Ausdehnungskoeffizient der Gase = 0·00367 und C eine Konstante ist, und b_0, t_0 Barometerstand und Temperatur am tiefer gelegenen, b_1, t_1 am höher gelegenen Orte sind. Diese Formel erfordert noch einige Korrektionen: wegen der Veränderlichkeit der Schwerkraft mit der Höhe und mit der geographischen Breite, wegen der Temperatur des Quecksilbers und wegen Luftfeuchtigkeit. Auf diese Korrektionen kann hier nicht Rücksicht genommen werden.* Auch der Koeffizient C bestimmt sich verschieden, wenn man ihn theoretisch** oder aus Beobachtungen ermittelt. Werden nämlich Barometerbeobachtungen gleichzeitig mit Temperaturbestimmungen usw. an zwei Orten gemacht, deren Höhenunterschied bekannt ist, so kann daraus C berechnet werden. Berücksichtigt man übrigens die angegebenen Umstände dadurch, daß man für dieselben mittlere Werte annimmt, so folgt die folgende Formel:***

$$h = 18460\,[1 + 0{\cdot}001835\,(t_0 + t_1)]\,(\log b_0 - \log b_1),$$

wobei b_0, b_1 die auf 0° Quecksilbertemperatur reduzierten Barometerstände sind† und $\log 18460 = 4{\cdot}26623$, $\log 0{\cdot}001835 = 7{\cdot}2635$.

Beispiel: Zwei Beobachter fanden an zwei Stationen, deren Höhenunterschied zu bestimmen ist, bei gleichzeitiger Beobachtung:

$(b_0) = 742{\cdot}8\,mm$, $t_0 = +\,15{\cdot}6°$
$(b_1) = 617{\cdot}3\,mm$, $t_1 = +\,8{\cdot}4°$

Punkt	unten	oben
$\log \gamma$	6·2589	6·2589
$\log t$	1·1931	0·9243
$\log \gamma t$	7·4520	7·1832
$\log (1 + \gamma t)$	0·00123	0·00066
$\log (b)$	2·87087	2·79050
$\log b$	2·86964	2·78984

$\Delta = \log b_0 - \log b_1 = 0{\cdot}07980$

$\log (t_0 + t_1) = 1{\cdot}3802$
$\log \beta$ 7·2635
$\log \beta\,(t_0 + t_1)$ 8·6437

$\log [1 + \beta\,(t_0 + t_1)]$ 0·01871
$\log C$ 4·26623
$\log \Delta$ 8·90200
$\log h$ 3·18694
$h = 1538\,m$

---

wobei $\log e = 0{\cdot}434294$ ist. Es ist daher mit dem Werte

$$C = \frac{s\,b_0}{\sigma_0 \log e} \qquad h = C\,[1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(t_0 + t_1)]\,(\log b_0 - \log b)$$
$$\alpha = 0{\cdot}00367.$$

Für die Berechnung des Koeffizienten hat man

$\log (s : \sigma_0) = 4{\cdot}02162$
$\log b_0 = 9{\cdot}88081$ $\quad (b_0 = 0{\cdot}76\,m)$
$\log (\log e) = 9{\cdot}63778$
$\log C = 4{\cdot}26465$, $\quad C = 18393.$

* Vgl. z. B. Bauernfeind „Elemente der Vermessungskunde", II. Bd., S. 425.

** Untersuchungen hierüber wurden von Legendre, Gauss, Regnault, Bauernfeind u. a. angestellt.

*** Bauernfeind, l. c. S. 439.

† Diese ergeben sich mit dem kubischen Ausdehnungskoeffizienten $\gamma = 0{\cdot}0001815$ ($\log \gamma = 6{\cdot}2589$) des Quecksilbers

$$b_0 = \frac{(b_0)}{1 + \gamma t_0};\quad b_1 = \frac{(b_1)}{1 + \gamma t_1},$$

wobei (b_0), (b_1) die beobachteten Barometerstände sind.

Sieht man von der Temperaturkorrektion ab, so kann man nach der Formel

$$h = C(\log b_0 - \log b)$$

für verschiedene b die zugehörigen Seehöhen rechnen. Auch die Anbringung der Korrektionen kann durch Hilfstafeln erleichtert werden. Solche „hypsometrische Tafeln" wurden von Gauss,* Jelinek,** Rühlmann,*** Bauernfeind† u. a. gegeben. Im Anhange ist eine Tafel gegeben, welche die mittlere Seehöhe mit der Konstanten $C = 18400$ unter Annahme des Barometerstandes $b_0 = 760$ *mm* für die fortschreitenden Werte von b und die Korrektionen wegen Temperatur, geographische Breite und Seehöhe in einer für die meisten Zwecke völlig ausreichenden Genauigkeit gibt.

113. Beobachtungen eines einzigen Beobachters. Die bisherigen Reduktionsmethoden setzen voraus, daß auf jeder der beiden Stationen ein Beobachter beobachtet und daß die Beobachtungen der Barometerstände und der Temperatur gleichzeitig vorgenommen werden. Oft wird dies nicht möglich: ein einziger Beobachter soll aus den Veränderungen des Barometerstandes auf die Höhenänderung schließen. Korrekt würde dies nur, wenn die Voraussetzung erfüllt wäre, daß das Barometer an demselben Orte einen unveränderten Stand behielt. Dieses ist jedoch nicht der Fall. Das Barometer ist periodischen Schwankungen ausgesetzt, und zwar jährlichen und täglichen. Am selben Tage fällt es vom Morgen bis zum Mittag und steigt am Nachmittag wieder bis zum Abend. Zu diesen periodischen Schwankungen gesellen sich die unregelmäßigen, welche durch Luftdruckänderungen infolge der Windrichtung und Feuchtigkeit auftreten. Unternimmt daher ein Beobachter Höhenmessungen mit dem Barometer, so muß er die Änderung des Barometerstandes am selben Orte kennen; diese erlangt er, wenn sich die Beobachtungen nur auf einen halben Tag (Vor- oder Nachmittag) erstrecken, wenigstens genähert, wenn er vor dem Verlassen seines Aufenthaltsortes und nach der Rückkehr zu diesem den Barometerstand daselbst notiert und eine etwaige Änderung der Zeit proportional verteilt.

Beispiel:

						Korrektion	korrigierte Lesung
Sept. 1.	7^h	30^m	Vorm.	Ausgangspunkt	779 *mm*	— 1·25 *mm*	727·75 *mm*
	9	45	„	Reinfalzalm	$732\frac{2}{3}$	— 0·89	681·78
	10	40	„	Hütteneckalm	$715\frac{1}{2}$	— 0·75	664·75
	1	0	„	„	$714\frac{3}{4}$	— 0·42	664·33
	2	0	„	Reinfalzalm	732	— 0·26	681·74
	3	45	„	Ausgangspunkt	$777\frac{3}{4}$	0·00	727·75

Die Gesamtänderung betrug hier in 8 Stunden 15 Minuten — 1·25 *mm*, daher pro Stunde 0·15 *mm*, womit die Korrektionen in der vierten Kolonne resultieren.

* Gehlers physikalisches Wörterbuch, V. Bd.

** Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen, 2. Aufl., Wien 1876.

*** Die barometrische Höhenmessung, Leipzig, 1870.

† Elemente der Vermessungskunde, II. Bd., S. 645.

Die Höhe des Ausgangspunktes war 479 *m*; da $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ etwa 17·5° war, welchem Werte nach Tafel IV*B* der Faktor $1 + s_1 = 1{\cdot}065$ entspricht, so wird der wegen Temperatur korrigierte, für Tafel IV*A* zu berücksichtigende Wert $479 : 1{\cdot}065 = 449{\cdot}8$ *m*, welchem nach Tafel IV*A* ein mittlerer Barometerstand von 718·4 *mm* entspricht; hieraus folgt, daß alle Lesungen (sechste Kolonne) um — 9·35 *mm* zu korrigieren sind, so daß der Reinfalzalm ein korrigierter Barometerstand von $\frac{1}{2}(681{\cdot}78 + 681{\cdot}74) - 9{\cdot}35 = 672{\cdot}41$ entspricht, womit eine Seehöhe von $978{\cdot}5 \,.\, 1{\cdot}065 = 1042{\cdot}1$ folgen würde. Da die Höhe der Reinfalzalm 1020 *m* ist, so ergibt sich ein Fehler der barometrischen Messung von — 22·1 *m*. In dieser Weise wurden auch alle übrigen Fehler, die auf S. 141 angegeben sind,* erhalten.

Der geringe Fehler der barometrischen Höhenmessung ist hier jedoch mehr zufällig, um so mehr, als die Temperaturangaben nur genähert berücksichtigt wurden. Die Fehler können auch bedeutend ansteigen, so daß das barometrische Höhenmessen nur dann anzuwenden ist, wo andere Methoden nicht in Betracht gezogen werden können.

E. Die Berechnungen.

114. Vorbemerkungen. Eigentlich gehören die sämtlichen Reduktionen der Beobachtungen, wie sie in der vorigen Nummer auseinandergesetzt wurden, schon zu den Berechnungen. Doch bezeichnet man vorzugsweise als „Berechnungen" diejenigen Operationen, welche dazu dienen, aus einer gemessenen oder einer der Triangulation entnommenen Länge die sämtlichen Stücke einer Vermessung: die nicht direkt gemessenen Seiten oder Winkel, ferner die Orientierung des Netzes, also die Azimute der einzelnen Seiten zu ermitteln.

Während die Reduktionen der Beobachtungen zumeist mit fünfstelligen, unter Umständen sogar mit vierstelligen Logarithmen gerechnet werden können, sind für die folgenden Rechnungen mindestens sechsstelllge Logarithmen, unter Umständen auch siebenstellige zu verwenden. Um hierbei den wiederholten Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen, wenn es sich um den Logarithmus einer Summe handelt, zu vermeiden, dienen die Additions- und Subtraktionslogarithmen, welche von Gauß eingeführt, daher auch mitunter als Gaußsche Logarithmen bezeichnet werden. Sie sind verschieden angeordnet; die wichtigsten Typen sind:

1. Siebenstellige Logarithmen von Th. Wittstein, Hannover 1866. Sie geben in zwei Kolonnen für eine Zahl n:

$$\log n = A,\ \log (n + 1) = B$$

oder für

$$(n + 1) = n_1,\ n = n_1 - 1;\quad \log n_1 = B,\ \log (n_1 - 1) = A.$$

Sucht man daher für $a > b$:

$$\log a - \log b = A,$$

* Mit Benutzung anderer Tafeln; die hier berechneten Tafeln geben die Unterschiede — 26·4, — 22·1, — 2·7, — 25·2 und — 20·6 *m*.

so wird

$$n = \frac{a}{b};\ \log(a+b) = \log\left[b\left(1+\frac{a}{b}\right)\right] = \log b + \log(1+n) = \log b + B$$

Beispiel:

$\log a = 9{\cdot}8628574^*$
$\log b = 9{\cdot}3510968 \qquad A = 0{\cdot}5117606$
$B = 0{\cdot}6282951$ (mit dem Argumente A aufgeschlagen)
$\log(a+b) = 9{\cdot}9793919$

oder

$\log a = 9{\cdot}3510968$
$\log b = 9{\cdot}8628574 \qquad A = 9{\cdot}4882394$
$B = 0{\cdot}1165345$ (mit dem Argumente A aufgeschlagen).
$\log(a+b) = 9{\cdot}9793919$

Für die Subtraktion wird $a > b$ vorausgesetzt:

$$\log a - \log b = B$$

$$n_1 = \frac{a}{b};\ \log(a-b) = \log\left[b\left(\frac{a}{b}-1\right)\right] = \log b + \log(n_1 - 1) = \log b + A.$$

Beispiel:

$\log a = 0{\cdot}8274135$
$\log b = 0{\cdot}2183562 \qquad B = 0{\cdot}6090573$
$A = 0{\cdot}4864261$ (mit dem Argumente B aufgeschlagen).
$\log(a-b) = 0{\cdot}7047823$

Bei großen Werten von A ist auch B sehr groß; für die Addition ergibt sich daraus keine Unbequemlichkeit, da man die erste Hälfte der Tafel ($n < 1$) verwenden kann. Für die Subtraktion wird man besser die Differenz $B - A$ interpolieren.

2. Sechsstellige Additions- und Subtraktionslogarithmen in Bremikers „Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit sechs Dezimalen, neu bearbeitet von Th. Albrecht, Berlin 1883". Bis $A = 0{\cdot}250$, $B = 0{\cdot}444$ ist dieselbe Anordnung wie in 1. Von hier ab wird

$$C = A - B = \log\frac{n}{n+1} = \log\frac{n_1 - 1}{n_1} = \log\left(1 - \frac{1}{n_1}\right)$$

mit dem Argument B tabuliert; es ist daher für $\frac{a}{b} = n_1 > 1$:

$$\log a - \log b = B;\ \log(a-b) = \log\left[a\left(1-\frac{b}{a}\right)\right] = \log a + \log\left(1-\frac{1}{n_1}\right)$$

$$\log(a-b) = \log a + C.$$

---

* Man schreibt jetzt allgemein keine negative Charakteristik, sondern statt deren die Ergänzung auf — 10, also z. B. $8{\cdot}62745$ statt $0{\cdot}62745 - 2$; eigentlich sollte man daher schreiben $8{\cdot}62745 - 10$; die Ergänzung — 10 bleibt weg; ein Irrtum ist daraus nicht zu befürchten. In französischen Werken kommt statt dessen auch die Schreibweise $\bar{2}{\cdot}62745$, d. i. $0{\cdot}62745 - 2$ vor.

Beispiel:

$\log b = 0{\cdot}218356$
$\log a = 0{\cdot}827413 \qquad B = 0{\cdot}609057$
$C = 9{\cdot}877369$ (mit dem Argument B entnommen).
$\log (a - b) = 0{\cdot}704782$

3. Fünfstellige Additions- und Subtraktionslogarithmen in den „Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit fünf Dezimalen von Th. Albrecht, Berlin 1884". Anordnung wie bei den früheren, jedoch gilt die Tafel der A und B in etwas weniger praktischer Weise bis $A = 2{\cdot}000$, $B = 2{\cdot}004$.

4. Tafeln der Additions- und Subtraktionslogarithmen für sieben Stellen von J. Zech, Berlin 1863", in denen die Anordnung eine andere ist.

Für die Addition ist

$$a > b,\ \frac{a}{b} = n > 1 : A = \log n,\ B = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

daher

$$\log a - \log b = A;\ \log (a + b) = \log\left[a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right] = \log a + B.$$

Für die Subtraktion ebenfalls

$$a > b,\ \frac{a}{b} = n > 1;\ A = \log n,\ B = \log \frac{n}{n-1}$$

oder für

$$\frac{n}{n-1} = n_1,\ n = \frac{n_1}{n_1 - 1} : B = \log n_1,\ A = \log \frac{n_1}{n_1 - 1},$$

daher

$$\log a - \log b = A,\ \log (a - b) = \log a - B$$

oder

$$\log a - \log b = B,\ \log (a - b) = \log a - A.$$

Das Argument schreitet bis $A = B$ vor, d. h. bis $n = \frac{n}{n-1}$ oder $n = 2$. Zwischen $A = 0$ und $A = \log 2 = 0{\cdot}30103$ wird die erste Form, von $n = 2$, bis ∞, d. h. $B = \log 2 = 0{\cdot}30103$ bis ∞ die zweite angewendet.

115. Die Triangulation. Aus einer bekannten Länge und zwei Winkeln kann man durch Auflösen von Dreiecken, die hier als eben anzusehen sind, die anderen Stücke des Dreieckes rechnen. Da in dieser Art jeder Punkt des Aufnahmsgebietes durch Berechnung von Dreiecken ermittelt werden kann, so führt diese Methode auf eine Überziehung des ganzen Aufnahmsgebietes mit einem Netz von Dreiecken, in welchem, von einem Dreiecke zum andern fortschreitend, die sämtlichen Entfernungen erhalten werden. Die Orientierung des Netzes erfolgt durch Messung eines Azimutes.

Zu dieser Auflösung von Dreiecken gehört auch die sogenannte „mittelbare Längenmessung", die schon früher erwähnt war: die Länge einer unzugänglichen Geraden durch Messung einer anderen Geraden (Basis) und einer entsprechenden Zahl von Winkeln zu ermitteln.

Sei a (Fig. 249) die gemessene oder durch frühere Rechnungen bekannte Seite und β, γ die gemessenen Winkel, so erhält man die übrigen Stücke nach den Formeln der ebenen Trigonometrie:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

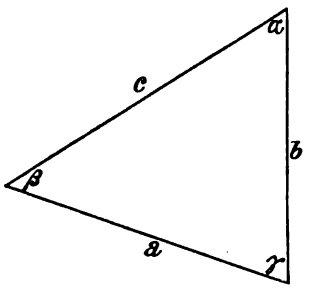


Fig. 249.

Beispiel:

$a = 341{\cdot}67\,m$ $\beta = 44° 29' 38{\cdot}5''$
$\gamma = 72° 46' 54{\cdot}2''$
$\alpha = 62° 43' 27{\cdot}3''$

$\log \sin \alpha = 9{\cdot}948809$ $\log c = 2{\cdot}564885$
$\log a = 2{\cdot}533607$ $\log b = 2{\cdot}430414$
$\log \sin \gamma = 9{\cdot}980087$ $c = 367{\cdot}185\,m$
$\log (a : \sin \alpha) = 2{\cdot}584798$ $b = 269{\cdot}410\,m$
$\log \sin \beta = 9{\cdot}845616$

116. Das Rückwärtseinschneiden. Gegeben sind die drei Punkte A, B, C ihrer Lage nach, d. h. die Entfernungen a, b und der eingeschlossene Winkel C; beobachtet wurden die Winkel μ, ν; es ist die Lage des Punktes D zu bestimmen.

Man hat mit den aus Fig. 250 folgenden Bezeichnungen:

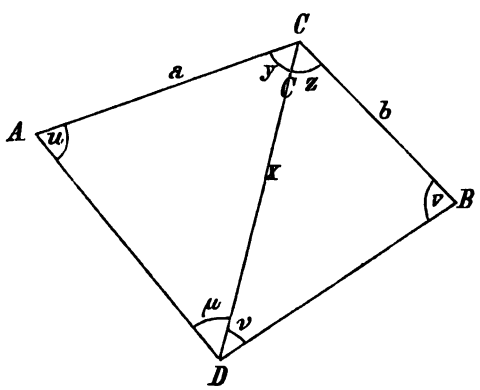


Fig. 250.

$$x = a \frac{\sin u}{\sin \mu} = b \frac{\sin v}{\sin \nu}$$

$$\frac{u+v}{2} = \frac{360° - (C+\mu+\nu)}{2} = M.$$

Da nun

$$\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{b}{a} \frac{\sin \mu}{\sin \nu} = m$$

und daraus

$$\frac{\sin u + \sin v}{\sin u - \sin v} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(u+v) \cos \frac{1}{2}(u-v)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-v) \cos \frac{1}{2}(u+v)} = \frac{m+1}{m-1},$$

folglich

$$\operatorname{tang} \frac{u-v}{2} = \frac{m-1}{m+1} \operatorname{tang} M$$

ist, so wird hieraus

$$\frac{u-v}{2} = N$$

bekannt, folglich

$$u = M + N, \quad v = M - N$$
$$y = 180° - (u + \mu); \quad z = 180° - (v + \nu)$$

und x mittels u oder v. Zur Berechnung von $m+1$ und $m-1$ kann man sich der Additions- und Subtraktionslogarithmen bedienen oder man setzt

$$m = \frac{b \sin \mu}{a \sin \nu} = \operatorname{tang} \eta,$$

wodurch

$$\frac{m-1}{m+1} = \frac{\operatorname{tang} \eta - 1}{\operatorname{tang} \eta + 1} = \frac{\sin \eta - \cos \eta}{\sin \eta + \cos \eta} = \frac{\cos (90° - \eta) - \cos \eta}{\cos (90° - \eta) + \cos \eta} =$$

$$= - \operatorname{tang} (45° - \eta),$$

daher

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (u - v) = - \operatorname{tang} (45° - \eta) \operatorname{tang} M.$$

Beispiel: $a = 424{\cdot}75\ m$, $b = 835{\cdot}62\ m$

$C =$	$215° 26' 17{\cdot}5''$
$\mu =$	$39\ 21\ 25{\cdot}8$
$\nu =$	$65\ 38\ 13{\cdot}2$
$360° - (C + \mu + \nu) =$	$39\ 34\ 3{\cdot}5$
$M =$	$19\ 47\ 1{\cdot}7$

$\log b =$	$2{\cdot}922009$
$\log \sin \mu =$	$9{\cdot}802194$
$\log a =$	$2{\cdot}628133$
$\log \sin \nu =$	$9{\cdot}959495$
$\log b \sin \mu =$	$2{\cdot}724203$
$\log a \sin \nu =$	$2{\cdot}587628$
$\log m =$	$0{\cdot}136575$
$\log (m+1) =$	$0{\cdot}374664$
$\log (m-1) =$	$9{\cdot}567663$

$\log \frac{m-1}{m+1} =$	$9{\cdot}192999$
$\log \operatorname{tang} M =$	$9{\cdot}555944$
$\log \operatorname{tang} N =$	$8{\cdot}748943$
$N =$	$3° 12' 38{\cdot}8''$
$M =$	$19\ 47\ 1{\cdot}7$
$u =$	$22° 59' 40{\cdot}5''$
$v =$	$16\ 34\ 22{\cdot}9$
$y =$	$117\ 38\ 53{\cdot}7$
$z =$	$97\ 47\ 23{\cdot}9$

$\log \frac{a}{\sin \mu} =$	$2{\cdot}825939$
$\log \sin u =$	$9{\cdot}591781$
$\log \frac{b}{\sin \nu} =$	$2{\cdot}962514$
$\log \sin v =$	$9{\cdot}455206$
$\log x =$	$2{\cdot}417720$
$x =$	$261{\cdot}65\ m.$

117. Das Problem der vier Punkte (Hansens Problem). Sei die Entfernung $AB = a$ bekannt und die Winkel α_1, β_1, α_2, β_2 (Fig. 251) gemessen; es ist die Lage der Punkte C, D gegen A, B zu bestimmen. Setzt man $CD = x$, so erhält man die Seiten y, z aus dem Dreiecke ACD; y', z' aus dem Dreiecke BCD und dann AB aus dem Dreiecke ABC oder ABD.* Man erhält:

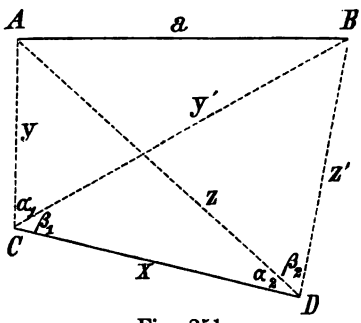


Fig. 251.

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2)} = m;$$

$$\frac{y'}{x} = \frac{\sin (\alpha_2 + \beta_2)}{\sin (\beta_1 + \alpha_2 + \beta_2)} = n$$

und

$$a^2 = y^2 + y'^2 - 2\, y y' \cos \alpha_1,$$

* Man braucht daher nur y und y' oder z und z'; die doppelte Rechnung gibt eine erwünschte Kontrolle.

daher

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y'}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y'}{x}\right)\cos\alpha_1,$$

folglich

$$a = xM, \text{ wobei } M = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha_1}$$

oder

$$\frac{z}{x} = \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2)} = p; \qquad \frac{z'}{x} = \frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 + \alpha_2 + \beta_2)} = q$$

$$a = xN, \text{ wobei } N = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos\beta_2}$$

und es wird

$$x = \frac{a}{M} = \frac{a}{N}$$

da $M = N$ werden muß. M und N lassen sich in logarithmisch taugliche Form bringen; es ist nämlich

wenn $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{mn}}{m+n}\cos\frac{\alpha_1}{2}$ gesetzt wird: $M = (m+n)\cos\varphi$

„ $\tan\psi = \frac{2\sqrt{mn}}{m-n}\sin\frac{\alpha_1}{2}$ „ „ $M = \frac{m-n}{\cos\psi}$

„ $\sin\varphi' = \frac{2\sqrt{pq}}{p+q}\cos\frac{\beta_2}{2}$ „ „ $M = (p+q)\cos\varphi'$

„ $\tan\psi' = \frac{2\sqrt{pq}}{p-q}\sin\frac{\beta_2}{2}$ „ „ $M = \frac{p-q}{\cos\psi'}$

$$x = \frac{a}{M},$$

wo m, n, p, q durch die bekannten Winkel α_1, β_1, α_2, β_2 ausgedrückt sind Schließlich wird:

$$y = mx, \quad z = px, \quad y' = nx, \quad z' = qx.$$

Für die Rechnung genügt eine der angeführten Formen; im folgenden Beispiel werden zur Vergleichung alle vier durchgeführt.

Beispiel: $a = 126{\cdot}37\,m$

$\alpha_1 =$	58° 16′ 14″	$\alpha_2 =$	37° 56′ 52″
$\beta_1 =$	45 21 38	$\beta_2 =$	71 44 25
$\alpha_1 + \beta_1 =$	103 37 52	$\alpha_2 + \beta_2 =$	109 41 17
$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 =$	141 34 44	$\alpha_2 + \beta_2 + \beta_1 =$	155 2 55

$\log \sin \alpha_2 =$	9·788834 (1. 2)	$\log mn =$	0·344118 (1.2)
$\log \sin (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2) =$	9·793397 (1. 2. 3. 4)	$\log pq =$	0·421238 (3.4)
$\log \sin (\alpha_1 + \beta_1) =$	9·987592 (3. 4)	$\log \sqrt{mn} =$	0·172059 (1.2)
$\log \sin (\alpha_2 + \beta_2) =$	9·973839 (1. 2)	$\log 2 =$	0·301030 (1.2.3.4)
$\log \sin (\beta_1 + \alpha_2 + \beta_2) =$	9·625158 (1. 2. 3. 4)	$\log \sqrt{pq} =$	0·210619 (3.4)
$\log \sin \beta_1 =$	9·852201 (3. 4)	$* \log \cos \varphi =$	9·772354 (1)
$\log m =$	9·995437 (1. 2)	$\log (m + n) =$	0·508055 (1)
$\log n =$	0·348681 (1. 2)	$\log \cos \frac{1}{2} \alpha_1 =$	9·941250 (1)
$\log p =$	0·194195 (3. 4)	$\log 2 \sqrt{mn} =$	0·473089 (1.2)
$\log q =$	0·227043 (3. 4)	$\log \sin \frac{1}{2} \alpha_1 =$	9·687416 (2)
$m =$	0·989548 (1. 2)	$\log (m - n) =$	$0{\cdot}094255_n$ (2)
$n =$	2·231932 (1. 2)	$* \log \cos \psi =$	$9{\cdot}813843_n$ (2)
$p =$	1·563850 (3. 4)	$\log \sin \varphi =$	9·906284 (1)
$q =$	1·686719 (3. 4)	$\log \operatorname{tang} \psi =$	$0{\cdot}066250_n$ (2)
$m + n =$	$+3{\cdot}221480$ (1)	$* \log \cos \varphi' =$	9·768454 (3)
$m - n =$	$-1{\cdot}242384$ (2)	$\log (p + q) =$	0·511960 (3)
$p + q =$	$+3{\cdot}250569$ (3)	$\log \cos \frac{1}{2} \beta_2 =$	9·908671 (3)
$p - q =$	$-0{\cdot}122869$ (4)	$\log 2 \sqrt{pq} =$	0·511649 (3.4)
$\frac{1}{2} \alpha_1 =$	29° 8′ 7·0″ (1. 2)	$\log \sin \frac{1}{2} \beta_2 =$	9·767860 (4)
$\frac{1}{2} \beta_2 =$	35° 52′ 12·5″ (3. 4)	$\log (p - q) =$	$9{\cdot}089443_n$ (4)
		$* \log \cos \psi' =$	$8{\cdot}809031_n$ (4)
		$\log \sin \varphi' =$	9·908360 (3)
$\log M =$	0·280409 (1)	$\log \operatorname{tang} \psi' =$	$1{\cdot}190066_n$ (4)
	0·280412 (2)		
	0·280414 (3)	$\log M =$	0·280412
	0·280412 (4)	$\log a =$	2·101644
		$\log x =$	1·821232
		$x =$	66·257 *m*.

Die mit * bezeichneten Zeilen bleiben anfänglich frei; die Werte werden erst eingesetzt, wenn log sin φ oder log tang ψ usw. bekannt wurden und log cos φ, log cos ψ danach aufgeschlagen wurden. Für die Benutzung der 4 verschiedenen Formeln (mittels φ, ψ, φ', ψ') sind nur die rechts mit 1 beziehungsweise 2, 3, 4 bezeichneten Zeilen erforderlich.

118. Hilfssatz *a*). Aus zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{\sin (x + A)}{\sin (x + B)} = \frac{M}{N}; \qquad \frac{\sin (x + C)}{\sin (x + D)} = \frac{P}{Q}$$

läßt sich x stets eliminieren. Aus der ersten Gleichung erhält man, wenn man von Nennern befreit und die sinus der Summen auflöst:

$$N [\sin x \cos A + \cos x \sin A] = M [\sin x \cos B + \cos x \sin B]$$
$$\sin x [N \cos A - M \cos B] = \cos x [M \sin B - N \sin A]$$

$$\cot x = \frac{N \cos A - M \cos B}{M \sin B - N \sin A};$$

ebenso erhält man aus der zweiten Gleichung

$$\cot x = \frac{Q\cos C - P\cos D}{P\sin D - Q\sin C}.$$

Setzt man die beiden Werte einander gleich und befreit wieder von Nennern, so folgt:

$MQ\sin B\cos C - MP\sin B\cos D - NQ\sin A\cos C + NP\sin A\cos D =$
$= NP\cos A\sin D - NQ\cos A\sin C - MP\cos B\sin D + MQ\cos B\sin C$

oder, entsprechend vereinigt:

$MQ\sin(B-C) - MP\sin(B-D) - NQ\sin(A-C) + NP\sin(A-D) = 0,$

demnach

$$\frac{P}{Q} = \frac{N\sin(A-C) - M\sin(B-C)}{N\sin(A-D) - M\sin(B-D)}$$

oder auch

$$\frac{M}{N} = \frac{Q\sin(A-C) - P\sin(A-D)}{Q\sin(B-C) - P\sin(B-D)}.$$

Hilfssatz *b*). Aus drei Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned}\sin(x+a_1) &= c_1 z\sin(t+b_1)\\ \sin(x+a_2) &= c_2 z\sin(t+b_2)\\ \sin(x+a_3) &= c_3 z\sin(t+b_3)\end{aligned}$$

lassen sich die drei Unbekannten x, t, z einfach berechnen. Man erhält zunächst

$$z = \frac{\sin(x+a_1)}{c_1\sin(t+b_1)} = \frac{\sin(x+a_2)}{c_2\sin(t+b_2)} = \frac{\sin(x+a_3)}{c_3\sin(t+b_3)}$$

und diese können auf die Form gebracht werden:

$$\frac{\sin(x+a_1)}{\sin(x+a_2)} = \frac{c_1\sin(t+b_1)}{c_2\sin(t+b_2)};\quad \frac{\sin(x+a_2)}{\sin(x+a_3)} = \frac{c_2\sin(t+b_2)}{c_3\sin(t+b_3)},$$

welche die Form der in *a*) behandelten Gleichungen haben; man erhält daher, wenn man

$$A = a_1,\quad B = a_2,\quad C = a_2,\quad D = a_3$$

$M = c_1\sin(t+b_1),\ N = c_2\sin(t+b_2),\ P = c_2\sin(t+b_2),\ Q = c_3\sin(t+b_3)$

setzt:

$$\frac{c_2\sin(t+b_2)}{c_3\sin(t+b_3)} = \frac{c_2\sin(t+b_2)\sin(a_1-a_2)}{c_2\sin(t+b_2)\sin(a_1-a_3) - c_1\sin(t+b_1)\sin(a_2-a_3)}$$

demnach

$$\begin{aligned}c_1\sin(t+b_1)\sin(a_2-a_3) + c_2\sin(t+b_2)\sin(a_3-a_1) +\\ + c_3\sin(t+b_3)\sin(a_1-a_2) = 0.\end{aligned}$$

Zerlegt man hier die sinus der Summen

$$\sin(t+b_i) = \sin t\cos b_i + \cos t\sin b_i$$

und sucht tang t, so folgt:

$$\operatorname{tang} t = -\frac{c_1\sin b_1\sin(a_2-a_3) + c_2\sin b_2\sin(a_3-a_1) + c_3\sin b_3\sin(a_1-a_2)}{c_1\cos b_1\sin(a_2-a_3) + c_2\cos b_2\sin(a_3-a_1) + c_3\cos b_3\sin(a_1-a_2)}.$$

Setzt man ferner

$$\frac{1}{c_1} = d_1, \quad \frac{1}{c_2} = d_2, \quad \frac{1}{c_3} = d_3,$$

so werden die Gleichungen

$$\frac{\sin(t+b_1)}{d_1 \sin(x+a_1)} = \frac{\sin(t+b_2)}{d_2 \sin(x+a_2)} = \frac{\sin(t+b_3)}{d_3 \sin(x+a_3)},$$

welche in derselben Art aufgelöst, das Resultat geben:

$$\operatorname{tang} x = -\frac{d_1 \sin a_1 \sin(b_2-b_3) + d_2 \sin a_2 \sin(b_3-b_1) + d_3 \sin a_3 \sin(b_1-b_2)}{d_1 \cos a_1 \sin(b_2-b_3) + d_2 \cos a_2 \sin(b_3-b_1) + d_3 \cos a_3 \sin(b_1-b_2)}.$$

Sind x und t bekannt, so folgt z aus einem der Quotienten

$$z = \frac{\sin(x+a_i)}{c_i \sin(t+b_i)}.$$

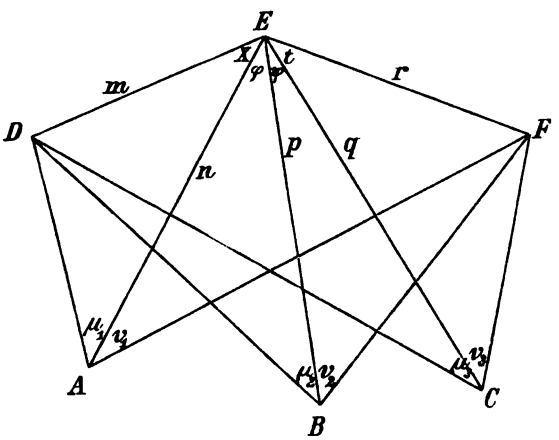


Fig. 252.

119. Das Problem der sechs Punkte, flying survey, wird wegen der relativ geringen Genauigkeit der Peilungen besser nur graphisch gelöst (vgl. Nr. 86). Für die Rechnung kann, wenn nötig, der folgende Vorgang gewählt werden: Durch die Beobachtung sind gegeben die Winkel μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, μ_3, ν_3 und φ, ψ. Mit den in Fig. 252 gegebenen Bezeichnungen folgt aus den Dreiecken

$$ADE: \quad n = \frac{m \sin(x+\mu_1)}{\sin \mu_1}$$

$$BDE: \quad p = \frac{m \sin(x+\mu_2+\varphi)}{\sin \mu_2}$$

$$CDE: \quad q = \frac{m \sin(x+\mu_3+\varphi+\psi)}{\sin \mu_3}$$

$$AEF: \quad n = \frac{r \sin(t+\nu_1+\varphi+\psi)}{\sin \nu_1}$$

$$BEF: \quad p = \frac{r \sin(t+\nu_2+\psi)}{\sin \nu_2}$$

$$CEF: \quad q = \frac{r \sin(t+\nu_3)}{\sin \nu_3}.$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke für n, p, q erhält man drei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, t und $s = \frac{r}{m}$, welche nach *b*) Nr. 118 aufgelöst werden. Man hat

$$a_1 = \mu_1 \qquad a_2 = \mu_2 + \varphi \qquad a_3 = \mu_3 + \varphi + \psi$$
$$b_1 = \nu_1 + \varphi + \psi \qquad b_2 = \nu_2 + \psi \qquad b_3 = \nu_3$$
$$c_1 = \frac{\sin \mu_1}{\sin \nu_1} \qquad c_2 = \frac{\sin \mu_2}{\sin \nu_2} \qquad c_3 = \frac{\sin \mu_3}{\sin \nu_3}$$
$$d_1 = \frac{\sin \nu_1}{\sin \mu_1} \qquad d_2 = \frac{\sin \nu_2}{\sin \mu_2} \qquad d_3 = \frac{\sin \nu_3}{\sin \mu_3}$$

zu setzen und erhält dann unmittelbar tang x und tang t; sodann, wenn $m = 1$ gesetzt wird (eine Größe bleibt willkürlich, solange nicht eine Länge durch wirkliche Längenmessung bekannt wird), r und hieraus die Größen n, p, q.

120. Das Problem der acht Punkte. Sind A, B, C, D, E (Fig. 253) die fünf anvisierten, ihrer gegenseitigen Lage nach unbekannten Punkte

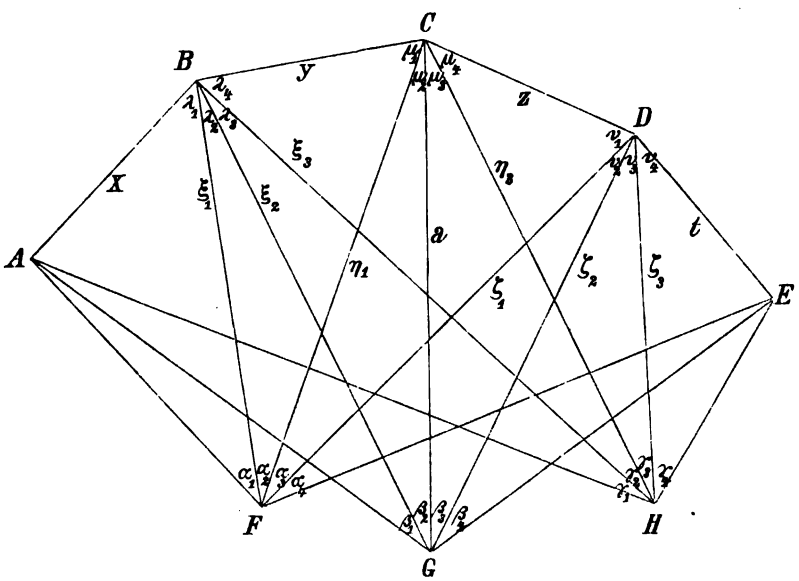


Fig. 253.

und die ebenfalls ihrer Lage nach noch nicht bekannten Standpunkte F, G, H, in denen die zwölf Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2 \ldots . \beta_4, \gamma_4$, gemessen wurden und bezeichnet man die Strecke CG mit a, so erhält man die Lage der Punkte durch die folgende Auflösung.*

* Siehe des Verfassers Abhandlung „Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens; das Problem der acht Punkte." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-naturwissensch. Klasse, Bd. CXIII, Abt. II *a*, S. 355.

Setzt man

$$+\sin\gamma_1\sin\alpha_2\sin\beta_2 = m_1 \qquad +\sin\alpha_4\sin\gamma_3\sin\beta_3 = n_1$$
$$-\sin\gamma_2\sin\alpha_2\sin\beta_1 = m_2 \qquad -\sin\alpha_3\sin\gamma_3\sin\beta_4 = n_2$$
$$+\sin\gamma_2\sin\alpha_1\sin\beta_2 = m_3 \qquad +\sin\alpha_3\sin\gamma_4\sin\beta_3 = n_3$$

$$+\sin\alpha_3\sin\beta_2 = p_1$$
$$-\sin\beta_3\sin\alpha_2 = p_2$$
$$+\sin\beta_3\sin\gamma_2 = q_1$$
$$-\sin\beta_2\sin\gamma_3 = q_2$$

$$\beta_2+\beta_1-\alpha_2-\alpha_1 = \varkappa_1$$
$$\beta_3+\beta_4-\gamma_3-\gamma_4 = \vartheta_1$$
$$\gamma_2+\gamma_1-\alpha_2-\alpha_1 = \varkappa_2$$
$$\alpha_3+\alpha_4-\gamma_3-\gamma_4 = \vartheta_2$$
$$\gamma_2+\gamma_1-\beta_2-\beta_1 = \varkappa_3$$
$$\alpha_3+\alpha_4-\beta_3-\beta_4 = \vartheta_3,$$

so erhält man die vier Gleichungen

$$m_1\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\sin(\mu_2+\varkappa_1)+m_2\sin(\mu_1+\mu_2)\sin(\mu_2+\mu_3+\varkappa_2)+ +m_3\sin\mu_1\sin(\mu_3+\varkappa_3) = 0$$

$$n_1\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4)\sin(\mu_3+\vartheta_1)+n_2\sin(\mu_3+\mu_4)\sin(\mu_2+\mu_3+\vartheta_2)+ +n_3\sin\mu_4\sin(\mu_2+\vartheta_3) = 0$$

$$p_1\sin(\mu_1+\alpha_2)\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)+p_2\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\alpha_3)=0$$

$$q_1\sin(\mu_4+\gamma_3)\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)+q_2\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2)=0$$

mit den vier Unbekannten μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, welche durch Näherungen gelöst werden müssen.*

Hat man die Werte der Unbekannten, so erhält man dann

$$\lambda_2 = \mu_2+\beta_2-\alpha_2 \qquad \nu_1 = 180^\circ-(\mu_2+\mu_3+\mu_4)-\alpha_3$$
$$\lambda_3 = \mu_3+\gamma_2-\beta_2 \qquad \nu_2 = \mu_2+\alpha_3-\beta_3$$
$$\lambda_4 = 180^\circ-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)-\gamma_2 \qquad \nu_3 = \mu_3+\beta_3-\gamma_3$$

$$y = \frac{a\sin\beta_2}{\sin(\lambda_3+\lambda_4)} \qquad z = \frac{a\sin\beta_3}{\sin(\nu_1+\nu_2)}$$

$$\xi_1 = \frac{y\sin\mu_1}{\sin\alpha_2} \qquad \zeta_3 = \frac{z\sin\mu_4}{\sin\gamma_3}$$

$$\eta_1 = \frac{y\sin(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}{\sin\alpha_2} \qquad \eta_3 = \frac{z\sin(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{\sin\gamma_3}$$

---

* Die Lösung geht von den oben angeschriebenen Gleichungen für x, y, z, t, ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3 aus, zu denen noch die Gleichungen

$$x = \frac{\xi_2\sin\beta_1}{\sin(\lambda_1+\lambda_2+\beta_1)} \qquad t = \frac{\zeta_2\sin\beta_4}{\sin(\nu_3+\nu_4+\beta_4)}$$

$$z = \frac{\eta_1\sin\alpha_3}{\sin\nu_1} \qquad y = \frac{\eta_3\sin\gamma_2}{\sin\lambda_4}$$

treten; mittels der Beziehungen zwischen den Winkeln und durch den Hilfssatz Nr. 118a können die sämtlichen Unbekannten eliminiert werden und die Lösung wird auf die vier Gleichungen mit den vier Unbekannten μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 reduziert. L. c. S. 367.

$$\zeta_1 = \frac{\eta_1 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)}{\sin \nu_1} \qquad \xi_3 = \frac{\eta_3 \sin(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}{\sin \lambda_4}$$

$$\xi_2 = \frac{a \sin(\mu_1 + \mu_2)}{\sin(\lambda_3 + \lambda_4)} \qquad \zeta_2 = \frac{a \sin(\mu_3 + \mu_4)}{\sin(\nu_1 + \nu_2)}.$$

Wenn nötig, kann dann noch λ_1, ν_4, x und t aus den Gleichungen gesucht werden:

$$x = \frac{\xi_1 \sin \alpha_1}{\sin(\lambda_1 + \alpha_1)} = \frac{\xi_3 \sin \gamma_1}{\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \gamma_1)}$$

$$t = \frac{\zeta_3 \sin \gamma_4}{\sin(\nu_4 + \gamma_4)} = \frac{\zeta_1 \sin \alpha_4}{\sin(\nu_4 + \nu_3 + \nu_2 + \alpha_4)}$$

was nach Aufgabe *a*) Nr. 118 geschehen kann, doch wird dies meist unnötig, da die Punkte A, E graphisch bestimmt werden können, sobald die gegenseitige Lage von B, C, D, F, G, H ermittelt ist.

Beispiel: In Laufen bei Ischl erhielt ich im Sommer 1903 von den drei Standpunkten B (Bahnhof), L_o (erhöhter Standpunkt am Abhange der Laufner Höhen) und L_u (am Solenweg längs der Laufner Höhen) drei photographische Aufnahmen, in denen fünf Objekte (vgl. den Plan auf Tafel III) a, K, K_1, b, c zu identifizieren waren. Die aus den Photogrammen ermittelten Winkel waren:

$\alpha_1 = -\ 7° 44{\cdot}7'$*	$\beta_1 = +12° 43{\cdot}9'$	$\gamma_1 = +11° 47{\cdot}5'$
$\alpha_2 = +\ 2\ 41{\cdot}7$	$\beta_2 = +\ 8\ 50{\cdot}7$	$\gamma_2 = +\ 5\ 25{\cdot}6$
$\alpha_3 = +15\ 23{\cdot}7$	$\beta_3 = +17\ 9{\cdot}1$	$\gamma_3 = -\ 4\ 19{\cdot}0$
$\alpha_4 = +\ 7\ 8{\cdot}9$	$\beta_4 = +12\ 39{\cdot}5$	$\gamma_4 = -\ 2\ 59{\cdot}4.$

Es folgt:

$\varkappa_1 = +26° 37{\cdot}6'$	$\vartheta_1 = +37°\ 7{\cdot}0'$
$\varkappa_2 = +22\ 16{\cdot}1$	$\vartheta_2 = +29\ 51{\cdot}0$
$\varkappa_3 = -\ 4\ 21{\cdot}5$	$\vartheta_3 = -\ 7\ 16{\cdot}0$

$\log m_1 = 7{\cdot}16951$	$\log n_1 = 7{\cdot}44125_n$	$\log p_1 = 8{\cdot}61087$
$\log m_2 = 6{\cdot}99122_n$	$\log n_2 = 7{\cdot}64135$	$\log p_2 = 8{\cdot}14195_n$
$\log m_3 = 7{\cdot}29218_n$	$\log n_3 = 7{\cdot}61105_n$	$\log q_1 = 8{\cdot}44544$
		$\log q_2 = 8{\cdot}06346.$

Die Auflösung der vier Gleichungen ergab

$\mu_1 = 17° 40{\cdot}6'$	$\mu_3 = \ 58° 20{\cdot}0'$
$\mu_2 = 48\ 23{\cdot}2$	$\mu_4 = -12\ 45{\cdot}0$

und damit

$\lambda_2 = 54° 32{\cdot}2'$	$\nu_1 = 70° 38{\cdot}1$
$\lambda_3 = 54\ 54{\cdot}9$	$\nu_2 = 46\ 37{\cdot}8$
$\lambda_4 = 50\ 10{\cdot}6$	$\nu_3 = 79\ 48{\cdot}1$

und daher für $a = 1$: $y = 0{\cdot}1593$, $z = 0{\cdot}3318$

$\xi_1 = 1{\cdot}0284$	$\xi_2 = 0{\cdot}9466$	$\xi_3 = 1{\cdot}3898$
$\eta_1 = 1{\cdot}1790$	$\eta_2 = a = 1$	$\eta_3 = 1{\cdot}2936$
$\zeta_1 = 1{\cdot}2467$	$\zeta_2 = 0{\cdot}8035$	$\zeta_3 = 0{\cdot}9728,$

* Die Visur FA lag zwischen den Visuren FB und FC; ebenso war die Visur HD links von HC, HE links von HD.

welche Werte der Zeichnung zugrunde gelegt wurden. Durch die Aufnahmen in den Punkten B, L_o, L_u konnte dann der nordöstliche Teil des Ortes am rechten Traunufer bis zur oberen Traunbrücke gegenüber dem Punkte 2 aufgenommen werden; während die nördliche Hälfte des am linken Traunufer gelegenen Ortes durch Aufnahmen von den Standpunkten s_1 und s_2 erhalten wurde. Der südliche Teil des Ortes wurde nur skizziert, da ich für diesen keine Aufnahmen machte.

121. Koordinatenberechnungen. Sobald die gegenseitige Lage aller Punkte eines Netzes durch die entsprechende Anzahl von Seiten- oder Winkelmessungen bekannt ist, kann man durch Rechnung alle noch fehlenden Stücke, Winkel oder Seiten berechnen. Die Lage jedes einzelnen Punktes wird aber erst unabhängig von allen anderen Punkten angebbar, wenn man seine Lage gegenüber einem fixen Koordinatensystem kennt. Sei O (Fig. 254)

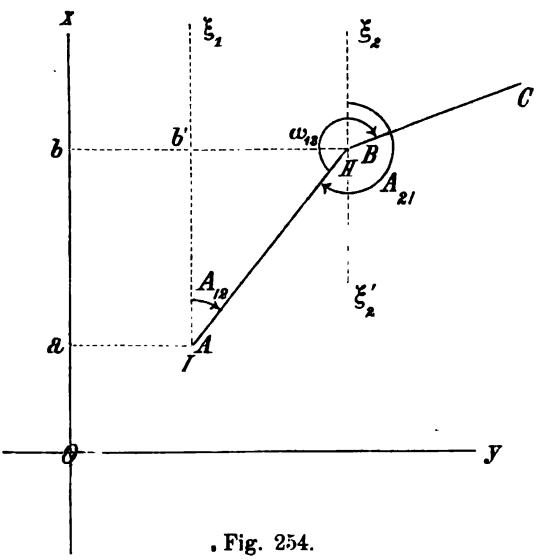


Fig. 254.

der Anfangspunkt eines solchen, Ox, Oy die Achsen, so ist die Aufgabe, von einem Punkte zum andern fortschreitend, aus den Koordinaten des früheren die Koordinaten des späteren zu finden. Als Koordinatenanfangspunkt wählt man einen Fixpunkt, wie z. B. früher für Niederösterreich den Stephansturm (vgl. Nr. 4), gegenwärtig für Österreich den Triangulierungspunkt erster Ordnung Hermannskogel (vgl. Nr. 134), als X-Achse den durch diesen Punkt gehenden Meridian, und zwar in der höheren Geodäsie ausschließlich als positive Achse den südlichen Teil, in der niederen Geodäsie mitunter den nördlichen, als Y-Achse die darauf senkrecht stehende Richtung, und zwar als positive Richtung diejenige, welche im Sinne der Zählung der Azimute und Winkel um 90° absteht, also, wenn der südliche Teil des Meridians als positive X-Achse gewählt war, die Richtung gegen West, wenn der nördliche Teil des Meridians die positive X-Achse darstellt, die Richtung gegen Ost als positive Y-Achse.

Seien die Koordinaten x_1, y_1 eines Punktes I gegeben; aus der Entfernung I II $= d_{12}$ und dem Azimut der Richtung gegen II hin, d. i. $\measuredangle \xi_1$ I II $= A_{12}$ die Koordinaten von II zu ermitteln.

Da $Oa = x_1$, $aA = y_1$ ist und ferner

$$Ob = Oa + ab = Oa + Ab' = x_2$$
$$bB = bb' + b'B = aA + b'B = y_2$$

ist, so ist nur Ab' und $b'B$ zu rechnen. Es ist aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABb':

$$Ab' = \Delta x_{12} = d_{12} \cos A_{12}$$
$$b'B = \Delta y_{12} = d_{12} \sin A_{12},$$

daher

$$x_2 = x_1 + \Delta x_{12} = x_1 + d_{12} \cos A_{12}$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_{12} = y_1 + d_{12} \sin A_{12}.$$

Hierzu kommt noch die Berechnung des Azimutes des Punktes I von II aus, d. i. der Winkel, den die Richtung im Sinne der Winkelzählung mit der positiven X-Achse, also mit der Richtung gegen Süd (ausnahmsweise gegen Nord) einschließt. Dieser Winkel A_{21} ist:

$$A_{21} = \xi_2 BA = 180° + \xi_2' BA$$

und da $\xi_2' BA = \xi_1 AB$ ist:

$$A_{21} = 180° + A_{12}.$$

Um nun von den Koordinaten des Punktes B zu denjenigen eines dritten Punktes C überzugehen, ist die Kenntnis des Azimutes der Richtung BC nötig. Da aber der Winkel CBA als bekannt angenommen werden muß (gemessen wurde), so hat man:*

$$A_{23} = \xi_2 BC = \xi_2 BA + ABC = A_{21} + w_{13}.$$

Diese Formeln gelten ganz allgemein und man hat, ebenso fortschreitend, für den dritten Punkt:

$$x_3 = x_2 + d_{23} \cos A_{23}$$
$$y_3 = y_2 + d_{23} \sin A_{23}$$
$$A_{32} = 180° + A_{23}$$
$$A_{34} = A_{32} + w_{24}.$$

Beispiel: Seien für einen Punkt A_n des Netzes die Koordinaten gefunden worden

$$x_n = +157{\cdot}347\ m,\ y_n = -621{\cdot}858\ m;$$

das Azimut $A_{n-1,\,n}$ der Richtung vom vorhergehenden Punkte A_{n-1} zum Punkte A_n sei

$$A_{n-1,\,n} = 156° 31' 51{\cdot}2''$$

---

* Die Reihenfolge der Indizes bedeutet überall die Richtung vom Standpunkte zum anvisierten Punkte, also A_{12} = Azimut am Standpunkte I, für den anvisierten Punkt II, und für Winkelmessungen die Richtung der Drehung; also w_{13} = Winkel, bei welchem II I der linke Schenkel, II III der rechte Schenkel ist (in der Figur durch Pfeile angedeutet). Für Distanzen ist aber $d_{ik} = d_{ki}$, während z. B. $w_{12} = 360° - w_{31}$ ist

die Seite $d_{n,\,n+1} = 315{\cdot}86\ m$; der Winkel an A_n: $w_{n-1,\,n+1} = 251°\ 18'\ 25{\cdot}9''$, so wird

$$\begin{aligned} A_{n,\,n-1} &= 336°\ 31'\ 51{\cdot}2'' & \Delta x_{n,\,n+1} &= -212{\cdot}014 \\ w_{n-1,\,n+1} &= 251\ \ 18\ \ 25{\cdot}9 & x_n &= +157{\cdot}347 \\ A_{n,\,n+1} &= 227°\ 50'\ 17{\cdot}1'' & \Delta y_{n,\,n+1} &= -234{\cdot}132 \\ \log\cos A_{n,\,n+1} &= 9{\cdot}826870_n & y_n &= -621{\cdot}858 \\ \log d_{n,\,n+1} &= 2{\cdot}499495 & x_{n+1} &= -\ 54{\cdot}667\ m \\ \log\sin A_{n,\,n+1} &= 9{\cdot}869966_n & y_{n+1} &= -855{\cdot}990\ m \\ \log d_{n,\,n+1}\cos A_{n,\,n+1} &= 2{\cdot}326365_n \\ \log d_{n,\,n+1}\sin A_{n,\,n+1} &= 2{\cdot}369461_n. \end{aligned}$$

Die Rechnung muß sechsstellig durchgeführt und die dritte Dezimale des Meters (*mm*) beibehalten werden, da die Koordinaten aller folgenden Punkte durch Addition aller vorhergehenden Δx, Δy erhalten werden. Es ist nämlich

$$x_n = x_0 + \Sigma d_i \cos(A_i + w_i)$$
$$y_n = y_0 + \Sigma d_i \sin(A_i + w_i).$$

Bei Vernachlässigung der dritten Dezimalstelle würde daher die zweite Dezimalstelle schon um mehrere Einheiten fehlerhaft werden können, und zwar um so mehr, je öfter diese Addition nötig wird, d. h. durch je mehr Punkte man durchgegangen ist. Mehr als sechsstellige Rechnung wird nie nötig, da diese Art der Berechnung nur bei nicht allzu großen Entfernungen zulässig ist, bei denen noch auf die Krümmung der Erdoberfläche nicht Rücksicht genommen zu werden braucht.

122. Genäherte Ausgleichung eines Polygonzuges. Hat man einen ganzen Polygonzug berechnet und kommt durch denselben zu einem Punkt, dessen Koordinaten bekannt sind, z. B. zu einem zweiten Triangulierungspunkt, so müssen die durch „Übertragung" gefundenen Koordinaten mit den gegebenen identisch sein. Ist dieses nicht der Fall, so ist die Nichtübereinstimmung auf Fehler in den Messungen zurückzuführen, welche dann, wenn die Differenz nur klein ist, ausgeglichen werden können. Sind keine weiteren Bedingungen vorhanden, so werden die auftretenden Fehler in den Abszissen gleichmäßig, d. h. proportional den Abszissendifferenzen der einzelnen Punkte und ebenso die Fehler in den Ordinaten proportional den Ordinatendifferenzen auf die einzelnen Punkte verteilt.*

Beispiel: Seien zwischen zwei Fixpunkten

$$\begin{aligned} x_1 &= +\ 34{\cdot}972 & x_6 &= -657{\cdot}988 \\ y_1 &= +415{\cdot}841 & y_6 &= -468{\cdot}334 \end{aligned}$$

* Vgl. die graphische Ausgleichung Nr. 88. Schon Marinoni setzt voraus, daß die Fehler in den gemessenen Strecken proportional der Länge dieser Strecken sind, eine Voraussetzung, „die sich durch die Erfahrung zu bestätigen scheint". J. T. Mayer, „Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie," II. Bd., Göttingen, 1792, S. 445.

vier Punkte eingeschaltet, mit den durch die Rechnung gefundenen Koordinatendifferenzen:

	Δx	Δy
I		
II	+ 164·873	+ 39·188
III	+ 134·927	— 281·075
IV	— 278·219	— 303·407
V	— 451·128	+ 108·672
VI	— 263·388	— 449·707

Es ist

$$\Sigma(\Delta x) = -692{\cdot}935 \qquad x_6 - x_1 = -692{\cdot}960$$
$$\Sigma(\Delta y) = -886{\cdot}329 \qquad y_6 - y_1 = -884{\cdot}175.$$

Der Wert für $\Sigma(\Delta x)$ stimmt mit dem Werte von $x_6 - x_1$ nahe überein; der Unterschied von 2·5 *cm* kann als belanglos vernachlässigt werden. Hingegen müßte zu $\Sigma(\Delta y) + 2{\cdot}154\ m$ hinzugegeben werden, um $y_6 - y_1$ zu erhalten; die Korrektion wird proportional den Ordinatendifferenzen verteilt. Da die Summe der sämtlichen Ordinatendifferenzen, ohne Rücksicht auf das Zeichen 1182 *m* ist, so werden

	die Korrektionen	daher die korrigierten Ordinatendifferenzen
I		
II	$\frac{+39}{1182} \cdot 2{\cdot}154 = +\ 71$	+ 39·259
III	$\frac{+281}{1182} \cdot 2{\cdot}154 = +512$	— 280·563
IV	$\frac{+303}{1182} \cdot 2{\cdot}154 = +552$	— 302·855
V	$\frac{+109}{1182} \cdot 2{\cdot}154 = +199$	+ 108·871
VI	$\frac{+450}{1182} \cdot 2{\cdot}154 = +820$	— 448·887

Eine andere, etwas korrektere Fehlerverteilung, die aber größere Korrektionen ergibt, erhält man, wenn man die Ordinatendifferenzen (beziehungsweise, wenn nötig, auch in derselben Weise die Abszissendifferenzen) Δy in dem Verhältnis

$$\frac{y_6 - y_1}{\Sigma(\Delta y)}$$

vergrößert beziehungsweise verkleinert. Es wird dann die korrigierte Ordinatendifferenz

$$\Delta y' = \Delta y \cdot \frac{y_6 - y_1}{\Sigma(\Delta y)} = \Delta y + \Delta y \frac{(y_6 - y_1) - \Sigma(\Delta y)}{\Sigma(\Delta y)} = \Delta y + n\Delta y.$$

Für das vorliegende Beispiel ist

$$\log[(y_6 - y_1) - \Sigma(\Delta y)] = 0{\cdot}33325$$
$$\log \Sigma(\Delta y) = 2{\cdot}94759_n$$
$$\log n = 7{\cdot}38566_n$$

und damit werden

	die Korrektionen $n\Delta y$	die korrigierten Ordinatendifferenzen
I		
II	— 95	+ 39·093
III	+ 683	— 280·392
IV	+ 737	— 302·670
V	— 264	+ 108·408
VI	+ 1093	— 448·614

123. Durch drei Punkte einen Kreisbogen abzustecken. Verbindet man AB (Fig. 255) und bezeichnet die halbe Länge $\frac{1}{2}AB = MB = m$. den Abstand $MD = n$, $DC = p$, so wird, bezogen auf das Achsensystem $O\xi$, $O\eta$, wenn O der Kreismittelpunkt ist, die Gleichung des Kreises

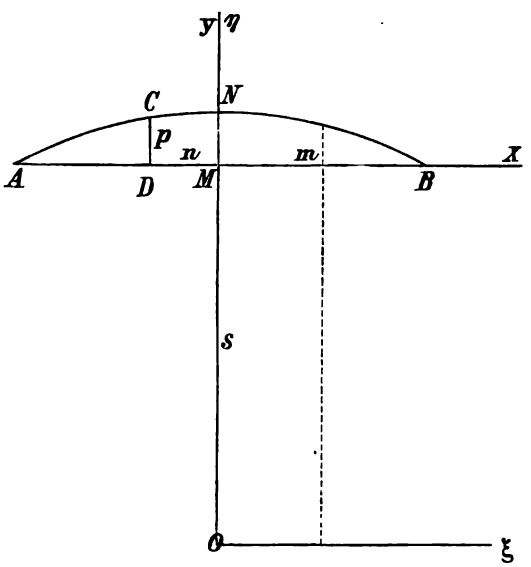


Fig. 255.

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Da die Punkte A, B auf dem Kreise liegen sollen, so muß, wenn $OM = s$ gesetzt wird

$$s^2 + m^2 = r^2,$$

und für den Punkt C, dessen Koordinaten $-n$, $s + p$ sind:

$$(s + p)^2 + n^2 = r^2$$

demnach

$$(s + p)^2 + n^2 = s^2 + m^2,$$

woraus

$$s = \frac{m^2 - n^2 - p^2}{2p}$$

folgt. Werden nun die Koordinaten, bezogen auf das Achsensystem Mx, My mit x, y bezeichnet, so ist

$$\xi = x, \quad \eta = y + s$$

und die Kreisgleichung wird

$$x^2 + (y + s)^2 = r^2 = s^2 + m^2$$

und daraus

$$x^2 + y^2 + 2sy = m^2; \text{ wobei } s = \frac{m^2 - n^2 - p^2}{2p}$$

ist. Zu jedem Werte von x erhält man daraus das y oder, was noch einfacher ist, zu jedem angenommenen Werte von y (innerhalb der Grenzen MN) erhält man den zugehörigen Wert von x.

Da

$$s + n = \frac{m^2 - (n - p)^2}{2p}; \qquad s - n = \frac{m^2 - (n + p)^2}{2p}$$

ist, so wird die Rechnung etwas bequemer, wenn man sich zur Berechnung von s eines der beiden Ausdrücke bedient:

$$s + n = \frac{(m - n + p)(m + n - p)}{2p}$$

oder

$$s - n = \frac{(m - n - p)(m + n + p)}{2p}.$$

Sind die Längen AB und AD oder AD und BD bekannt, so findet man leicht

$$m = \tfrac{1}{2} AB; \quad n = \tfrac{1}{2} AB - AD$$

oder

$$m = \tfrac{1}{2}(BD + AD); \quad n = \tfrac{1}{2}(BD - AD).$$

Da nun

$$x^2 = \sqrt{m^2 - y(2s + y)}$$

$$= m \sqrt{1 - \frac{y(2s + y)}{m^2}}$$

geschrieben werden kann, so wird, wenn

$$\frac{\sqrt{y(2s + y)}}{m} = \cos \varphi$$

gesetzt wird,

$$x = m \sin \varphi.$$

Beispiel. Sei $AB = 550{\cdot}75\ m$; $AD = 62{\cdot}43\ m$; $CD = 34{\cdot}58\ m$; so wird

m	$= 275{\cdot}375$	$\log (m - n + p)$	$= 1{\cdot}986817$
n	$= 212{\cdot}945$	$\log (m + n - p)$	$= 2{\cdot}656807$
p	$= 34{\cdot}580$	$\log 2p$	$= 1{\cdot}839855$
$m - n + p$	$= 97{\cdot}010$	$\log (m - n - p)$	$= 1{\cdot}444825$
$m + n - p$	$= 453{\cdot}740$	$\log (m + n + p)$	$= 2{\cdot}718419$
$m - n - p$	$= 27{\cdot}850$	$\log (s + n)$	$= 2{\cdot}803769$
$m + n + p$	$= 522{\cdot}900$	$\log (s - n)$	$= 2{\cdot}323389$
		$s + n$	$= 636{\cdot}457$
		$s - n$	$= 210{\cdot}566$
		$2s$	$= 847{\cdot}023\ m$

Für $y = 25\ m$ wird dann

		$\log y$	$= 1{\cdot}397940$
$2s + y$	$= 872{\cdot}023$	$\log (2s + y)$	$= 2{\cdot}940527$
		$\log [y(2s + y)]$	$= 4{\cdot}338467$
		$\log \sqrt{y(2s + y)}$	$= 2{\cdot}169233$
		$\log m$	$= 2{\cdot}439924$
		$\log \cos \varphi$	$= \bar{9}{\cdot}729309$
		$\log \sin \varphi$	$= 9{\cdot}926398$
		$\log x$	$= 2{\cdot}366322$
		x	$= 232{\cdot}446\ m$

124. Aus den Koordinaten zweier Punkte deren Distanz und das Azimut ihrer Verbindungslinie zu bestimmen. Man hat aus Figur 254

$$d_{12}^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{tang } A_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Diese Formeln werden jedoch weniger bequem, da sich die Distanz aus der Summe zweier Quadrate, also in nicht logarithmisch tauglicher Form ergibt und ferner der Wert des Winkels unbestimmt bleibt, da für eine positive Tangente der Winkel im ersten und dritten, für eine negative Tangente der Winkel im zweiten oder vierten Quadrate liegen kann. Für die Rechnung werden die Formeln bequemer:

$$d_{12} \cos A_{12} = x_2 - x_1$$
$$d_{12} \sin A_{12} = y_2 - y_1.$$

Durch Division dieser Gleichungen, d. h. Subtraktion der Logarithmen erhält man tang A_{12}, hierzu wird A_{12} aufgeschlagen, wobei, da d_{12} stets positiv ist, der cosinus das Zeichen von $x_2 - x_1$, der sinus das Zeichen von $y_2 - y_1$ hat, wodurch der Winkel eindeutig bestimmt ist. Zum aufgeschlagenen Winkel wird sofort der cosinus oder sinus entnommen, und zwar diejenige Funktion, für welche die Interpolation einfacher ist, d. h. bei welcher die Differenzen kleiner sind, also z. B. zwischen 0° und 45° der cosinus, zwischen 45° und 90° der sinus. Dieser Wert wird in eine zwischen $d_{12} \cos A_{12}$ und $d_{12} \sin A_{12}$ frei gehaltene Zeile geschrieben* (in dem folgenden Beispiel mit * bezeichnet) und der log sin A_{12} von log (d_{12} sin A_{12}) oder log cos A_{12} von log (d_{12} cos A_{12}) subtrahiert, wodurch man log d_{12} erhält.

Beispiel. Seien

$$x_5 = +171{\cdot}625\ m \qquad y_5 = -634{\cdot}194\ m$$
$$x_9 = -91{\cdot}847\ m \qquad y_9 = +816{\cdot}755\ m$$

so wird

$$x_9 - x_5 = -263{\cdot}472$$
$$y_9 - y_5 = +1450{\cdot}949$$
$$\log (x_9 - x_5) = \log (d \cos A) = 2{\cdot}420734_n$$
$$* \quad \log \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} = 9{\cdot}992956$$
$$\log (y_9 - y_5) = \log (d \sin A) = 3{\cdot}161652$$
$$\log \text{tang } A = 0{\cdot}740918_n$$
$$A_{59} = 100° 17' 31{\cdot}1''$$
$$\log d_{59} = 3{\cdot}168696$$
$$d_{59} = 1474{\cdot}67\ m$$

* Rechnungen dieser Art kommen sehr häufig vor, weshalb es gut ist, dieses Rechnungsschema einzuhalten.

III. ABTEILUNG.

Höhere Geodäsie.

125. Die Basismessung. Für die Zwecke der höheren Geodäsie hat man es mit Dreiecken von mitunter sehr großen Seitenlängen zu tun und dementsprechend muß auch die Basis von beträchtlicher Länge gewählt werden. Sowohl zur Vereinfachung der Beobachtung als der Messung wählt man ein möglichst ebenes Terrain. Beispielsweise wurde bei der lappländischen Gradmessung 1736/7 die Basis auf dem Eise des zugefrorenen Torneaflusses gemessen. In Österreich wurden insgesamt 22 Basen gemessen; die Basis bei Wr.-Neustadt z. B. erstreckt sich in der Ebene südwestlich von Wr.-Neustadt in der Richtung der Südbahn gegen Neunkirchen in der Länge von 9484 *m* fast vollständig eben.

Ist das Terrain ausgewählt, so werden die Basisendpunkte unterirdisch fixiert (nach Nr. 35) und dann die Operation der Messung nach Nr. 38 und 39 vorgenommen. Das Einvisieren der einzelnen Zwischenpunkte geschieht mittels des Theodoliten, die Messung mittels der Meßstangen und Schieber oder Keile bei den Endmaßen, mittels Meßstangen und Mikroskopen bei den Strichmaßen. Die Messung wird stets zweimal vorgenommen, um einerseits gegen grobe Fehler gesichert zu sein und anderseits auch eine Kontrolle über die Genauigkeit der Beobachtungen zu erhalten. Sind die Feldoperationen beendigt, so werden die unterirdisch festgelegten Punkte verschüttet und darüber oberirdisch dauernde Marken errichtet. Für die oben erwähnte Basis ist der „nördliche Basisendpunkt“ $\frac{1}{4}$ Stunde südwestlich von Wr.-Neustadt unmittelbar an der Reichsstraße und der „südliche Basisendpunkt“ $\frac{3}{4}$ Stunden nordöstlich von Neunkirchen, ebenfalls unmittelbar an der Reichsstraße durch steinerne Monumente festgelegt.

Um die doppelte Basismessung zu ersparen, schlug Struve vor, nahe der Mitte der Basis einen Zwischenpunkt anzunehmen und die beiden Teile unabhängig voneinander als getrennte Stücke zu messen. Die ganze Basis AB (Fig. 256) ist dann die Summe aus den beiden gemessenen Teilen AC und BC; wird aber außerhalb der Basis noch ein vierter Punkt D angenommen und werden diese vier Punkte durch zwei Dreiecke verbunden,

so kann man aus dem einen Teile den andern berechnen und erhält so eine einfache Kontrolle, welche an Stelle der zweiten Basismessung tritt. Werden die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gemessen, so erhält man zwischen den beiden Teilen m und n der Basis die Beziehung

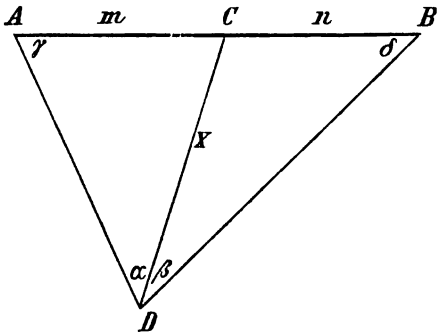


Fig. 256.

$$x = m\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = n\frac{\sin\delta}{\sin\beta},$$

also

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\delta\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta},$$

welche Bedingung erfüllt sein muß.

Berücksichtigung der Neigung der Meßstangen. Ist die beobachtete Neigung i, die Länge der Meßstange l, die Keilbreite bis zur nächsten Stange λ, so ist die hierdurch bestimmte Horizontaldistanz

$$(l+\lambda)\cos i = (l+\lambda) - (l+\lambda)(1-\cos i) = (l+\lambda) - 2(l+\lambda)\sin\tfrac{1}{2}i^2,$$

daher die gemessene Länge der Basis

$$B = \Sigma l + \Sigma\lambda - 2\Sigma(l+\lambda)\sin\tfrac{1}{2}i^2.$$

Da i klein ist, demnach $\cos i$ nahe 1, so wird die Reduktion in dieser Form am sichersten; $\Sigma\lambda$ ist dabei die Summe aller Keilbreiten; $l\sin\frac{1}{2}i^2$ läßt sich für jede Stange mit dem Argumente i = Neigung in eine Tafel bringen, während $\lambda\sin\frac{1}{2}i^2$ als sehr kleine Korrektion ebenfalls mit den beiden Argumenten λ und i tabuliert werden kann.*

---

* Bei den Stangen mit Schieber wird noch eine Korrektion nötig, wenn der Schieber nicht in der Stangenachse, sondern an der Oberfläche in der Höhe h über der Stangenachse liegt, da die Neigung i' zwischen dem Anfangspunkt der Stangenachse und dem Endpunkt des etwas höher liegenden Schiebers zu nehmen ist, diese aber von der durch das Niveau angegebenen Neigung i der Stange um $\alpha = i' - i$ verschieden ist; es ist nämlich, wenn AC (Fig. 257) die Stange, DE der Schieber ist:

$$AB = AE\cos i' = AF\sec(i'-i)\cos i' = AF\sec\alpha\cos(i+\alpha) = AF(\cos i - \sin i\,\mathrm{tang}\,\alpha)$$

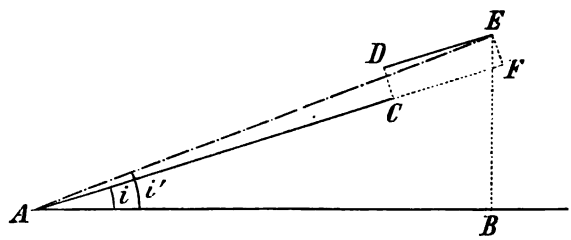


Fig. 257.

und da

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{EF}{AF} = \frac{h}{l+\lambda}$$

ist:

$$AB = (l+\lambda)\cos i - h\sin i = (l+\lambda) - (2l\sin\tfrac{1}{2}i^2 + h\sin i) - 2\lambda\sin\tfrac{1}{2}i^2.$$

Berücksichtigung der Temperatur der Meßstangen. Ist der Ausdehnungskoeffizient des Stangenmateriales α, so ist die Länge l, wenn man bei der Temperatur t beobachtete, größer und man hat als wahre Länge bei dieser Temperatur $l\,(1 + \alpha\, t)$ anzusehen. Zur Summe der Stangenlängen Σl hat man daher $\Sigma l \alpha t$ hinzuzufügen.

Die Ausdehnungskoeffizienten α müssen für die Stangen selbst bestimmt werden, da die Werte derselben von chemischen Beimengungen, bei Legierungen vom Prozentgehalte der Bestandteile abhängig und daher für jedes Material verschieden sind. Diese Bestimmungen werden gleichzeitig mit der Bestimmung der wahren Längen an den Komparatoren vorgenommen, indem die wahre Länge der Stange zwischen den Komparatorschneiden bei verschiedenen Temperaturen gemessen wird, wobei beträchtliche Temperaturunterschiede dadurch erzielt werden können, daß die Stangen ihrer ganzen Länge nach in Eis beziehungsweise in ein Wasser- oder Ölbad von bestimmter Temperatur eingeschlossen werden.

Reduktion auf den Meereshorizont. Die Basismessung bezieht sich auf das Niveau, in welchem die Messung stattfand. Da aber verschiedene Basen in verschiedener Höhe liegen können, so würden diese und ebenso die Seiten überhaupt, wenn sie verschiedenen Höhenlagen angehören, nicht direkt vergleichbar sein, da demselben Zentriwinkel in verschiedenen Höhen verschiedene Längen entsprechen. Man bezieht daher alle Messungen auf den Meereshorizont. Dem Zentriwinkel ω entspricht in der Entfernung R vom Erdmittelpunkte eine Bogenlänge $B_0 = R\omega$ und in der Entfernung $R + h$ eine andere Bogenlänge $B_1 = (R + h)\,\omega$; durch die Basismessung wird die letztere gefunden. Man findet aber aus den beiden Beziehungen

$$\frac{B_0}{B_1} = \frac{R}{R + h},$$

folglich

$$B_0 = \frac{B_1}{1 + \frac{h}{R}} = B_1 \left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} \ldots .\right) = B_1 - B_1 \frac{h}{R} + \ldots .$$

Das dritte Glied würde für $h = 1000\,m$ und eine Basis $B = 10\,km$ nur $\left(\frac{1}{6370{\cdot}3}\right)^2 \cdot 10.000 = 0{\cdot}000246\,m = 0{\cdot}25\,mm$.

Man kann daher schreiben

$$B_0 = B_1 \left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

B_0 ist die der gemessenen Basis B_1 entsprechende Länge derselben im Niveau des Meeres. Sind alle Basen auf dieses Niveau reduziert, so wird

---

Da sowohl l als auch h für eine Stange konstant ist, so kann der Ausdruck $2\,l \sin \frac{1}{2}\,i^2 + h \sin i$ mit dem Argumente i für jede Stange tabuliert werden.

Für die Messungen mit dem Glaskeil hat man die Keillänge zu derjenigen Stange gehörig anzusehen, an deren Vertikalschneide er anliegt, weil die Neigungsänderung an der nächsten Horizontalschneide stattfindet.

das daraus berechnete Netz ebenfalls ein Netz von Dreiecken sein, dessen Eckpunkte vertikal unter den Beobachtungspunkten im Niveau des Meeres liegen.

Die Länge der Basis soll von derselben Ordnung sein, wie die Länge der gemessenen Seiten; mit einer etwa 100 *m* langen Basis wird man bei der Detailvermessung mit 50 bis 200 *m* langen Seiten ausreichen, nicht aber für die Landestriangulation. Da die Seiten bei dieser zwischen 20 bis 100 *km* haben, so sollte hiernach die Basis im Mittel gegen 30 *km* haben. Einerseits ist es meist schwer, ein völlig brauchbares Terrain von dieser Ausdehnung zu finden und anderseits würde die Messung einer Basis von dieser Länge mit außerordentlichen Kosten verknüpft sein. Die Basis wird daher doch erheblich kleiner gewählt. Schwerd* hat zuerst bei Speyer eine kleine Basis von nur 860 *m* Länge gemessen und diese durch ein außerordentlich genau bestimmtes Netz auf die Seiten übertragen. Eine große Genauigkeit und ausreichende Kontrolle in den Messungen dieses sogenannten Basisentwicklungsnetzes gestatten es auf diese Art aus einer kurzen Basis zunächst die Länge der dem Triangulierungsnetz erster Ordnung angehörigen, nächstgelegenen Seite mit ebenso großer Sicherheit abzuleiten, als wäre diese selbst direkt gemessen worden und diese dann

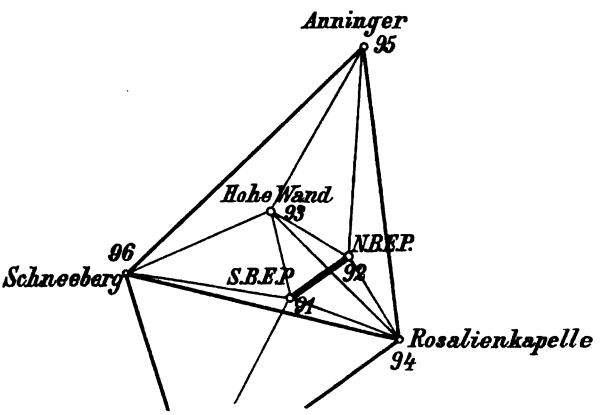


Fig. 258.

den weiteren Rechnungen zugrunde zu legen. Fig. 258 gibt das Basisentwicklungsnetz der schon erwähnten Basis bei Wr.-Neustadt. Die österreichischen Basen haben die folgenden Längen:

1.	Die alte Basis bei Wr.-Neustadt (1763)	12157 *m*
2.	Die alte Basis auf der Welserheide (1806)	14989 *m*
3.	Die alte Basis bei Raab (1810)	9429 *m*
4.	Die alte Basis bei Radautz (1818)	9860 *m*
5.	Basis bei Arad (1840)	8768 *m*
6.	Basis bei Tarnow (1849)	5973 *m*
7.	Basis bei Hall (bei Innsbruck) (1851)	5671 *m*
8.	Basis bei Slobožic (Walachei) (1855)	6648 *m*

* Schwerd „Die kleine Speyerer Basis," Speyer 1822.

1. *a*)	Neue Basis bei Wr.-Neustadt (1857)	9484 *m*
9.	Basis bei Kranichsfeld in Steiermark (1860)	5697 *m*
10.	Basis bei Josefstadt in Böhmen (1861)	5257 *m*
11.	Basis bei Skutari in Albanien (1869)	3061 *m*
12.	Basis bei Sinj in Dalmatien (1870)	2475 *m*
2. *a*)	Basis bei Kleinmünchen bei Linz (1871)	3163 *m*
13.	Basis bei Großenhain (Sachsen) (1872)	4030 *m*
14.	Basis bei Eger in Böhmen (1873)	4188 *m*
15.	Basis bei Udine (1874)	3249 *m*
4. *a*)	Neue Basis bei Radautz (1874)	4621 *m*
16.	Basis bei Dubica in Kroatien (1878/9)	2949 *m*
17.	Basis bei Sarajewo (1882)	4061 *m*
18.	Basis bei Budapest (1884)	4248 *m*
19.	Basis bei Kronstadt in Siebenbürgen (1886)	4130 *m*
20.	Basis bei Werschetz in Ungarn (1895)	4023 *m*
21.	Basis bei Szatmar in Ungarn (1897)	3898 *m*
22.	Basis bei Tarnopol in Galizien (1899)	4445 *m*.

126. Ausgleichung des Dreiecksnetzes, Winkel- und Seitengleichungen. Über die Art der Winkelbeobachtungen (Repetitions- und Satzbeobachtungen) wurde schon in Nr. 101 gesprochen. Die so beobachteten Winkel sind aber nicht unmittelbar zur Berechnung verwendbar, da sie infolge von kleinen Beobachtungsfehlern einander nicht ganz entsprechen und andere Seitenlängen resultieren würden, je nachdem man den einen oder anderen beobachteten Winkel zur Berechnung verwenden würde. Der Einfluß von fehlerhaft beobachteten Winkeln auf die zu berechnenden Stücke wird am geringsten, wenn die Seiten im Netze nicht zu sehr voneinander verschieden sind. Selbstverständlich ist diese Bedingung selbst in einer Dreieckskette nicht zu erfüllen, um so weniger in einem Netze, in welchem auch Diagonalen von Vielecken auftreten; aber jedenfalls wird man es vermeiden, zu schiefe Schnitte, d. h. Dreiecke mit zu spitzen Winkeln, in das Netz einzubeziehen.

Vor der wirklichen Berechnung der Dreiecksseiten muß aber zunächst das Netz ausgeglichen werden. Um die Ausgleichung vorzunehmen, muß man vor allem die Bedingungsgleichungen, welchen die gemessenen Winkel unterworfen sind, kennen, d. h. dieselben aufstellen. Es gibt vier verschiedene Arten derselben.

1. Eine Bedingungsgleichung war schon angeführt: bei unabhängiger Messung jedes einzelnen Winkels muß die Summe aller Winkel um einen Punkt herum 360° sein: der Horizontabschluß;

2. die Winkelgleichungen. Eine zweite ebenfalls schon angeführte Bedingung ist die, daß die Winkelsumme in einem Dreiecke eine theoretisch bestimmte Größe haben muß: in der Ebene 180°, auf der Kugel 180° + dem sphärischen Exzeß; ebenso für ein Vieleck in der Ebene $(n-2)\,180°$ und auf der Kugel $(n-2)\,180°$ + dem sphärischen Exzeß. Hat man aber mehrere aneinanderstoßende Dreiecke, so wird man nicht ebenso viele Bedingungsgleichungen erhalten, als Dreiecke und Polygone vorhanden sind. Zunächst

ist zu beachten, daß nur „beiderseitig beobachtete Richtungen“ zu einer Winkelgleichung beitragen können; denn wurde z. B. die Richtung AC (Fig. 261) nur von A aus beobachtet, d. h. sind nur die Winkel DAC, CAB bestimmt, nicht aber die Richtung CA, so ist der Winkel BCA nicht durch Messung bekannt und man erhält daher erst durch die Rechnung selbst seinen Wert, er gibt daher keine Winkelgleichung. Dasselbe gilt auch für einen geschlossenen Polygonzug $ABCFE$ (Fig. 261). Da nur die Richtungen in C und E nach F zur Winkelmessung benutzt, der Winkel in F daher nicht beobachtet wurde, so kann eine Winkelgleichung hieraus nicht entstehen. Einseitig beobachtete Linien können daher für die Bestimmung der Zahl der Winkelgleichungen und ebenso bei der Aufstellung derselben überhaupt weggelassen werden.

Eine Bedingungsgleichung entsteht daher, wenn p Punkte durch p beiderseitig beobachtete Linien verbunden sind: $ABCDE$ (Fig. 259). Kommt zu diesen noch eine beiderseitig beobachtete Linie AD hinzu, so gibt dieses allerdings scheinbar zwei neue Bedingungsgleichungen, nämlich aus den beiden Teilen der entstandenen Figur. Es ist aber klar, daß, wenn die Bedingung für das ganze Polygon erfüllt ist und für die eine Teilfigur selbst, sie auch für die andere Teilfigur bestehen muß.

$$\text{Sei } \Sigma_1 = \gamma + \eta + (\iota + \varkappa + \lambda); \quad \Sigma_2 = (\alpha + \beta) + \delta + \zeta + \vartheta$$
$$\Sigma = [\gamma + (\alpha + \beta)] + \delta + \zeta + [\vartheta + \eta] + (\iota + \varkappa + \lambda) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

und sind die Winkel so bestimmt, daß Σ_1 und Σ_2 den theoretischen Wert haben, so wird dies für Σ auch der Fall sein; und ebenso, wenn für Σ und Σ_1 die Winkelgleichung erfüllt ist, wird dieselbe auch für $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$ erfüllt sein.

Sind daher für p Punkte l beiderseitig beobachtete Linien vorhanden, so geben p Linien eine Winkelgleichung und die $n = l - p$ überzähligen Linien geben $l - p$ weitere Winkelgleichungen, so daß deren Gesamtzahl

$$Z_w = l - p + 1$$

ist. In Fig. 259 sind 5 Punkte durch 6 Linien verbunden, daher ist $Z_w = 6 - 5 + 1 = 2$.

3. Die Seitengleichungen. Eine weitere Bedingung ist die, daß man, wenn man in einem Dreiecksnetze eine Seite auf verschiedenen Wegen berechnet, stets dasselbe Resultat erhalten muß. Diese Bedingung läßt sich noch in anderer Weise aussprechen. Sei z. B. das Dreieck AED bestimmt durch Messung der Winkel γ und η, gleichgültig, ob der dritte auch bestimmt ist oder nicht; und wird der Punkt C durch Messung der beiden Winkel β und ϑ bestimmt, so ist die gegenseitige Lage der vier Punkte fixiert. Ist noch überdies ein anderer Winkel ι gemessen, so erhält man noch die Visur EC (einen Kontrollschnitt), welche schon überzählig ist und die Bedingung liefert, daß die Seite EC, aus den beiden Dreiecken AEC und ECD berechnet, denselben Wert erhalten muß: es ergibt sich eine Seitengleichung und wie man sofort sieht, ist es hierbei gleichgültig, ob diese Richtungen beiderseitig beobachtet sind (AE, ED, AD, CD) (Fig. 261) oder nur einseitig (AC, EC).

Die Zahl der Seitengleichungen läßt sich leicht angeben. Zur gegenseitigen Bestimmung dreier Punkte sind zwei Winkel nötig (d. h. drei Richtungen); für jeden folgenden Punkt noch zwei Linien; für p Punkte ist demnach die Zahl der notwendigen Linien $3 + 2(p - 3) = 2p - 3$. Sind l_1 Linien vorhanden (gleichgültig ob beiderseitig oder nur einseitig beobachtet), so werden alle Punkte eindeutig bestimmt sein,* wenn $l_1 = 2p - 3$ wäre; wäre aber l_1 größer, so sind

$$Z_s = l_1 - 2p + 3$$

überschüssige Linien, daher ebenso viele Seitengleichungen. In Fig. 260 sind 6 Linien zwischen 4 Punkten, daher $Z_s = 1$.

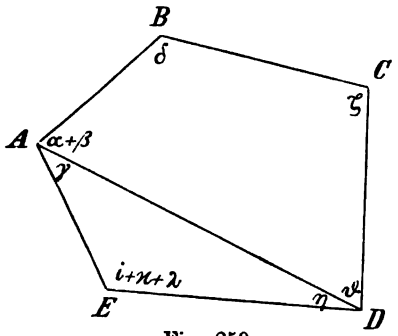


Fig. 259.

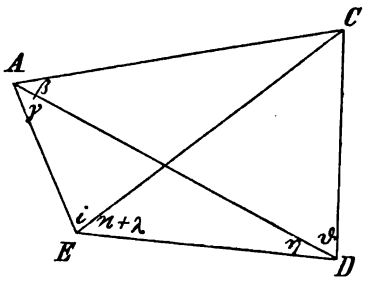


Fig. 260.

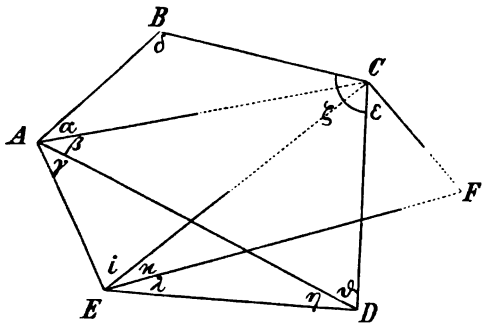


Fig. 261.

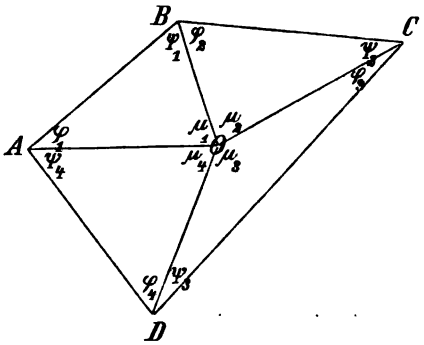


Fig. 262.

Für die Aufstellung der Winkel und Seitengleichungen kann man sich den Überblick vereinfachen, wenn man *a*) für die Winkelgleichungen alle einseitig beobachteten Richtungen wegläßt und *b*) für die Seitengleichungen alle jene Punkte wegläßt, in denen sich nur zwei Linien schneiden; denn Z_s ändert sich nicht, wenn sich l_1 um 2 und p um eine Einheit vermehrt. Auch die Aufstellung der Gleichungen kann aus den so veränderten Figuren vorgenommen werden, da einseitig beobachtete Richtungen keine Winkelgleichung und Punkte, in denen sich nur zwei Linien schneiden, keine Seitengleichung geben. Läßt man in Fig. 261 die einseitig beobachteten Richtungen weg, so entsteht Fig. 259 mit zwei Winkelgleichungen; läßt man

* Vorausgesetzt ist dabei, daß nicht einzelne Punkte unbestimmt sind.

aber diejenigen Punkte weg, in denen sich nur zwei Linien schneiden, so entsteht die Fig. 260 mit einer Seitengleichung.

Für die Aufstellung der Seitengleichungen wird es am bequemsten, sogenannte Zentralpolygone herauszusuchen. Ein solches ist ein Polygon mit p Ecken und einem Punkte (in Fig. 262 im Inneren), von dem aus Strahlen zu allen Eckpunkten gehen. Da hier $p + 1$ Punkte und $2p$ Linien sind, so ist

$$Z_s = 2p - 2(p + 1) + 3 = 1 \text{ Seitengleichung.}$$

Man erhält diese aus den einzelnen nebeneinanderliegenden Dreiecken, die um den Zentralpunkt O herumliegen, und zwar:

Aus dem Dreiecke AOB:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \psi_1} = \frac{BO}{AO} \text{ oder für das sphärische Dreieck } \frac{\sin \varphi_1}{\sin \psi_1} = \frac{\sin BO}{\sin AO}$$

aus dem Dreiecke BOC:

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \psi_2} = \frac{CO}{BO} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{\sin \varphi_2}{\sin \psi_2} = \frac{\sin CO}{\sin BO}$$

aus dem Dreiecke COD:

$$\frac{\sin \varphi_3}{\sin \psi_3} = \frac{DO}{CO} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{\sin \varphi_3}{\sin \psi_3} = \frac{\sin DO}{\sin CO}$$

aus dem Dreiecke AOD:

$$\frac{\sin \varphi_4}{\sin \psi_4} = \frac{AO}{DO} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{\sin \varphi_4}{\sin \psi_4} = \frac{\sin AO}{\sin DO}$$

und durch Multiplikation dieser Gleichungen die gesuchte Seitengleichung:

$$\frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4}{\sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 \sin \psi_4} = 1 \qquad (\alpha).$$

Ein Viereck mit beiden Diagonalen kann ebenfalls als Zentralpolygon angesehen werden, wobei jeder Punkt als Zentralpunkt O gelten kann. Man hat z. B. in Fig. 260, wenn man D als Zentralpunkt ansieht

aus dem Dreiecke AED: $\frac{\sin DE}{\sin DA} = \frac{\sin \gamma}{\sin (\iota + \varkappa + \lambda)}$,

aus dem Dreiecke ACD: $\frac{\sin DA}{\sin DC} = \frac{\sin (\beta + \vartheta)}{\sin \beta}$,

weil $\sphericalangle ACD = 180° - (\beta + \vartheta)$ ist,

aus dem Dreiecke CED: $\frac{\sin DC}{\sin DE} = \frac{\sin (\varkappa + \lambda)}{\sin (\varkappa + \lambda + \vartheta + \eta)}$,

weil $\sphericalangle DCE = 180° - (\varkappa + \lambda + \eta + \vartheta)$ ist.

Die Seitengleichung wird daher

$$\frac{\sin \gamma \sin (\beta + \vartheta) \sin (\varkappa + \lambda)}{\sin (\iota + \varkappa + \lambda) \sin \beta \sin (\varkappa + \lambda + \vartheta + \eta)} = 1.$$

Dabei ist es gleichgültig, welchen Punkt man als Zentralpunkt wählt; mit Rücksicht auf die Winkelgleichungen werden die verschiedenen Formen dasselbe Resultat ergeben, wenn sie auch nicht in identischer Gestalt auftreten.

4. Basisgleichungen. Sind in einem Netze mehrere Grundlinien gemessen, so entsteht die Bedingung, daß jede Seite, gleichgültig aus welcher Basis sie gerechnet wird, denselben Wert erhalten muß oder was auf dasselbe hinauskommt, daß alle Grundlinien, aus einer derselben gerechnet, den beobachteten Wert ergeben müssen. Für g gemessene Grundlinien gibt es daher $g-1$ Basisgleichungen.

Man kann die Basisgleichungen in verschiedener Form erhalten, je nachdem man den Weg wählt, auf welchem man die beiden Grundlinien verbindet; mit Rücksicht auf die übrigen Bedingungsgleichungen des Netzes werden dieselben aber zu demselben Resultate führen. Verbindet man z. B. die beiden Grundlinien G, G_1 (Fig. 263) auf dem Wege über A, indem man sukzessive die aufeinanderfolgenden Seiten aus den vorhergehenden rechnet, so erhält man

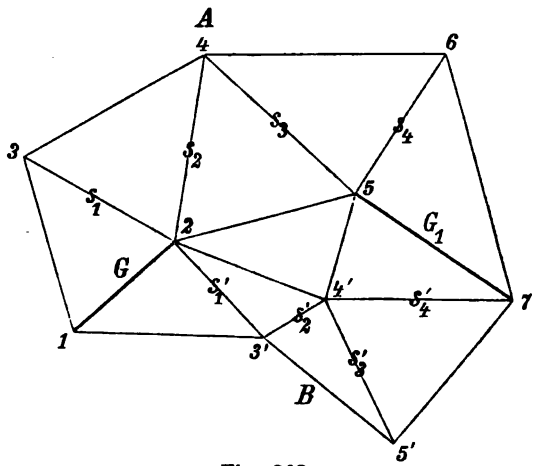


Fig. 263.

$$s_1 = G\frac{\sin 312}{\sin 132},$$

$$s_2 = s_1\frac{\sin 432}{\sin 342} = G\cdot\frac{\sin 312}{\sin 132}\cdot\frac{\sin 432}{\sin 342}$$

. . . . .

$$G_1 = G\cdot\frac{\sin 312}{\sin 132}\cdot\frac{\sin 432}{\sin 342}\cdot\frac{\sin 425}{\sin 452}\cdot\frac{\sin 645}{\sin 465}\cdot\frac{\sin 765}{\sin 675}.$$

Verbindet man jedoch die beiden Grundlinien auf dem Wege über B, so erhält man

$$G_1 = G\cdot\frac{\sin 213'}{\sin 23'1}\cdot\frac{\sin 4'23'}{\sin 24'3'}\cdot\frac{\sin 4'3'5'}{\sin 4'5'3'}\cdot\frac{\sin 4'5'7}{\sin 4'75'}\cdot\frac{\sin 54'7}{\sin 4'57}.$$

Wäre G_1 nicht beobachtet, so würde die Gleichsetzung beider Werte nichts anderes als eine Seitengleichung geben, allerdings nicht in der einfachsten Form. Die überzählig gemessene Seite (Basis) bewirkt, daß diese Seitengleichuug in zwei zerfällt und es ist daher, wenn alle Seitengleichungen bereits vorher aufgestellt waren, gleichgültig, welche Form man wählt: mit Rücksicht auf die übrigen Bedingungsgleichungen des Netzes wird nur eine der beiden Formen aufzustellen sein.*

* Die Seitengleichungen und Basisgleichungen sind aber noch in transzendenter Form und aus dieser lassen sich die Winkel nicht bestimmen. Sind φ_0, ψ_0 ... genäherte

127. Sphärischer Exzeß. In einem Dreiecke auf der Kugel ist die Summe der drei Winkel größer als 180° und man nennt den Überschuß der Winkelsumme über 180° den sphärischen Exzeß. Sind die drei Winkel eines sphärischen Dreieckes w_1, w_2, w_3 und ε der sphärische Exzeß, so ist

$$w_1 + w_2 + w_3 = 180° + \varepsilon.$$

Das sphärische Dreieck wird von größten Kreisen auf der Kugel gebildet. Verlängert man die beiden Seiten AB, AC (Fig. 264), so schneiden sie sich in einem Punkt A', der dem Punkte A diametral gegenübersteht und die Figur $ABA'C$ bildet ein sphärisches Zweieck; dessen Fläche φ_1 läßt sich aus der gesamten Kugeloberfläche $O = 4r^2\pi$ berechnen; es ist

$$\varphi_1 : O = w_1 : 360°,$$

daher

$$\varphi_1 = \frac{w_1}{360} \cdot 4r^2\pi = \Delta + \psi_1,$$

da sich die Fläche φ_1 aus den beiden Dreiecken $ABC = \Delta$ und $A'BC = \psi_1$ zusammensetzt. Ebenso kann man durch Verlängern von BA und BC ein Zweieck $\varphi_2 = BAB'yCB$ erhalten (wobei B' der Antipodenpunkt von B ist, daher auf der rückwärtigen Kugelhälfte liegt, der in Fig. 264 *b* dargestellt ist), welches aus den Teilen $BAC = \Delta$, $CAy = \psi_2'$ und $yB'A = \psi_2''$ besteht und es ist

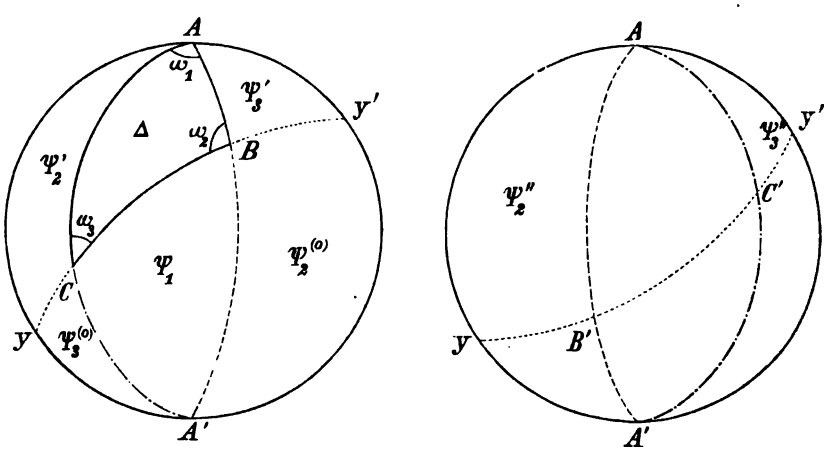


Fig. 264.

$$\varphi_2 = \frac{w_2}{360} \cdot 4r^2\pi = \Delta + \psi_2' + \psi_2''.$$

Werte und $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ ... Korrektionen, so werden diese so zu bestimmen sein, daß für Gleichung (α) S. 292

$$\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi_1)\sin(\varphi_2 + \Delta\varphi_2)\sin(\varphi_3 + \Delta\varphi_3)\sin(\varphi_4 + \Delta\varphi_4) =$$
$$= \sin(\psi_1 + \Delta\psi_1)\sin(\psi_2 + \Delta\psi_2)\sin(\psi_3 + \Delta\psi_3)\sin(\psi_4 + \Delta\psi_4),$$

in welcher Gleichung man für jeden $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi + \Delta\varphi\cos\varphi$ setzen kann, wodurch mit Berücksichtigung der ersten Potenzen der Korrektionen

$$\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\sin\varphi_4[1 + \Delta\varphi_1\cot\varphi_1 + \Delta\varphi_2\cot\varphi_2 + \Delta\varphi_3\cot\varphi_3 + \Delta\varphi_4\cot\varphi_4] =$$
$$= \sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3\sin\psi_4[1 + \Delta\psi_1\cot\psi_1 + \Delta\psi_2\cot\psi_2 + \Delta\psi_3\cot\psi_3 + \Delta\psi_4\cot\psi_4]$$

wird. Diese Gleichungen sind jetzt in der für die Ausgleichungsrechnung verwendbaren Form.

Endlich ist, wenn C' der ebenfalls auf der rückwärtigen Kugelhälfte (Fig. 264 *b*) befindliche Antipodenpunkt von C ist, das Zweieck $\varphi_3 = CBy'C'AC = \Delta + \psi_3' + \psi_3''$, demnach

$$\varphi_3 = \frac{w_3}{360} \cdot 4\, r^2 \pi = \Delta + \psi_3' + \psi_3''.$$

Nun ist aber ψ_3'' das Antipodendreieck zum Dreieck $\psi_3^{(o)}$, ψ_2'' das Antipodendreieck zum Dreieck $\psi_2^{(o)}$; es ist daher auch

$$\varphi_1 = \Delta + \psi_1 = \frac{w_1}{360} 4\, r^2 \pi$$

$$\varphi_2 = \Delta + \psi_2' + \psi_2^{(o)} = \frac{w_2}{360} 4\, r^2 \pi$$

$$\varphi_3 = \Delta + \psi_3' + \psi_3^{(o)} = \frac{w_3}{360} 4\, r^2 \pi$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = (\Delta + \psi_1 + \psi_2' + \psi_3^{(o)} + \psi_3' + \psi_2^{(o)}) + 2\Delta$$

und die in der Klammer stehende Summe von Dreiecken gibt die halbe Kugeloberfläche; daher ist

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \tfrac{1}{2} O + 2\Delta = 2 r^2 \pi + 2\Delta = 2 r^2 \pi \frac{w_1 + w_2 + w_3}{180},$$

demnach

$$w_1 + w_2 + w_3 = 180° \left(1 + \frac{\Delta}{r^2 \pi}\right)$$

oder es wird

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{r^2 \pi} \cdot 180°.$$

Kennt man die Fläche des Dreieckes, d. h. das Verhältnis derselben zur Oberfläche der Kugel, so kann man den sphärischen Exzeß berechnen und umgekehrt die Dreiecksfläche aus dem sphärischen Exzeß. Hat man z. B. ein Dreieck, das einen Kugeloktanten umfaßt, so daß es durch drei aufeinander senkrechte Ebenen ausgeschnitten wird,* so ist $\Delta = \frac{1}{8} \cdot 4\, r^2 \pi$, daher $\varepsilon = 90°$ und die Winkelsumme 270°; in der Tat ist dann auch jeder der drei Winkel 90°, daher die Summe derselben 270°.

Sphärische Polygone setzen sich aus Dreiecken zusammen. So wird in Fig. 262

$$\mu_1 + \varphi_1 + \psi_1 = 180° + \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_1 = \frac{\Delta_1}{r^2 \pi} 180°$$

$$\mu_2 + \varphi_2 + \psi_2 = 180° + \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_2 = \frac{\Delta_2}{r^2 \pi} 180°$$

$$\mu_3 + \varphi_3 + \psi_3 = 180° + \varepsilon_3 \qquad \varepsilon_3 = \frac{\Delta_3}{r^2 \pi} 180°$$

$$\mu_4 + \varphi_4 + \psi_4 = 180° + \varepsilon_4 \qquad \varepsilon_4 = \frac{\Delta_4}{r^2 \pi} 180°$$

* Z. B. Äquator und zwei Meridiane durch den 0. und 90. Längengrad.

und da

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 360°$$

ist

$$(\psi_4 + \varphi_1) + (\psi_1 + \varphi_2) + (\psi_2 + \varphi_3) + (\psi_3 + \varphi_4) =$$
$$4 \times 180° + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) =$$
$$= 360° + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}{r^2\,\pi} \cdot 180° = \frac{F}{r^2\,\pi} \cdot 180°,$$

wenn F die Fläche des Polygones ist.

Beispiel: In dem Viereck Großwand—Gr.-Priel—Bösenstein—Hochgolling ist die Fläche 1751·2 km^2, da für die Erde $r^2\,\pi$ = 127,487.700 km^2 (log = 8·1054682) ist, so wird für dieses Viereck

$$\varepsilon = 0{\cdot}000013736 \times 180° = 8{\cdot}901''.$$

Es genügt wegen der Kleinheit von ε für die Berechnung des sphärischen Exzesses kleinerer Figuren, die Seiten genähert zu kennen (etwa auf 0·1 *km*) und die Fläche wie die einer ebenen Figur zu rechnen, um den theoretischen Wert der Winkelsumme (bei einem Dreiecke 180° + Exzeß, für das obige Viereck 360° + 8·90″), welcher zur Ausgleichung benutzt wird, zu kennen. Die in diesem Vierecke gemessenen Winkel waren am Punkte

					Korrekt.	
155	Großwand:	84°	41′	39·38″	+ 0·359″	39·739″
71	Großer Priel:	100	29	42·08	+ 1·130	43·210
75	Bösenstein:	71	51	33·88	+ 1·537	35·417
156	Hochgolling:	102	57	11·57	— 1·035	10·535
	Winkelsumme:	360	0	6·91		8·901.

Da die Winkelsumme um 1·99″ zu klein ist, so wäre diese Korrektion auf die 4 Winkel aufzuteilen; allein auch die übrigen Bedingungsgleichungen des Netzes waren zu berücksichtigen. Die Ausgleichung ergab die unter „Korrekt." angeschriebenen Werte und damit die in der nächsten Kolonne eingetragenen Winkel, deren Summe gleich der theoretisch geforderten ist.*

128. Berechnung der Dreiecksseiten auf der Kugel. Hat man das ganze Beobachtungsmaterial ausgeglichen, d. h. die berechneten Winkel

* Zur Berechnung des sphärischen Exzesses braucht man aber nicht alle drei Seiten; der sphärische Exzeß ist auch bestimmt durch seine drei Winkel, was natürlich ebenfalls auf den Umstand zurückzuführen ist, daß die drei Winkel den sphärischen Exzeß und damit die Fläche des Dreieckes eindeutig bestimmen, welchem nur ein Dreieck dieser Art entspricht, während in der Ebene zu den drei Winkeln unendlich viele einander ähnliche Dreiecke gehören. Ein aus den drei gemessenen Winkeln bestimmter sphärischer Exzeß kann aber zu einer Winkelgleichung nicht führen und soll diese aufgestellt werden, so muß zur Berechnung des sphärischen Exzesses mindestens eine Seite (und zwei Winkel) im linearen Maße gegeben sein. Für strenge Formeln zur Berechnung des sphärischen Exzesses s. Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Bd. I, S. 84ff.

derart korrigiert, daß die Bedingungsgleichungen (Winkel-, Seiten- und Basisgleichungen) strenge erfüllt sind,* so können aus einer Basis und den gemessenen Winkeln alle anderen Stücke berechnet werden. Man hat dann die analogen Aufgaben wie in Nr. 115, 121 und 124 zu lösen, wozu jedoch die Formeln der sphärischen Trigonometrie dienen, von denen die wichtigsten im folgenden zusammengestellt sind.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Sind a, b, c die Seiten (im Gradmaß ausgedrückt), A, B, C die gegenüberliegenden Winkel (Fig. 265), so hat man:

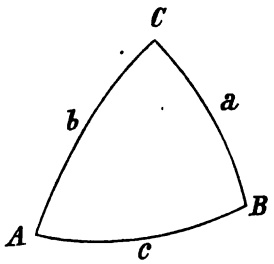


Fig. 265.

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \sin A \sin b &= \sin B \sin a \\ \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m \sin M &= \cos b & \cos a &= m \sin (M + c) \\ m \cos M &= \sin b \cos A & \sin a \cos B &= -m \cos (M + c) \\ & & \sin a \sin B &= \sin b \sin A \end{aligned} \quad \ldots \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} n \sin N &= \cos B & \cos A &= n \sin (C - N) \\ n \cos N &= \sin B \cos a & \sin A \cos b &= n \cos (C - N) \\ & & \sin A \sin b &= \sin B \sin a \end{aligned} \quad \ldots \quad (2a)$$

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin (s - c) \sin (s - b)}{\sin b \sin c}} \\ \cos \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}} \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}} \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)} \quad \ldots \quad (3a)$$

* Die Ausgleichung hat so zu erfolgen, daß jede einzelne Korrektion möglichst klein bleibt, so daß die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Minimum wird. Vgl. hierzu: „Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Zentralbureaus der Europäischen Gradmessung, 1.—3. Heft, Berlin 1869—1871." „Ausgleichung eines Dreiecksnetzes nach der Besselschen Methode." Veröffentlichungen des königl. preuß. Geodätischen Institutes, Berlin, 1871." „Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen" von P. Simon, Berlin 1889. Andrae: „Die dänische Gradmessung ..." Helmert: „Die Ausgleichungsrechnung" u. a. Werke.

$$S = \tfrac{1}{2}(A + B + C) = 90° + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos (S - B) \cos (S - C)}{\sin B \sin C}} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\tan \tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - A)}{\cos (S - B) \cos (S - C)}}$$

$$\sin a = \frac{2}{\sin B \sin C} \sqrt{-\cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}c &= \cos \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}C \\ \sin \tfrac{1}{2}(A - B) \sin \tfrac{1}{2}c &= \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}C \\ \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}c &= \cos \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2}C \\ \cos \tfrac{1}{2}(A - B) \sin \tfrac{1}{2}c &= \sin \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2}C \end{aligned} \quad \ldots\ldots (5)$$

(Gaußsche Gleichungen)

$$\tan \tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2}C$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2}C$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \tan \tfrac{1}{2}c \quad \ldots\ldots (6)$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} \tan \tfrac{1}{2}c$$

Nepersche Analogien.

Für das rechtwinkelige Dreieck: Der cosinus eines Stückes ist gleich dem Produkte der Kotangenten der anliegenden Stücke oder gleich dem Produkte der sinus der nicht anliegenden Stücke, wobei der rechte Winkel nicht mitgezählt wird und für die Katheten ihre Komplemente zu setzen sind. So ist z. B. (Fig. 266)

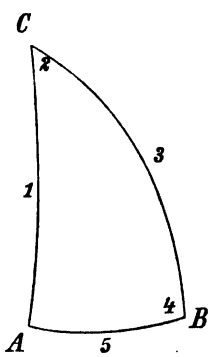


Fig. 266.

$$\cos (2) = \cot (1) \cot (3),$$

d. i. $\cos C = \cot (90° - b) \cot a = \tan b \cot a$

$$\cos (5) = \sin (2) \sin (3),$$

d. i. $\cos (90° - c) = \sin c = \sin C \sin a.$

Für die einfache Triangulation hat man nunmehr aus einer Seite und zwei Winkeln die übrigen Stücke zu rechnen.

a) Gegeben zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite: *A*, *B*, *a*.

Es wird $$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A} \sin a$$

und dann, nachdem *a*, *b*, *A*, *B* bekannt sind, *C* nach einer der beiden ersten Gleichungen 6).

b) Gegeben zwei Winkel und die zwischenliegende Seite B, C, a. Man rechnet A, b (oder A, c mit Vertauschung von b und c) nach 2) oder $2a$) oder die sämtlichen Stücke nach 5) (die gegebenen Stücke mit A, B, c zu bezeichnen).*

Meist kann angenommen werden, daß alle drei Winkel bekannt sind, da der sphärische Exzeß aus der Fläche berechnet werden kann (Nr. 127) und damit der dritte Winkel

$$A = (180° + \varepsilon) - (B + C)$$

wird; dann können alle Seiten durch bloße Anwendung des Sinussatzes

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin : C$$

gefunden werden.

Beispiel: In dem Dreiecke Nr. 254 des österreichischen Netzes erster Ordnung (Ergebnisse der Triangulierungen, I. Bd., S. 150) sind die Winkel

Punkt	Gemessener Winkel	Korrektion aus der Netzausgleichung	Ausgeglichener Winkel
100 Hundsheimer	86° 4′ 22·50″	+ 2·027″	86° 4′ 24·53″ = A
94 Rosalienkapelle	52 48 48·06	− 1·607	52 48 46·45 = B
104 Magoshegy	41 7 1·73	+ 1·278	41 7 3·01 = C

Von der Seite Hundsheimer—Rosalienkapelle $\log c = 4{\cdot}8298516$ (in Meter) oder (mit dem mittleren Krümmungshalbmesser R für 47° 50′ gleich $\log R = 6{\cdot}8047847$) 0° 36′ 25·204″ ausgehend, wird

$$\log \sin C = 9{\cdot}8179654 \qquad \log \sin b = 8{\cdot}1083696$$
$$\log \sin c = 8{\cdot}0250587 \qquad \log \sin a = 8{\cdot}2060727$$
$$\log \sin B = 9{\cdot}9012763 \qquad b = 0° 44′ 7{\cdot}321″$$
$$\log \frac{\sin c}{\sin C} = 8{\cdot}2070933 \qquad a = 0° 55′ 15{\cdot}252″$$
$$\log \sin A = 9{\cdot}9989794 \qquad \left.\begin{array}{l}\log b = 4{\cdot}9131662 \\ \log a = 5{\cdot}0108761\end{array}\right\} \text{ in Meter.}$$

129. Legendresches Theorem. Bei kleinen Dreiecken werden den Seiten a, b, c nur kleine Winkel entsprechen und das Entnehmen der Sinus derselben ist wegen der großen Differenzen unbequem; überdies gibt der Übergang von den linearen Dimensionen der Seiten auf ihre Zentriwinkel und umgekehrt zu beträchtlichen Ungenauigkeiten Anlaß, wenn man nicht zehnstellige Logarithmen anwenden will; diese Berechnungen werden aber wesentlich vereinfacht durch das folgende von Legendre angegebene Theorem.**

---

* Beispiele hierzu in den folgenden Nummern.

** Memoiren der Pariser Akademie für das Jahr 1787 und in Delambre „Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du Méridien", Paris 1799.

Man erhält aus der ersten Formel (1) S. 297:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Denkt man sich die Seiten a, b, c als gegebene Winkel und sind die zugehörigen, gegebenen Längen

$$a_0 = ra \text{ arc } 1'', \quad b_0 = rb \text{ arc } 1'', \quad c_0 = rc \text{ arc } 1''$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}$$

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$N = \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\cos a - \cos(b+c)}$$

Setzt man $\frac{a_0}{r} = a \text{ arc } 1'' = \alpha$, ebenso $\frac{b_0 + c_0}{r} = (b+c) \text{ arc } 1'' = \sigma$; $\frac{b_0 - c_0}{r} = (b-c) \text{ arc } 1'' = \delta$ und benutzt die Reihe für $\cos x$:

$$\cos a = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{24}\alpha^4 - \tfrac{1}{720}\alpha^6 + \ldots$$

$$\cos(b+c) = 1 - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \tfrac{1}{24}\sigma^4 - \tfrac{1}{720}\sigma^6 + \ldots$$

$$\cos(b-c) = 1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{24}\delta^4 - \tfrac{1}{720}\delta^6 + \ldots$$

so wird

$$N = \frac{\tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \delta^2) - \tfrac{1}{24}(\alpha^4 - \delta^4) + \tfrac{1}{720}(\alpha^6 - \delta^6)\ldots}{\tfrac{1}{2}(\sigma^2 - \alpha^2) - \tfrac{1}{24}(\sigma^4 - \alpha^4) + \tfrac{1}{720}(\sigma^6 - \alpha^6)\ldots}$$

$$N = \frac{(\alpha^2 - \delta^2)\left[1 - \tfrac{1}{12}(\alpha^2 + \delta^2) + \tfrac{1}{360}(\alpha^4 + \alpha^2\delta^2 + \delta^4)\ldots\right]}{(\sigma^2 - \alpha^2)\left[1 - \tfrac{1}{12}(\alpha^2 + \sigma^2) + \tfrac{1}{360}(\alpha^4 + \alpha^2\sigma^2 + \sigma^4)\ldots\right]}$$

Setzt man

$$d = \tfrac{1}{12}\left[(\alpha^2 + \delta^2) - \tfrac{1}{30}(\alpha^4 + \alpha^2\delta^2 + \delta^4)\ldots\right]$$

$$s = \tfrac{1}{12}\left[(\alpha^2 + \sigma^2) - \tfrac{1}{30}(\alpha^4 + \alpha^2\sigma^2 + \sigma^4)\ldots\right]$$

so wird

$$\sqrt{N} = \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \delta^2}{\sigma^2 - \alpha^2}}\,\frac{(1-d)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}}.$$

Führt man einen Winkel A_0 ein, der bestimmt ist durch

$$\operatorname{tang}\frac{A_0}{2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \delta^2}{\sigma^2 - \alpha^2}}$$

der also ein Winkel im ebenen Dreiecke ist, dessen Seiten a_0, b_0, c_0 sind, so erhält man

$$M = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A_0} - 1 = \left[(1-d)^{\frac{1}{2}} - (1-s)^{\frac{1}{2}}\right](1-s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Es ist aber

$$M = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A - \operatorname{tang}\frac{1}{2}A_0}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A_0} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A - A_0)}{\sin\frac{1}{2}A_0 \cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A - A_0)}{\sin\frac{1}{2}A_0 \cos\frac{1}{2}A_0} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}A_0}{\cos\frac{1}{2}A}$$

folglich

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(A - A_0)}{\sin A_0} = \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A_0} \cdot M.$$

Nun ist

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos A)} = \frac{\sqrt{\cos a - \cos(b+c)}}{\sqrt{2}\sin b \sin c} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin b \sin c}\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sigma^2 - \alpha^2)(1-s)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos(b-c) - \cos(b+c)}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sigma^2 - \alpha^2)(1-s)}.$$

(also z. B. $r = 6379{\cdot}47\ km$, r arc $1'' = 30{\cdot}9286\ m$ und für $c = 0°\,36'\,25{\cdot}204''$, $c_0 = 67585\,m$); sind ferner in dem sphärischen Dreiecke die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel A, B, C, so kann die sphärische Rechnung voll-

---

Da aber

$$\cos(b-c) - \cos(b+c) = \tfrac{1}{2}(\sigma^2 - \delta^2) - \tfrac{1}{24}(\sigma^4 - \delta^4) + \tfrac{1}{720}(\sigma^6 - \delta^6)\ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sigma^2 - \delta^2)(1 - t)$$

ist, wenn

$$t = \tfrac{1}{12}[(\sigma^2 + \delta^2) - \tfrac{1}{30}(\sigma^4 + \sigma^2\delta^2 + \delta^4) + \ldots]$$

gesetzt wird, so wird

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sigma^2 - \alpha^2}{\sigma^2 - \delta^2}}\sqrt{\frac{1-s}{1-t}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{A_0}{2} = \sqrt{\frac{\sigma^2 - \alpha^2}{\sigma^2 - \delta^2}}$$

demnach

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A_0} = \sqrt{\frac{1-s}{1-t}}$$

und

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(A - A_0)}{\sin A_0} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}\left[(1-d)^{\frac{1}{2}} - (1-s)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(s-d)\left[1 + \tfrac{1}{4}(s+d)\ldots.\right]\left[1 + \tfrac{1}{2}t + \ldots\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(s-d)\left[1 + \tfrac{1}{4}(s + d + 2t)\ldots.\right]$$

Die Substitution der Werte für s, d, t ergibt weiters

$$s + d + 2t = \tfrac{1}{12}[(2\alpha^2 + \sigma^2 + \delta^2) - \ldots] + \tfrac{1}{12}[(2\sigma^2 + 2\delta^2 - \ldots]$$
$$= \tfrac{1}{12}[(2\alpha^2 + 3\sigma^2 + 3\delta^2) - \ldots]$$
$$s - d = \tfrac{1}{12}[(\sigma^2 - \delta^2) - \tfrac{1}{30}\{\alpha^2(\sigma^2 - \delta^2) + (\sigma^4 - \delta^4)\} + \ldots]$$
$$= \tfrac{1}{12}(\sigma^2 - \delta^2)[1 - \tfrac{1}{30}(\alpha^2 + \sigma^2 + \delta^2)\ldots]$$
$$= \tfrac{1}{3}\frac{b_0 c_0}{r^2}\left[1 - \tfrac{1}{30}(\alpha^2 + \sigma^2 + \delta^2)\ldots\right],$$

daher

$$2\sin\tfrac{1}{2}(A - A_0) = \tfrac{1}{6}\frac{b_0 c_0}{r^2}\sin A_0\left[1 - \tfrac{1}{30}(\alpha^2 + \sigma^2 + \delta^2)\ldots\right]\left[1 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{12}(2\alpha^2 + 3\sigma^2 + 3\delta^2)\ldots\right]$$
$$= \tfrac{1}{6}\frac{b_0 c_0}{r^2}\sin A_0\left[1 + \frac{2\alpha^2 + 7\sigma^2 + 7\delta^2}{240} + \ldots\right].$$

Da aber A_0 der Winkel des ebenen Dreieckes ist, dessen Seiten a_0, b_0, c_0 sind, so ist

$$\tfrac{1}{2}\, b_0 c_0 \sin A_0 = f$$

die Fläche dieses ebenen Dreieckes und mithin wird

$$2\sin\tfrac{1}{2}(A - A_0) = \tfrac{1}{3}\frac{f}{r^2}\left[1 + \frac{7b_0^2 + 7c_0^2 + a_0^2}{120\,r^2} + \ldots\right].$$

Bis auf Größen dritter Ordnung kann aber $\sin\frac{1}{2}(A - A_0)$ durch $\frac{1}{2}(A - A_0)$ ersetzt werden, so daß

$$A - A_0 = \tfrac{1}{3}\frac{f}{r^2\ \text{arc}\ 1''}\left(1 + \frac{7b_0^2 + 7c_0^2 + a_0^2}{120\,r^2}\right)$$
$$B - B_0 = \tfrac{1}{3}\frac{f}{r^2\ \text{arc}\ 1''}\left(1 + \frac{7a_0^2 + 7c_0^2 + b_0^2}{120\,r^2}\right)$$
$$C - C_0 = \tfrac{1}{3}\frac{f}{r^2\ \text{arc}\ 1''}\left(1 + \frac{7a_0^2 + 7b_0^2 + c_0^2}{120\,r^2}\right)$$

kommen umgangen werden und die Rechnung durch Auflösung eines ebenen Dreieckes durchgeführt werden, in welchem a_0, b_0, c_0 die Seiten sind, wenn nur die gegenüberliegenden Winkel so geändert werden, daß man die drei sphärischen

---

wird. Addiert man diese drei Gleichungen und berücksichtigt, daß $A+B+C=180°+\varepsilon$, $A_0+B_0+C_0=180°$ ist, so folgt

$$\varepsilon = \frac{f}{r^2 \operatorname{arc} 1''}\left(1+\frac{a_0^2+b_0^2+c_0^2}{24\,r^2}\right).$$

Hieraus ergibt sich noch mit demselben Grade der Annäherung

$$\frac{f}{r^2 \operatorname{arc} 1''} = \varepsilon\left(1-\frac{a_0^2+b_0^2+c_0^2}{24\,r^2}\right)$$

und führt man diesen Wert von f in die Differenzen $A-A_0$, $B-B_0$, $C-C_0$ ein, so erhält man

$$A-A_0 = \tfrac{1}{3}\varepsilon\left(1+\frac{b_0^2+c_0^2-2a_0^2}{60\,r^2}\right)$$

$$B-B_0 = \tfrac{1}{3}\varepsilon\left(1+\frac{a_0^2+c_0^2-2b_0^2}{60\,r^2}\right)$$

$$C-C_0 = \tfrac{1}{3}\varepsilon\left(1+\frac{a_0^2+b_0^2-2c_0^2}{60\,r^2}\right)$$

demnach mit Ausschluß der Glieder zweiter Ordnung (bei Seiten a_0 und b_0 von 100*km* Länge und für $c_0=0$ würde der Faktor

$$1+\frac{a_0^2+b_0^2}{60\,r^2} = 1{\cdot}0000082)$$

$$A_0 = A-\frac{\varepsilon}{3},\quad B_0 = B-\frac{\varepsilon}{3},\quad C_0 = C-\frac{\varepsilon}{3}$$

das Legendresche Theorem.

Der Wert von ε mit Ausschluß der Glieder zweiter Ordnung ist

$$\varepsilon = \frac{f}{r^2 \operatorname{arc} 1''}$$

identisch mit dem in Nr. 127 angegebenen. Wählt man nämlich nicht die Sekunde, sondern den Grad als Einheit, so ist

$$\varepsilon = \frac{f}{r^2 \operatorname{arc} 1^0} = \frac{f}{r^2}\,\frac{360^0}{2\pi} = \frac{f}{\pi r^2}\cdot 180°.$$

Da bei der zweiten Ableitung die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt wurden, so folgt daraus noch nicht, daß dieses der strenge Wert des sphärischen Exzesse ist, was aber aus der früheren Ableitung hervorgeht.

In früherer Zeit waren übrigens noch zwei Methoden in Anwendung, und zwar die Additamentenmethode und die Auflösung mittels des Sehnendreieckes. Unter der Voraussetzung, daß die sämtlichen Seiten des Netzes klein sind, kann der Sinussatz für das sphärische Dreieck geschrieben werden:

$$\sin\frac{b_0}{r \operatorname{arc} 1''} = \sin\frac{a_0}{r \operatorname{arc} 1''}\,\frac{\sin B}{\sin A}$$

Nun ist allgemein für kleine Winkel

$$\log\sin\frac{b_0}{r \operatorname{arc} 1''} = \log b_0 + \operatorname{Add} b$$

$$\log\sin\frac{a_0}{r \operatorname{arc} 1''} = \log a_0 + \operatorname{Add} a,$$

Winkel A, B, C um je ein Drittel des sphärischen Exzesse vermindert; die Winkel dieses ebenen Dreieckes sind daher

$A_0 = A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B_0 = B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C_0 = C - \frac{1}{3}\varepsilon$ (Legendres Theorem).

Beispiel. In dem in Nr. 128 behandelten Dreiecke: Hundsheimer—Rosalienkapelle—Magoshegh beträgt der sphärische Exzeß 13·990″; zieht man $\frac{1}{3}$ dieses Betrages, d. i. 4·663″ von den drei Winkeln ab, so werden die Winkel des ebenen Dreieckes

$A_0 = 86° 4' 19{\cdot}863''$, $B_0 = 52° 48' 41{\cdot}790''$, $C_0 = 41° 6' 58{\cdot}345''$

und dann wird die Berechnung des Dreieckes nach der ebenen Trigonometrie

$$b_0 = c_0 \frac{\sin B_0}{\sin C_0}, \quad a_0 = c_0 \frac{\sin A_0}{\sin C_0}$$

$$\begin{aligned} \log \sin C_0 &= 9{\cdot}8179541 \\ \log c_0 &= 4{\cdot}8298516 \\ \log \sin B_0 &= 9{\cdot}9012689 \\ \log \frac{c_0}{\sin C_0} &= 5{\cdot}0118975 \\ \log \sin A_0 &= 9{\cdot}9989787. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log b_0 &= 4{\cdot}9131664 \\ \log a_0 &= 5{\cdot}0108762 \end{aligned}$$

---

wobei die „Additamente“ einer Tafel entnommen werden können. Die Additamente lassen sich leicht aus der Tafel der S (in den Logarithmentafeln) ableiten; es ist Add $= S - \log \text{arc } 1'' - \log r = S - 4{\cdot}6855749 - 6{\cdot}8046411 = S - 1{\cdot}4902160$, wobei es ziemlich gleichgültig ist, welchen Wert für r man annimmt, da derselbe in der Differenz herausfällt. Nachdem auch log (arc 1″) aus der Differenz herausfällt, kann als Additament auch S oder die letzten Stellen von S angesehen werden. Am besten wird es als Additament 1·4902 — 10 + letzte Stellen von S = 8·5097 + letzte Stellen von S anzugeben (wenn log Seitenlänge größer ist als 6·3120 ist jedoch 8·5098 zu nehmen), da dann log (Seitenlänge) + 8·5097 sofort gebildet und die nächsten Stellen angehängt werden können. In dieser Weise ist das folgende Beispiel gerechnet. S ist aber mit dem Argumente log (Seitenlänge) — log r arc 1″ = log Seitenlänge + 8·5097 zu entnehmen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \log c_0 &= 4{\cdot}8298516 \\ \text{Add} &= 8{\cdot}5097{,}667 \\ \log c_0 + \text{Add} &= 3{\cdot}3396183 \\ \log \sin C &= 9{\cdot}8179654 \\ \log \sin B &= 9{\cdot}9012763 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log b_0 + \text{Add} &= 3{\cdot}4229292 \\ \text{Add} &= 8{\cdot}5097{,}629 \\ \log b_0 &= 4{\cdot}9131663 \end{aligned}$$

Zur Auflösung mittels des Sehnendreieckes denkt man sich zu den drei Bögen a, b, c auf der Erdoberfläche die zugehörigen Sehnen s_1, s_2, s_3, die natürlich nahe der Oberfläche im Innern der Erde verlaufen; dann findet sich zwischen diesen Sehnen die Beziehung

$$s_1 : s_2 : s_3 = \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right) : \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right) : \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

ein von Grunert im 25. Bde. des Archivs für Mathematik und Physik bewiesener Satz. Dann ist für jede Sehne

$$\frac{s}{2r} = \sin \frac{\text{Seite}}{2r \text{ arc } 1''}.$$

Die in der Formel auftretenden Winkel gehören jedoch keinem ebenen Dreiecke an, denn ihre Winkelsumme ist nicht gleich 180°.

130. Die geographischen Koordinaten auf der Erdkugel und ihre Beziehung zum Fixsternhimmel. Ist das Dreiecksnetz vollständig berechnet, so handelt es sich darum, die geographische Lage der einzelnen Punkte auf der Erdoberfläche unabhängig voneinder zu ermitteln. Für einzelne derselben, und zwar für eine möglichst große Zahl der Triangulierungspunkte erster Ordnung werden dieselben direkt beobachtet, für die übrigen müssen dieselben mittels der geodätischen Messungen „übertragen" werden.

Als geographische Koordination hat man die geographische Breite und die geographische Länge von einem angenommenen Anfangsmeridian, ferner das Azimut von einer gemessenen Richtung anzusehen. Ist BB_1 (Fig. 267) die Erdachse, AA_1 der Erdäquator, so ist für einen Punkt M, wenn O der Erdmittelpunkt ist, der Winkel $MOA = \varphi$ die geographische Breite und alle Punkte auf dem Parallelkreise MM_1 haben dieselbe geographische Breite. Diese kann man aber auf der Erde nicht messen, da Äquator und Parallelkreise nicht wirklich vorhandene Linien sind. Wohl aber kann man die geographische Breite aus astronomischen Beobachtungen ermitteln. Die Verlängerung des Erdradius OM bestimmt auf der Himmelskugel das Zenit Z, denn die berührende Ebene in M ist der wahre Horizont HH_1 und die Verlängerung von OB sowie die dazu parallel durch M gezogene Gerade MP ist die Richtung der Weltachse und trifft die Himmelskugel in dem Weltpol P.

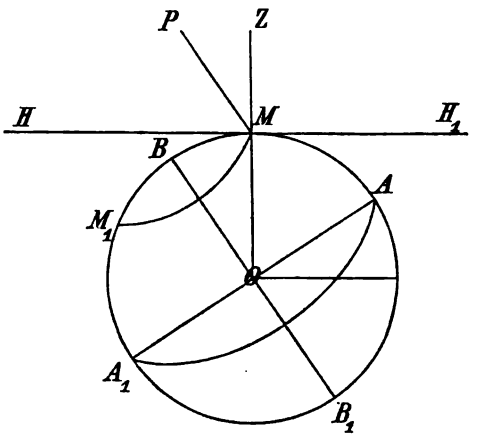


Fig. 267.

Der Winkel PMH ist die Höhe des Weltpoles über dem Horizonte, die sogenannte Polhöhe des Ortes. Da aber $MP \perp AA_1$, $MH \perp MO$ ist, so ist $\sphericalangle PMH = \sphericalangle AOM$, d. h. die Polhöhe ist gleich der geographischen Breite.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Orte auf der Erde genügt aber die Angabe ihrer geographischen Breite allein nicht; es ist noch die Angabe der Lage des Ortes in dem Parallelkreise MM_1 nötig. Zu diesem Zwecke werden durch die verschiedenen Punkte die Meridiane BMB_1 gelegt. Der Winkel, welchen diese Ebenen oder deren größte Kreise für zwei Punkte auf der Erdkugel, die Erdmeridiane miteinander einschließen, nennt man den Längenunterschied. Statt dieser relativen Bestimmung kann man die Längenunterschiede aller Punkte von einem gewissen Anfangspunkte aus angeben. Während sich für die geographische Breite eine ganz bestimmte Linie, der Erdäquator, von selbst darbietet, ist dieses für die Längen nicht der Fall und die Wahl des Anfangspunktes ist ganz willkürlich. Tatsächlich sind verschiedene Anfangspunkte im Gebrauche; man zählt vom Meridian von Greenwich, von Paris und nebstdem hat sich die ältere Zählweise nach dem Meridian von Ferro erhalten, obzwar in einer wesentlich modifizierten Form

Dem Zentriwinkel am Mittelpunkte der Erde von 1″ entspricht eine Länge von etwa 30 *m* auf der Erdoberfläche (im Parallel noch im Verhältnis des cosinus der Breite verkleinert). An zwei Punkten eines Gebäudes von mäßiger Größe werden daher die Vertikalen schon merklich konvergieren, wenn man, wie dies bei astronomischen Beobachtungen von einiger Genauigkeit schon nötig ist, die Bogensekunde als einen merkbaren Betrag betrachtet. Greenwich (bei London), Paris, die Insel Ferro haben aber Punkte, die mehrere Kilometer voneinander entfernt sind und die östlichsten und westlichsten Punkte von Ferro haben über 5′ Längendifferenz. Die Längen müssen daher von ganz bestimmten Punkten gezählt werden und dies sind diejenigen Punkte, in welchen die Hauptinstrumente (Meridiankreise) der Sternwarten von Paris und Greenwich aufgestellt sind. Auch die Zählung von Ferro ist eine bestimmte; als sogenannter Meridian von Ferro ist derjenige gewählt, der genau 20° westlich von dem angenommenen Anfangsmeridian von Paris geht.

Infolge der täglichen Rotation der Erde scheinen die Sterne an der Himmelskugel Parallelkreise zu beschreiben und nur ein Stern, welcher im

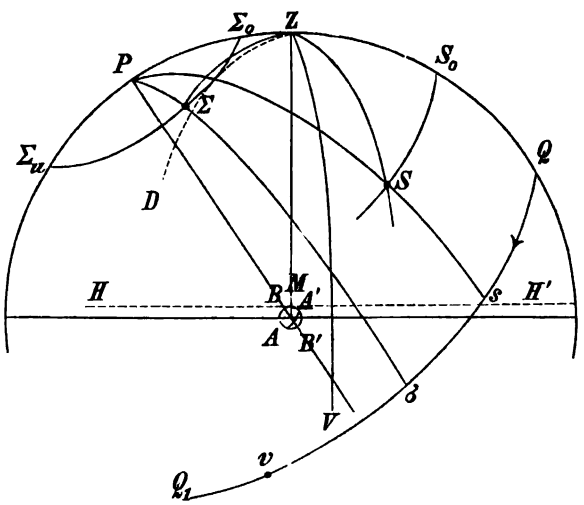


Fig. 268.

Pole selbst, d. i. in der Richtung der Weltachse *OP* (Fig. 268), der Verlängerung der Erdachse BB_1, stehen würde, würde seinen Ort nicht verändern. Sterne, die weitab vom Pole stehen, werden auf- und untergehen, über dem Horizont ihren Tagebogen, unter demselben ihren Nachtbogen beschreiben und einmal ihre größte Höhe erreichen; sie kulminieren (im Meridian), S_0 für den Stern *S*. Ein Stern Σ in der Nähe des Poles wird im ganzen Parallel über dem Horizont bleiben, dabei den Meridian beidemale über dem Horizont passieren; einmal über dem Pol in seiner größten Höhe, in der oberen Kulmination Σ_0, einmal unterhalb des Poles in seiner kleinsten Höhe, in der unteren Kulmination Σ_u. Man nennt diese Sterne Zirkumpolarsterne. Ist *Z* das Zenit, so sind *ZS*, *ZΣ* die Zenitdistanzen, die Winkel *H′ZS*, *H′ZΣ* die Azimute.

Man kann jedoch die Koordinaten der Sterne auf der Himmelskugel statt auf das System des Horizontes auf das System des Äquators beziehen. Eine Ebene durch den Weltpol P und den Stern S steht senkrecht zum Äquator und schneidet die Himmelskugel in einem größten Kreise PS, dem Deklinationskreise und ist QQ_1 der größte Kreis, in welchem die Verlängerung des Erdäquators die Himmelskugel trifft, der Himmelsäquator, und s der Punkt, in welchem dieser von dem Deklinationskreise des Sternes getroffen wird, so nennt man den Bogen $sS = \measuredangle\, sOS$, wenn O der Mittelpunkt der Weltkugel ist, die Deklination δ des Gestirnes und das Komplement $SP = 90° - \delta = p$ die Poldistanz (Abstand vom Pol im Winkelmaß). Zur Fixierung der Lage des Sternes ist noch notwendig, daß man die Lage seines Deklinationskreises kennt und dieses geschieht, indem man den Winkel zwischen diesem und dem Meridian PZQ des Ortes angibt.

Der Stern bewegt sich in oder mit seinem Deklinationskreise im Laufe eines Tages weiter, und zwar während einer vollen Umdrehung der Erde um 360°; diese Zeit nennt man einen Sterntag. In $\frac{1}{24}$ des Sterntages, d. i. einer Sternzeitstunde nach seiner Kulmination hat der Stern einen Bogen S_0S vom Meridian gegen Westen beschrieben, so daß $\measuredangle\, S_0PS = QOs = 15°$ ist und überhaupt ist die Lage eines Sternes vor oder nach seiner Kulmination durch den sphärischen Winkel $QPs = QOs$ bestimmt, welcher der Stundenwinkel heißt; daher werden auch die Deklinationskreise Stundenkreise genannt. Der Stundenwinkel wird vom Meridian (Süden) gegen Westen, Norden, Osten von 0° bis 360° gezählt.

Alle Sterne kulminieren nicht gleichzeitig, haben also auch zur selben Zeit nicht denselben Stundenwinkel. So ist in der Figur der Stundenwinkel von $S: t = S_0PS = QPs$; der Stundenwinkel des Sternes Σ hingegen $\tau = \Sigma_0 P\Sigma = QP\sigma$. Da sich die Sterne aber gleichzeitig miteinander bewegen, so wird der zwischen ihren Deklinationskreisen eingeschlossene Winkel $sP\sigma = SP\Sigma$ bei dieser Drehung immer derselbe bleiben. Um ihn stets angeben zu können, wird für jeden Stern der Winkel zwischen dem Deklinationskreise und einem bestimmten angenommenen (wie bei der geographischen Länge auf der Erde) bekannt sein müssen.

Man könnte als ersten Stundenkreis den einem beliebigen Stern zugehörigen wählen, ist aber übereingekommen, als Anfangspunkt der Zählung im Äquator denjenigen Punkt zu wählen, in welchem die Sonnenbahn (Ekliptik, welche sich an der Himmelskugel ebenfalls als größter Kreis darstellt) den Äquator schneidet, und zwar denjenigen der beiden Punkte, in welchem die Sonne am 21. März steht, den Frühlingspunkt (Υ). Man nennt den Bogen $\Upsilon s = \alpha$ die Rektaszension oder gerade Aufsteigung des Sternes S (daher $\Upsilon\sigma$ die Rektaszension des Sternes Σ), welche, entgegengesetzt den Stundenwinkeln, in der Richtung von Westen über Süd, Ost, Nord gezählt werden.

Der Frühlingspunkt nimmt an der täglichen Bewegung teil, kommt also einmal in den Meridian und man nennt den Moment seiner Kulmination 0^h Sternzeit; von diesem Momente wird der Sterntag gezählt, und zwar von 0^h bis 24^h, bis zu seiner nächsten Kulmination. In dem Momente der Kulmination des Sternes S hat der Frühlingspunkt schon einen gewissen

Stundenwinkel θ, und zwar da Ss gerade im Meridian ist, den Stundenwinkel $s\Upsilon = \alpha$; es ist daher die Sternzeit der Kulmination eines Sternes gleich der Rektaszension α und allgemein wird, wenn der Stern einen Stundenwinkel t erreicht hat, der Stundenwinkel θ des Frühlingspunktes um t größer als α, also

$$\theta = \alpha + t.$$

Um diese Beziehung stets sofort in Zeit zu erhalten, werden die Rektaszensionen ausnahmslos im Zeitmaß und Stundenwinkel für diesen Zweck ebenfalls im Zeitmaß ausgedrückt, wobei $15° = 1^h$ ist.

Beispiel: Die Rektaszension eines Sternes sei $\alpha = 10^h\ 2^m\ 35^s$; der Stundenwinkel ist daher um $3^h\ 4^m\ 26^s$ Sternzeit: $t = \theta - \alpha = 17^h\ 1^m\ 51^s$; von Süd über West gezählt.

Denkt man sich auf der Erdoberfläche zwei Orte in einem gewissen Momente gerade in derjenigen Lage, daß die Verlängerung ihrer Meridianebenen durch PSs beziehungsweise $P\Sigma\sigma$ am Himmel gehen, so wird die Längendifferenz gleich der Differenz der Winkel Υs und $\Upsilon\sigma$, d. h. gleich der Differenz der Stundenwinkel des Frühlingspunktes an den beiden Orten sein. Ist daher die Sternzeit für den östlich gelegenen Ort θ_o, für den westlich gelegenen θ_w, so ist die Längendifferenz $\Delta\lambda = \theta_o - \theta_w$. Hätte man für einen gewissen Moment, der an beiden Orten durch ein gegebenes Signal (Pulverblitz) oder durch einen elektrischen Strom angegeben wird, die diesem Momente entsprechenden Ortszeiten bestimmt, so gibt die Differenz der Ortszeiten sofort den Längenunterschied.

Der Beobachter befindet sich aber auf der Erdoberfläche (in M) und nicht im Erdmittelpunkte O; beachtet man aber, daß die Entfernung der Sonne von der Erde etwa 150 Millionen *km*, der Erdhalbmesser 6370 *km* und die Entfernung des nächsten Fixsternes etwa 200.000 Mal größer als die Entfernung der Sonne ist, also die Entfernung der Sonne von der Erde 23500 Erdhalbmesser, diejenige des nächsten Fixsternes etwa 4700,000.000 Erdhalbmesser ist, so kann man sich das Himmelsgewölbe wohl als eine unermeßlich große Kugel um die kleine Erde denken; stellt man sich die letztere als Sandkorn von 0·1 *mm* Halbmesser vor, so müßte man dem Himmelsgewölbe einen Halbmesser von mindestens 470 *km* geben, welchem gegenüber die Verschiebung des Horizontes in M nach dem Erdmittelpunkte O völlig belanglos ist.*

* Wollte man die mitunter noch festgehaltene Fiktion von einem „scheinbaren" Horizonte durch M und einem „wahren" durch O festhalten, so könnte man doch mit derselben Berechtigung von einem „wahren" Weltpol in der Verlängerung von OB und einem „scheinbaren" in der Richtung MP sprechen. Daß für nahe Gestirne die Richtungsänderung (Parallaxe) und für eine Erhebung über dem Erdboden die Richtungsänderung (Kimmtiefe) zu berücksichtigen ist, ist selbstverständlich; gerade der durch die Kimmtiefe erweiterte Horizont ist als scheinbarer Horizont zu bezeichnen.

131. Bestimmung der geographischen Koordinaten.

a) Die geographische Breite.

1. Da $P\Sigma_o = P\Sigma_u$

ist, so wird

$$ZP = \tfrac{1}{2}(ZP + P\Sigma_u + ZP - P\Sigma_o) = \tfrac{1}{2}(Z\Sigma_u + Z\Sigma_o) = \tfrac{1}{2}(z_o + z_u).$$

Man erhält daher die Zenitdistanz des Weltpoles als das arithmetische Mittel aus den Meridianzenitdistanzen eines Zirkumpolarsternes in seiner oberen und unteren Kulmination und die geographische Breite

$$\varphi = 90° - ZP = 90° - \tfrac{1}{2}(z_o + z_u) \quad \ldots\ldots (1)$$

2. Wurde für einen Stern, dessen Deklination δ bekannt ist, seine Meridianzenitdistanz beobachtet, so findet man, da

$$ZQ = PH = \varphi$$

ist,

$$ZQ = ZS_0 + QS_0,$$

daher

$$\varphi = z_0 + \delta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2a)$$

wenn der Stern südlich vom Zenit kulminiert, und

$$QZ = Q\Sigma_0 - Z\Sigma_0$$

oder

$$\varphi = \delta - z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2b)$$

wenn der Stern nördlich vom Zenit (gegen den Weltpol zu) kulminiert.

3. Aus jeder zu einer beliebigen Zeit gemessenen Zenitdistanz eines bekannten Sternes (dessen Rektaszension und Deklination bekannt ist), erhält man die Polhöhe; denn aus der bekannten Rektaszension und Zeit folgt der Stundenwinkel des Sternes und dann durch Rechnung aus dem sphärischen Dreiecke ZPS, in welchem $PS = 90° - \delta$ und $ZPS = t_0$ bekannt und $ZS = z$ gemessen wurde, die Seite $ZP = 90° - \varphi$.

Zu beachten ist dabei nur, daß, wenn die Zeit nicht sehr genau bekannt ist, die Polhöhe dadurch unter Umständen merklich fehlerhaft werden kann. Beobachtet man nämlich den Stern ziemlich weit (zwei bis drei Stunden) nach oder vor seiner Kulmination, so wird sich seine Höhe rasch ändern und wenn die Uhr ein bis zwei Minuten fehlerhaft zeigt, so ist leicht zu sehen, daß die beobachtete Zenitdistanz gar nicht zu dem angenommenen Stundenwinkel gehört und diese irrtümlich zueinander gehörig angenommenen Werte von Stundenwinkel und Zenitdistanz müssen natürlich eine ganz andere geographische Breite geben. Um von dem Fehler der Uhr unabhängig zu sein, ist es daher nötig, für die Zwecke der Pohlhöhenbestimmung die Zenitdistanzen dann zu beobachten, wenn dieselben sich selbst in bedeutenden Zeitintervallen nur sehr wenig ändern, d. h. in der Nähe des Meridians

Man hätte z. B. den Stern α Leonis (für 1903 $\alpha = 10^h 3^m 13^s$, $\delta = +12° 26{\cdot}4'$) an einer nach Sternzeit gehenden Uhr zur Uhrzeit $12^h 1^m 29^s$, wenn er eben seine Höhe nicht mehr zu ändern also seine größte Höhe erreicht zu haben scheint, also nahe im Meridian, in der Zenitdistanz $z = 15° 14' 38''$ beobachtet. Da die Uhr

nicht die richtige Zeit angibt (nicht weil sie falsch geht, sondern weil man die Ortszeit noch nicht kennt, wenn man an einem Orte von unbekannter Position eben angekommen wäre), so ist der Stundenwinkel unbekannt; jedenfalls muß er klein sein, da der Stern nahe im Meridian ist. Immerhin wird die Zenitdistanz für den Meridiandurchgang etwas, aber nur wenig kleiner sein. Fürs erste kann der beobachtete Wert als ein genäherter Wert der Meridianzenitdistanz angesehen werden, welcher nur noch um eine kleine Korrektion zu verbessern sein wird, die später angebracht werden kann, wenn ein besserer Wert der Ortszeit bekannt ist. Für diese Annahme wird dann $\varphi = z + \delta = 27°\,41'$ ein genäherter Wert der Polhöhe.

Man wird gut tun, mehrere Zenitdistanzen in der unmittelbaren Nähe (zu beiden Seiten) des Meridians zu beobachten: Zirkum-Meridian-Zenitdistanzen.*

b) Die Zeit- und Längenbestimmung. 1. Ist die Polhöhe bekannt, so kennt man jetzt in dem Dreiecke PZS die Seite $PZ = 90° - \varphi$ und aus der Beobachtung der Zenitdistanz z eines bekannten Sternes, dessen Deklination δ sei, die beiden anderen Seiten $PS = 90° - \delta$ und $ZS = z$, kann daher den Stundenwinkel t berechnen und damit dann die Sternzeit der Beobachtung $\theta = t + \alpha$. Zeigt die Uhr aber u, so ist diese Angabe fehlerhaft und es ist $\theta - u = x$ und dann $\theta = u + x$.

Man nennt x den Stand der Uhr oder die Uhrkorrektion. Ist dieser Wert bekannt, so kann man zu jeder Uhrangabe u die zugehörige Sternzeit finden.

Für die Bestimmung der Zeit, d. h. von θ aus Zenitdistanzen der Sterne darf man aber die Sterne nicht in der Nähe des Meridians beobachten, sondern im Gegenteil möglichst weit weg vom Meridian; denn in der Nähe des Meridians ändert sich die Zenitdistanz nur langsam; wird daher die Zenitdistanz nur um 1″ fehlerhaft gemessen, so kann dem schon ein um 1 bis 2^m fehlerhafter Stundenwinkel entsprechen. Beobachtet man aber außerhalb des Meridians, wenn die Zenitdistanz sich rasch ändert, so wird der Stundenwinkel durch die Angabe der Zenitdistanz sicher bestimmt

Beispiel 1. Hätte man zur Uhrzeit $u = 15^h\,30^m\,56^s$ die Zenitdistanz desselben Sternes (α Leonis) $z = 51°\,2'\,48''$ beobachtet, so würde die Rechnung für den Stundenwinkel

$$t = 52°\,19' = 3^h\,29^m\,16^s$$

ergeben und da

$$\alpha = \quad 10\;\;3\;\;13$$

ist, so wird

$$\theta = 13^h\,32^m\,29^s,$$

folglich $x = \theta - u = -1^h\,58^m\,27^s$, um welchen Wert alle Zeitangaben zu korrigieren sind, um aus den Angaben der Uhr Sternzeit des Beobachtungsortes zu erhalten.

* Weitere Details s. in den Handbüchern der geographischen Ortsbestimmung.

Da der Uhrzeit $u = 12^h 1^m 29^s$ der ersten Beobachtung (Zenitdistanz nahe im Meridian) die Sternzeit $\theta = u + x = 12^h 1^m 29^s - 1^h 58^m 27^s = 10^h 3^m 2^s$ entspricht, so war der Stundenwinkel der ersten Beobachtung $t = \theta - \alpha = -11^s = -2' 45''$; mit diesem Stundenwinkel und der zugehörigen Zenitdistanz $z = 15° 14' 38''$ kann jetzt die Polhöhe genauer berechnet werden.

Die Uhr wird offenbar um $1^h 58^m 27^s$ zu viel zeigen, wenn der Ort westlich vom Ausgangsorte liegt und die Uhr nicht verstellt wurde. Würde die Uhr nach richtiger Zeit Hamburg gestellt sein, so würde dies heißen, daß der Ort, an welchem die obigen Beobachtungen gemacht wurden, $1^h 58^m 27^s = 29° 36' 45''$ westlich von Hamburg liegt. Da die Polhöhe nahe 27° 41′ gefunden wurde, so entspricht dies einem Punkte westlich von den Kanarischen Inseln.

Beispiel 2. Der helle Stern Fomalhaut ($\alpha = 22^h 52^m 17^s$, $\delta = -30° 8{\cdot}2'$) wurde um $19^h 36^m 55^s$ Uhrzeit in der Zenitdistanz 25° 44·9′ beobachtet; der Stern stieg weiter an und um $20^h 57^m 28^s$ Uhrzeit wurde er in 17° 43·6′ Zenitdistanz (im Maximum derselben, bei scheinbar unveränderlicher Höhe), und zwar gegen den Südpol zu, beobachtet. Die Uhr war nach Greenwicher Zeit gestellt.

Aus der zweiten Beobachtung folgt für die Zenitdistanz des Äquators (gegen Norden) 30° 8·2′ — 17° 43·6′ = 12° 24·6′ = südliche Breite des Ortes; mit dieser, der Deklination und gemessenen ersten Zenitdistanz ergibt sich der Stundenwinkel 20° 10·3′ = $1^h 20^m 41^s$ östl., daher $22^h 52^m 17^s - 1^h 20^m 41^s = 21^h 31^m 36^s$ als Sternzeit der ersten Beobachtung; die Uhr war also $21^h 31^m 36^s - 19^h 36^m 55^s = 1^h 54^m 41^s$ gegen Ortszeit zurück: daraus folgen die Koordinaten des Beobachtungsortes $\varphi = -12° 24·6'$; $\lambda = 1^h 54^m 41^s = 28° 40·2'$ östl. Länge von Greenwich. Weiter folgt für die Ortszeit der zweiten Beobachtung $20^h 57^m 28^s + 1^h 54^m 41^s = 22^h 52^m 9^s$, so daß der Stern für die Zeit der Beobachtung einen Stundenwinkel von 8^s (vor dem Meridiandurchgang) hatte. Auch hier wird man mehrere Zenitdistanzen hintereinander beobachten, um das Resultat sicherer zu erhalten.*

2. Beobachtet man die Uhrzeiten, zu denen derselbe Stern gleiche Höhen vor und nach seinem Meridiandurchgange hat (wie groß diese Höhe ist, ist dabei gleichgültig), so erhält man die Zeit des Meridiandurchganges gleich dem arithmetischem Mittel der beobachteten Uhrzeiten, denn der Stern braucht dieselbe Zeit zum Ansteigen zu seiner größten Höhe, als zum Herabsteigen von dieser zu der ursprünglichen Zenitdistanz.

Hätte man z. B. dieselbe Zenitdistanz des Sternes α Leonis um $11^h 33^m 56^s$ und um $15^h 30^m 59^s$ am selben Tage beobachtet, so wäre die Sternzeit der größten Höhe, also des Meridiandurchganges

$$\tfrac{1}{2}(15^h 30^m 59^s + 11^h 33^m 56^s) = 13^h 32^m 27·5^s$$

woraus wieder der Uhrstand folgt. Auch hier müssen die Zenitdistanzen möglichst weit weg vom Meridian genommen werden.

* Die einzelnen Resultate müssen nicht genau übereinstimmen und werden es infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auch nicht. Man nimmt dann aus allen das Mittel.

3. Kennt man die Richtung des Meridians, so kann man die Zeit beobachten, zu welcher ein Stern durch denselben hindurchgeht; das dazu verwendete Instrument ist das Passageninstrument. Hat man z. B. die Uhrzeit des Durchganges von α Leonis $u = 10^h\,2^m\,58^s$ beobachtet, so ist die Uhr zurück, da der Stern um $10^h\,3^m\,13^s$ durchgehen sollte und die Uhrkorrektion wäre $x = \theta - u = +\,15^s$.

Dazu ist eine genaue Kenntnis der Richtung des Meridians nötig, welche daher vorangehen muß (s. Nr. 132).

Die Reduktionen werden nun allerdings nicht so einfach, da man bei Zenitdistanzen auf die Refraktion, bei der Sonne auch auf die Parallaxe, überdies bei dieser auch auf die Änderung ihres Ortes, Zu- oder Abnahme der Deklination und Rektaszension, Rücksicht zu nehmen hat.*

132. Bestimmung des Azimutes. Auf diese Aufgabe muß hier genauer eingegangen werden, da dieselbe im VII. Bande dieser Sammlung (Vorwort, S. VII) ausdrücklich aus diesem Grunde übergangen wurde.

a) Aus korrespondierenden Höhen. Die einfachste Methode wurde bereits erwähnt: der Gnomon. Im wesentlichen werden dabei zwei vertikale Ebenen NS_1, NS'_1 (Fig. 105) beobachtet, in denen die Sonne gleiche Zenitdistanz hat, wodurch die Schattenlänge dieselbe wird: die Meridianebene halbiert dann den Winkel dieser beiden Ebenen. Dieselbe Methode kann auch für genaue Beobachtungen angewendet werden. Man beobachtet ein Gestirn an einem Universalinstrument in einer gewissen Höhe vor dem Meridiandurchgange und liest am Horizontalkreise ab; dann wird das Instrument, ohne es in Höhe zu verstellen, in das Azimut gebracht, in welchem der Stern nach der Kulmination dieselbe Höhe erreicht, und nunmehr in dieser Lage der Stern beobachtet, d. h. das Instrument dem Sterne nachgedreht, bis dieser am Mittelfaden erscheint; dann wird der Horizontalkreis wieder abgelesen. Das Mittel der beiden Ablesungen gibt die Richtung des Meridians. (Hat man gleichzeitig die Uhrzeit abgelesen, so erhält man auch die Zeit des Meridiandurchganges als Mittel der beiden Uhrzeiten.) Wird hierauf ein terrestrisches Objekt eingestellt und ebenfalls am Horizontalkreise abgelesen, so erhält man in der Differenz der Lesungen das Azimut des Objektes.

Beispiel:

Höhe um	$8^h\,17^m\,34{\cdot}2^s$	Lesung am Horizontalkreise**	$166°\,25'\,44{\cdot}8''$
dieselbe Höhe um	12 46 8·3	„ „ „	260 53 22·6
Einstellung auf das terrestrische Objekt			$176°\,25'\,15{\cdot}9''$
Mittel der Uhrzeiten	10 31 51·2	Lesung im Meridian	213 39 33·7
Wäre die Rektaszension des Gestirnes	10 30 42·8	Azimut des Objektes	$322°\,45'\,42{\cdot}2''$
so ist der Uhrstand	$-\,1^m\,8{\cdot}4^s$		(oder $-\,37°\,14'\,17{\cdot}8''$ von Süd gegen Ost).

* Vgl. Herr, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Valentiner, Handwörterbuch der Astronomie, Gelcich, Geographische Ortsbestimmung usw.

** Mittel aus beiden Mikroskopen, korrigiert wegen Achsenneigung und Kollimationsfehler.

Beobachtet man die Sonne, so muß man auf die während der Zwischenzeit stattfindende Änderung der Höhe Rücksicht nehmen.* Sei AB_0 (Fig. 269) der Bogen des Parallels, so würde die Sonne eine gewisse Höhe über dem Horizonte in den Punkten A und B_0 erreichen. Sind die zugehörigen Lesungen

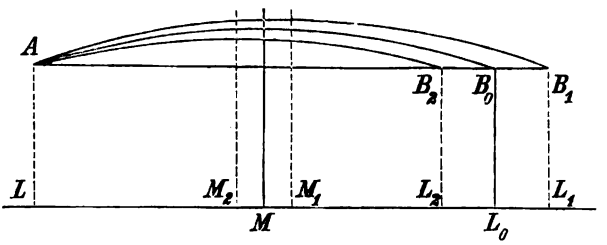


Fig. 269.

am Horizontalkreise L, L_0, so ergibt sich die Richtung des Meridians in der Mittelstellung M, für welche die Lesung $\frac{1}{2}(L + L_0)$ ist. Steigt aber die Sonne in der Zwischenzeit, d. h. nimmt die Deklination zu, so wird sie für die Lesung L_0 noch nicht dieselbe Höhe erreicht haben, wie vor der Kulmination, sondern noch etwas zu hoch stehen und erreicht erst die angenommene Höhe in B_1, für welchen Punkt die Lesung am Horizontalkreise L_1 ist; die gefundene Meridianrichtung M_1 ist daher noch zu korrigieren. Desgleichen, wenn die Deklination der Sonne abnimmt, wodurch man eine Lesung L_2 erhält und eine Meridianrichtung M_2, die zu weit nach der andern Seite verschoben ist.

Ändert sich die Deklination der Sonne um $\Delta\delta$, so wird das zur selben Zenitdistanz gehörige Azimut um**

$$\Delta A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi \sin z \sin A}\Delta\delta = \frac{1}{\cos\varphi \sin t}\Delta\delta$$

zu korrigieren, demnach

$$L_1 = L_0 + \Delta A \quad \text{und} \quad M = M_1 - \tfrac{1}{2}\Delta A.$$

---

* Auch die Rektaszension ändert sich; aber da diese Änderungen gleichmäßig stattfinden, so werden die Zwischenzeiten vor und nach der Kulmination um gleiche Beträge geändert, das arithmetische Mittel der Zeiten gibt daher wieder die Zeit der Kulmination der Sonne, d. i. den wahren Mittag. Die aus der Deklinationsänderung folgende Korrektion der Uhrzeit nennt man die Mittagsverbesserung; auf diese wird hier nicht eingegangen.

** Aus dem Dreiecke PZS (Fig. 268) hat man

$$\sin\delta = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos A.$$

Bei ungeänderten Werten von φ und z wird daher zwischen den Änderungen $d\delta$ und dA die folgende durch Differentiation erhaltene Beziehung bestehen:

$$\cos\delta\, d\delta = \cos\varphi \sin z \sin A\, dA$$

woraus $$dA = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi \sin z \sin A} d\delta$$

und da $$\sin z \sin A = \cos\delta \sin t$$

ist: $$dA = \frac{1}{\cos\varphi \sin t} d\delta \quad \text{folgt.}$$

Zur Berechnung muß daher die Deklination der Sonne und deren Änderung in der Zwischenzeit der Beobachtung und entweder die Zenitdistanz oder der Stundenwinkel der Sonne bekannt sein.

Beispiel. Sei im vorigen Beispiele (S. 311) die Sonne beobachtet, und zwar 1903 August 30 in Wien ($\varphi = 48° 12{\cdot}8'$) in der Zenitdistanz $48° 0'$ (genähert). Die Änderung der Deklination in 48 Stunden (zwischen Aug. 29 und 31) aus den Ephemeriden* ist $-42{\cdot}7'$, daher die stündliche Änderung $-53{\cdot}38''$ und in der Zwischenzeit von $4^h 28^m 34^s$ gleich $-238{\cdot}9''$. Aus den Kreislesungen folgt $A = \frac{1}{2}(260° 53' 23'' - 166° 25' 45'') = 47° 13' 49''$. Dann wird

δ	$= +9° 21{\cdot}4'$	log Zähler	$2{\cdot}3724_n$
log cos δ	$= 9{\cdot}9942$	log Nenner	$9{\cdot}5605$
log $\Delta\delta$	$= 2{\cdot}3782_n$	log ΔA	$= 2{\cdot}8119_n$
log cos φ	$= 9{\cdot}8237$	ΔA	$= -648{\cdot}5'' = -10' 48{\cdot}5''$
log sin z	$= 9{\cdot}8711$	ΔM	$= -\frac{1}{2}\Delta A = +5\ 24{\cdot}2$
log sin A	$= 9{\cdot}8657$	M_2	$= 213° 39' 33{\cdot}7''$
		daher die korrigierte Lesung	$213° 44' 57{\cdot}9''$
		Azimut des Objektes	$322° 40' 18{\cdot}0''$.

Da in diesem Falle auch die Uhrzeiten gelesen wurden, demnach der Stundenwinkel bekannt ist (gleich der halben Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen $= 2^h 14^m 17^s = 33° 34' 15''$), so kann man auch die zweite Formel anwenden. Es wird

log $\Delta\delta$	$= 2{\cdot}3782_n$	
log cos φ	$= 9{\cdot}8237$	
log sin t	$= 9{\cdot}7427$	
log ΔA	$= 2{\cdot}8118_n$	wie oben.

133. Azimutbestimmung aus den Azimuten eines Zirkumpolarsternes (meist des Polaris) in der Nähe seiner größten Digression. Man hat aus dem sphärischen Dreiecke $PZ\Sigma$ (Fig. 268), in welchem $P\Sigma = 90° - \delta$, $Z\Sigma = z$, $PZ = 90° - \varphi$ und die Winkel $PZ\Sigma = 180° - A$, $ZP\Sigma = t$ sind:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\sin z \sin A = \cos\delta \sin t$$
$$\sin z \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t.$$

Durch Division der letzten beiden Formeln folgt

$$\operatorname{tang} A = \frac{\cos\delta \sin t}{-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t},$$

welche Formel man auch schreiben kann

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin t}{-\cos\varphi \operatorname{tang}\delta + \sin\varphi \cos t}$$

* Ephemeriden sind Sammlungen von Tafeln, in denen die Stellungen der Gestirne und die für astronomische Rechnungen nötigen Reduktionselemente für die Dauer eines Jahres zusammengestellt sind. Solche sind das „Berliner Astronomische Jahrbuch", die Pariser „Connaissance des temps", der Greenwicher „Nautical Almanac", der Washingtoner „Nautical Almanac" u. a.

oder auch in logarithmisch tauglicher Form durch Einführung eines Hilfswinkels, wenn

$$\cos\varphi = m \sin M$$
$$\sin\varphi \cos t = m \cos M$$

gesetzt wird $$\operatorname{tang} A = \frac{\cos\delta \sin t}{m \cos (M + \delta)}.$$

Schreibt man $$\operatorname{tang} A = -\frac{\cot\delta \sec\varphi \sin t}{1 - \operatorname{tang}\varphi \cot\delta \cos t},$$

so kann man mit dem Argumente

$$a = \operatorname{tang}\varphi \cot\delta \cos t$$

aus den Additions- und Subtraktionslogarithmen oder aus besonderen zu diesem Zwecke konstruierten Tafeln den Wert von

$$\log \frac{1}{1 - \operatorname{tang}\varphi \cot\delta \cos t} = b$$

entnehmen und hat dann*

$$\log \operatorname{tang} A = \log (-\cot\delta \sec\varphi \sin t) + b.$$

Zur Beobachtung macht man vorerst ein oder zwei Einstellungen auf das terrestrische Objekt; sodann stellt man den Stern ein, beobachtet seinen Durchgang durch den Vertikalfaden (da seine Zenitdistanz nicht benötig wird, so bleibt der Horizontalfaden völlig unberücksichtigt), notiert Uhrzeit und die Lesung am Horizontalkreise, dann die Lesung der Achsenlibelle. Hierauf folgt eine zweite Einstellung des Sternes in derselben Weise, Umsetzen und Lesen der Libelle; Durchschlagen des Fernrohres und neuerdings zwei Einstellungen des Sternes; endlich wieder ein oder zwei Einstellungen des terrestrischen Objektes.

Beispiel. Zur Bestimmung des Azimutes der Richtung „Sternwarte Athen—Parnes" beobachtete Oberst Hartl im Juni 1890 achtzehn Sätze bei verschiedenen Stellungen des Horizontalkreises. Von diesen war** der erste Satz:

Datum Uhrkorrektion Position des Polaris	Kreislage	Objekt	Uhrzeit u	Ablesung am Horizontalkreise	Korrektion wegen Neigung
	R	Parnes	—	0° 1′ 16·6″	—
	R	„	—	1 15·1	—
1890 Juni 12.	R	Polaris	$10^h\ 45^m\ 52^s$	359 15 7·0	+ 10·3″
$x = -1^m\ 14{\cdot}92^s$	R	„	48 30	16 2·6	+ 9·6
$\alpha = 1^h\ 18^m\ 3{\cdot}61^s$	L	„	57 58	179 19 9·5	+ 2·1†
$\delta = 88°\ 43'\ 2{\cdot}32''$	L	„	59 55	19 48·6	+ 3·6
	L	Parnes	—	180 1 6·6	—
	L	„	—	1 8·6	—

* Diese Formel ist in Herr, „Lehrbuch der sphärischen Astronomie", pag. 522 zu korrigieren.

** Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. LIX (1892), S. 562.

† In der Publikation ein Fehler von 1^m in der Uhrzeit.

Die Polhöhe des Beobachtungspunktes wurde zur selben Zeit bestimmt; die vorangegangene Reduktion der Beobachtungen ergab

$$\varphi = 37^\circ\ 58'\ 20{\cdot}1''.$$

Zur Berechnung nach der ersten Formel hat man für die erste Beobachtung des Polaris*

$\theta = u + x =$	$10^h\ 44^m\ 37{\cdot}08^s$	$\log(\sin\varphi\cos\delta\cos t) =$	$8{\cdot}0334181_n$
$t = \theta - \alpha =$	$9\ 26\ 33{\cdot}47$	$\log(-\cos\varphi\sin\delta) =$	$9{\cdot}8965876_n$**
$\log\cos t =$	$9{\cdot}8943831_n$	Add Log. $=$	$0{\cdot}0059109$
$\log\sin\varphi =$	$9{\cdot}7890726$	log Nenner $=$	$9{\cdot}9024985_n$
$\log\cos\delta =$	$8{\cdot}3499624$	$\log(\cos\delta\sin t) =$	$8{\cdot}1427798$
$\log\sin t =$	$9{\cdot}7928174$	log tang $A =$	$8{\cdot}2402813_n$
$\log\cos\varphi =$	$9{\cdot}8966964$	$A =$	$179^\circ\ 0'\ 13{\cdot}57''$
$\log\sin\delta =$	$9{\cdot}9998912$	Lesung $=$	$359\ 15\ 17{\cdot}3$
		Meridianpunkt $=$	$180^\circ\ 15'\ 3{\cdot}7''$
		Lesung bei Einstellung auf Parnes:	$0\ 1\ 15{\cdot}8$
		Azimut von Parnes:	$179\ 46\ 12{\cdot}1$

Die Verwendung der zweiten Form bietet gegenüber dieser Rechnung keine wesentlichen Vorteile; für die Anwendung der Formel mit den Hilfsgrößen m und M wird (für die zweite Beobachtung siebenstellig, für die dritte sechsstellig)

$u + x$	$10^h\ 47^m\ 15{\cdot}08^s$	$10^h\ 56^m\ 43{\cdot}08^s$
t	$9\ 29\ 11{\cdot}47$	$9\ 38\ 39{\cdot}47$
$\log\sin t$	$9{\cdot}7864373$	$9{\cdot}762201$
$\log\cos t$	$9{\cdot}8982863_n$	$9{\cdot}911573_n$
$\log(m\sin M)$***	$9{\cdot}8966964$	$9{\cdot}896696$
sin od. cos	$9{\cdot}9298480$	$9{\cdot}926098$
$\log(m\cos M)$	$9{\cdot}6873589_n$	$9{\cdot}700646_n$
log tang M	$0{\cdot}2093375_n$	$0{\cdot}196050_n$
M	$121\ 41\ 48{\cdot}62$	$122\ 29\ 8{\cdot}9$
$M + \delta$	$210\ 24\ 50{\cdot}94$	$211\ 12\ 11{\cdot}2$
$\log\cos\delta\sin t$	$8{\cdot}1363997$	$8{\cdot}112163$
$\log m$	$9{\cdot}9668484$	$9{\cdot}970598$
$\log\cos(M + \delta)$	$9{\cdot}9357030_n$	$9{\cdot}932137_n$
log tang A	$8{\cdot}2338483_n$	$8{\cdot}209428_n$
A	$179^\circ\ 1'\ 6{\cdot}29''$	$179^\circ\ 4'\ 19{\cdot}5''$
Lesung	$359\ 16\ 12{\cdot}20$	$179\ 19\ 11{\cdot}6$
Meridianpunkt	$180\ 15\ 5{\cdot}9$	$0\ 14\ 52{\cdot}1$
Einstellung auf Parnes	$0\ 1\ 15{\cdot}8$	$180\ 1\ 7{\cdot}6$
Azimut von Parnes	$179\ 46\ 9{\cdot}9$	$179\ 46\ 15{\cdot}5$

* Die Logarithmen von Stundenwinkeln in Zeit können aus des Verfassers Logarithmentafeln direkt entnommen werden.

** Konstant für alle Beobachtungen desselben Tages.

*** Die konstanten Logarithmen, wie $\cos\varphi$, $\cos\delta$ usw. können dabei auf den unteren Rand eines Papierstreifens geschrieben und über die einzelnen Zeilen, mit denen sie zu verbinden sind, geschoben werden, so der $\log\cos\delta$ über die Zeile $\log\sin t$ zur Bildung von $\log(\cos\delta\sin t)$; ebenso $\log\sin\varphi$ über die Zeile $\log\cos t$ zur Bildung von $\log(m\cos M)$.

Als Beispiel für die Anwendung der dritten Formel ist für die letzten beiden Beobachtungen (in sechsstelliger Rechnung):

log tang φ	9·892376
log cot δ	8·350071
log sec φ	0·103304
log (— cot δ sec φ)	$8{\cdot}453375_n$
log cot δ tang φ	8·242447

(Diese beiden Koeffizienten konstant für den ganzen Satz.)

$u + x$	$10^h\ 56^m\ 43{\cdot}08^s$	$10^h\ 58^m\ 40{\cdot}08^s$
t	9 38 39·47	9 40 36·47
sin t	$9{\cdot}762201$	$9{\cdot}756942$
cos t	$9{\cdot}911573_n$	$9{\cdot}914169_n$
log a	$8{\cdot}154020_n$	$8{\cdot}156616_n$
b	9·993852	9·993809
log (— cot δ sec φ sin t)	$8{\cdot}215576_n$	$8{\cdot}210317_n$
log tang A	$8{\cdot}209428_n$	$8{\cdot}204126_n$
A	179° 4′ 19·5″	179° 5′ 0·0″
Lesung	179 19 11·6	179 19 52·2
Meridianpunkt	0 14 52·1	0 14 52·2
Einstellung auf Parnes	180 1 7·6	180 1 7·6
Azimut von Parnes	179 46 15·5	179 46 15·4

Einzelwerte	bei K R	179° 46′ 12·1″
		46 9·9
	bei K L	179 46 15·5
		46 15·4
Mittel aus dem ersten Satz:		179° 46′ 13·2″

Beobachtet man das Gestirn zu einer Zeit, wenn seine Azimutänderung rasch ist, so wird ein kleiner Fehler der Uhrzeit das Resultat merklich ändern können; denn das gerechnete Azimut entspricht dann einem andern Stundenwinkel (um die Größe des Uhrfehlers geändert) als dem beobachteten. Von diesem Fehler wird man frei, wenn die Azimutänderung eine sehr langsame ist, denn dann wird das Azimut zum angenommenen Stundenwinkel oder zum richtigen, etwas geänderten, nur wenig verschieden sein, und zwar um so weniger, je langsamer die Bewegung des Sternes im Azimut ist. Rasche Änderungen finden aber in der Nähe der Kulmination, im Meridian statt; daraus folgt, daß man zu Azimutbestimmungen das Gestirn nicht in der Nähe des Meridians beobachten soll. Die langsamste Änderung haben die Gestirne, wenn sie in ihrem Parallel gerade in absteigender Bewegung zum Horizont oder in aufsteigender Bewegung von demselben begriffen sind; dann sind sie am weitesten vom Meridian weg, und zwar im Azimute 90°, dem Höhenkreise, welcher der „erste Vertikal“ V (Fig. 268)

genannt wird,* oder für Zirkumpolarsterne, welche diesen nicht schneiden (Σ, Fig. 268) in ihrer „größten Digression", d. i. wenn sie ihr größtes Azimut

* Aus der für die Azimutberechnung gegebenen Formel folgt

$$\cot A \sin t = -\cos\varphi \operatorname{tang}\delta + \sin\varphi \cos t.$$

Die Azimutänderung wird Null, wenn $dA : dt = 0$ ist; man erhält durch Differentiation (φ und δ konstant):

$$-\frac{dA}{dt} \cdot \frac{\sin t}{\sin A^2} + \cot A \cos t = -\sin\varphi \sin t,$$

daher für $dA : dt = 0$:

$$\cot A = -\sin\varphi \operatorname{tang} t,$$

welche Gleichung in Verbindung mit

$$\cot A = \frac{-\cos\varphi \operatorname{tang}\delta + \sin\varphi \cos t}{\sin t}$$

durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke den Wert

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\delta}$$

und damit

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$$

liefert. Bezeichnet man den Winkel am Stern $P\Sigma Z$ mit p, so ist

$$\cos\delta \sin p = \cos\varphi \sin A$$

und daraus

$$\sin A = \frac{\cos\delta \sin p}{\cos\varphi}.$$

Es ist aber

$$\cos p = \cos t \cos A + \sin t \sin A \sin\varphi$$

$$= \sin A (\cos t \cot A + \sin t \sin\varphi) = \frac{\sin t}{\sin A^2} \frac{dA}{dt} = 0,$$

demnach $p = 90°$ und

$$\sin A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}.$$

Aus der Formel

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

folgt für die Änderung der Zenitdistanz

$$-\sin z \frac{dz}{dt} = -\cos\varphi \cos\delta \sin t$$

und da

$$\cos\varphi \sin t = \sin z \sin p$$

ist, so wird

$$\frac{dz}{dt} = \cos\delta \sin p = \cos\varphi \sin A.$$

Die Änderung der Zenitdistanz wird daher am raschesten, wenn $\sin p$ oder $\sin A$ ihr Maximum 1 erreichen (da δ und φ für einen bestimmten Stern am selben Orte konstant sind). Beide gleichzeitig könnten nur 1 werden, wenn $\delta = \varphi$ ist, d. h. für einen Stern, der im Zenit kulminiert.

Ist $\delta < \varphi$, für Sterne, die südlich vom Zenit kulminieren, so kann A jeden beliebigen Wert erreichen und für $A = 90°$ folgt

$$\sin p = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}.$$

Wenn aber $\delta > \varphi$ ist, so wird p jeden beliebigen Wert annehmen können und es wird für $p = 90°$

$$\sin A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

d. h. das Azimut der größten Digression.

(von Norden an gerechnet) haben, also der Höhenkreis (D, Fig. 268) den Parallelkreis $\Sigma_0 \Sigma \Sigma_u$ berührt.

Sterne, die nahe dem Äquator stehen, kann man in der Nähe des ersten Vertikales nicht beobachten, weil sie hier zu tief stehen (Sterne im Äquator gehen ja im ersten Vertikal auf und unter), doch muß man in diesen Fällen die Beobachtungen tunlichst weit vom Meridian, so aber, daß der Stern noch nicht zu nahe dem Horizont steht, anstellen.

Allerdings wird hierbei keine Zenitdistanz gemessen, so daß die astronomische Refraktion eigentlich nicht zu berücksichtigen ist. Allein in der Nähe des Horizontes findet eine sogenannte Lateralrefraktion statt, infolge deren die Bilder der Gegenstände etwas seitlich verschoben erscheinen. Die Ursache dieser Erscheinung ist die verschiedene Erwärmung der Luftschichten über verschiedenen Kulturarten. Namentlich dort, wo die Visur nahe über einer in derselben Richtung verlaufenden Grenze von zwei Feldmarken streicht, von denen die eine z. B. sandiger Boden, die andere Wiesengrund ist, oder in der Nähe von Flußufern wird diese Erscheinung die Azimutmessung merklich beeinflussen.*

134. Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Koordinaten. Wie dies schon in Nr. 121 ausgeführt wurde, wählt man den gegen Süden gerichteten Teil des Meridians eines Fixpunktes als positive x-Achse,

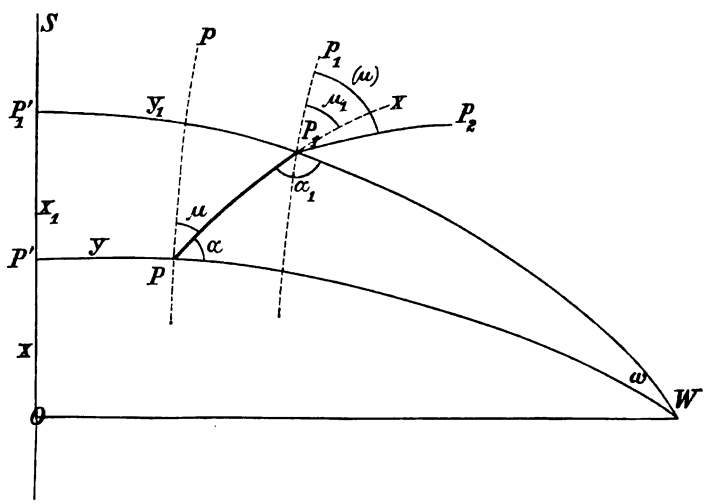


Fig. 270.

die nach Westen darauf errichtete Senkrechte als positive y-Achse. Nur hat man es jetzt mit Perpendikeln auf der Kugel, d. i. mit größten Kreisen PP', P_1P_1' (Fig. 270) zu tun, die sich sämtlich in einem Punkte W schneiden, der von dem größten Kreise OS um 90° absteht. Ist dann $OP' = x$, $P'P = y$; $OP_1' = x_1$, $P_1'P_1 = y_1$; $PP_1 = \Delta$ im linearen Maße ausgedrückt, so erhält man die zugehörigen Bögen

* Eine Erscheinung, die übrigens auch bei Horizontalwinkelmessungen mitunter störend auftritt.

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}; \quad \xi_1 = \frac{x_1}{R}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{R}; \quad \delta = \frac{\Delta}{R}$$

und in dem sphärischen Dreiecke PP_1W sind die Seiten

$$PP_1 = \delta; \quad PW = 90° - \eta; \quad P_1W = 90° - \eta_1$$

und die gegenüberliegenden Winkel

$$P_1WP = \omega = \xi_1 - \xi; \quad PP_1W = \alpha_1; \quad P_1PW = \alpha.$$

Zum Übergange von den Koordinaten eines Punktes P zu denjenigen des nächsten P_1 ist daher nächst der Länge Δ noch die Richtung dieser Strecke nötig. Zu diesem Zwecke führte Soldner, von dem diese Zählungsweise der Koordinaten herrührt, die Winkel μ, μ_1 ein, welche die Richtung Δ mit den in den Punkten P, P_1 auf den größten Kreisen PW, P_1W senkrechten Richtungen Pp, P_1p_1 einschließt. Diese Richtungen Pp, P_1p_1 sind aber nicht identisch mit den Meridianen in den Punkten P und P_1. Der Meridian von P z. B. müßte ja den Meridian OP_1' im Pole schneiden, während der auf PW senkrechte größte Kreis in einem Punkte schneidet, der von P' um 90° entfernt ist, also um die geographische Breite φ des Punktes P weiter ab liegt. Die angegebenen senkrechten Richtungen können aber ersetzt werden durch die zum Meridian OS parallelen kleinen Kreise (eine Art Parallelkreise) in den einzelnen Punkten und man nennt die Winkel μ, μ_1 die Richtungswinkel der Richtung Δ in den Punkten P und P_1. Wie aus der Figur folgt, ist

$$\alpha = 90° - \mu; \quad \alpha_1 = 90° + \mu_1.$$

Nimmt man an, daß die rechtwinkeligen Koordinaten x, y (folglich auch ξ, η) von P bereits bekannt sind, ebenso Δ und der Winkel α (oder μ) behufs Übergang auf den Punkt P_1, so erhält man die Koordinaten x_1, y_1 von P_1 nebst dem für den Übergang auf den nächsten Punkt notwendigen Winkel α_1 aus dem sphärischen Dreiecke PP_1W nach den Formeln (1) S. 297: Von diesen werden aber nur diejenigen praktisch, welche $\sin \eta_1$ und $\sin \omega$ geben, während dann eine der Neperschen Analogien die Summe $\alpha + \alpha_1 = 180° + (\mu_1 - \mu)$ gibt. Hiernach hat man

$$\sin \omega = \frac{\sin (90° - \mu)}{\sin (90° - \eta)} \sin \delta$$

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \operatorname{tang} \left(90° + \frac{\mu_1 - \mu}{2}\right) = \frac{\cos \frac{1}{2}[(90° - \eta) - (90° - \eta_1)]}{\cos \frac{1}{2}[(90° - \eta) + (90° - \eta_1)]} \cot \frac{\omega}{2}$$

welche Gleichungen für die Auflösung

$$\sin \eta_1 = \cos \delta \sin \eta + \sin \delta \cos \eta \sin \mu$$

$$\sin (\xi_1 - \xi) = \frac{\cos \mu}{\cos \eta} \sin \delta \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\operatorname{tang} \frac{\mu - \mu_1}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\eta + \eta_1)}{\cos \frac{1}{2}(\eta - \eta_1)} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi)$$

geschrieben werden. Die Koordinaten x, y und die Entfernungen Δ werden jedoch nur auf mäßige Entfernungen vom Anfangspunkte Q aus gerechnet und sind daher die Größen ξ, ξ_1, η, η_1, kleine Größen, weshalb es praktisch ist, statt der obigen Formeln Reihenentwicklungen zu setzen. Man erhält,* wenn

$$\Delta \sin \mu = \Delta_1, \qquad \Delta \cos \mu = \Delta_2$$

gesetzt wird:

$$x_1 - x = \Delta_2 + \tfrac{1}{2} \frac{y^2}{R^2} \Delta_2 - \tfrac{1}{6} \frac{\Delta_2 \Delta_1^2}{R^2}$$

$$y_1 - y = \Delta_1 - \tfrac{1}{2} \frac{y}{R^2} \Delta_2^2 - \tfrac{1}{6} \frac{\Delta_1 \Delta_2^2}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\mu_1 - \mu = -\left(\frac{y}{R^2} \Delta_2 + \tfrac{1}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{R^2} \right) : \text{arc } 1''$$

Für den Übergang auf den nächsten Dreieckspunkt P_2 ist $(\mu) = p_1 P_1 P_2 = \mu_1 + x P_1 P_2 = \mu_1 + (P P_1 P_2 - 180°)$ wobei der Winkel $P P_1 P_2$ von der Richtung $P_1 P$ zur nächsten $P_1 P_2$ im Sinne der Drehung zu zählen ist.

Beispiel. Für den Dreieckspunkt I. Ordnung Hermannskogel (103) als Ausgangspunkt wurde die Richtung nach dem Hundsheimer (100) 1892 bestimmt und ist

$$A = 287° \; 31' \; 41{\cdot}70''.$$

---

* Das Beispiel S. 299 zeigt auffallend die Unbequemlichkeit, welche für die Rechnung daraus resultiert, daß selbst für mehrere *km* lange Seiten der Winkel am Erdmittelpunkte nur einige Minuten beträgt. Ersetzt man daher in den Formeln (1) die goniometrischen Funktionen durch Reihen, so folgt:

$$\eta_1 - \tfrac{1}{6}\eta_1^3 = (\eta - \tfrac{1}{6}\eta^3)(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2) + (\delta - \tfrac{1}{6}\delta^3)(1 - \tfrac{1}{2}\eta^2) \sin\mu$$
$$= \eta(1 - \tfrac{1}{6}\eta^2 - \tfrac{1}{2}\delta^2) + \delta \sin\mu (1 - \tfrac{1}{6}\delta^2 - \tfrac{1}{2}\eta^2)$$

und daraus, wenn für $\frac{1}{6}\eta_1^3$ der Näherungswert $\frac{1}{6}(\eta + \delta \sin\mu)^3$ eingeführt und reduziert wird,

$$\eta_1 = \eta + \delta \sin\mu - \tfrac{1}{2}\eta\,\delta^2 \cos\mu^2 - \tfrac{1}{6}\delta^3 \sin\mu \cos\mu^2;$$

$$(\xi_1 - \xi) - \tfrac{1}{6}(\xi_1 - \xi)^3 = \frac{\cos\mu}{1 - \frac{1}{2}\eta^2}(\delta - \tfrac{1}{6}\delta^3) = \delta\cos\mu(1 + \tfrac{1}{2}\eta^2 - \tfrac{1}{6}\delta^2),$$

demnach

$$\xi_1 - \xi = \delta \cos\mu (1 + \tfrac{1}{2}\eta^2 - \tfrac{1}{6}\delta^2 \sin\mu^2);$$

$$\frac{\mu - \mu_1}{2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\mu - \mu_1}{2}\right)^3 = \frac{\frac{1}{2}(\eta + \eta_1) - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}(\eta + \eta_1)\right]^3}{1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\eta_1 - \eta)\right]^2} \left[\frac{\xi_1 - \xi}{2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\xi_1 - \xi}{2}\right)^3\right]$$
$$= (\eta + \tfrac{1}{2}\delta \sin\mu) \cdot \tfrac{1}{2}\delta \cos\mu$$

folglich

$$\mu - \mu_1 = \eta\,\delta \cos\mu + \frac{\delta^2}{4} \sin 2\mu;$$

daher wird

$$x_1 - x = \Delta \cos\mu \left[1 + \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{R^2} - \tfrac{1}{6}\frac{\Delta^2}{R^2} \sin\mu^2\right]$$

$$y_1 - y = \Delta \sin\mu - \tfrac{1}{2}\, y \frac{\Delta^2}{R^2} \cos\mu^2 - \tfrac{1}{6}\frac{\Delta^3}{R^3} \sin\mu \cos\mu^2.$$

Setzt man hier

$$\Delta \sin\mu = \Delta_1, \qquad \Delta \cos\mu = \Delta_2$$

so erhält man die oben angegebenen Formeln.

Für den Ausgangspunkt O ist (Fig. 270) $\mu = A$; die Entfernung Hermannskogel-Hundsheimer ist

$$\log \Delta = 4{\cdot}7021012{,}8.$$

Damit wird die Berechnung nach den Reihen (2):

$\log \sin \mu$	$9{\cdot}9793520_n$	$\log (\Delta_2 \Delta_1^2 : R^2)$	$9{\cdot}93455$
$\log \Delta$	$4{\cdot}7021013$	$\log (\Delta_1 \Delta_2^2 : R^2)$	$9{\cdot}43402_n$
$\log \cos \mu$	$9{\cdot}4788203$	$\log (\Delta_1 \Delta_2 : R^2 \text{ arc } 1'')$	$0{\cdot}56752_n$
$\log \Delta_1$	$4{\cdot}6814533_n$	Δ_2	$+ 15167{\cdot}77$
$\log \Delta_1 \Delta_2$	$8{\cdot}862375_n$	$-\frac{1}{6}(\Delta_2 \Delta_1^2 : R^2)$	$- 0{\cdot}14$
$\log \Delta_2$	$4{\cdot}1809216$	Δ_1	$- 48023{\cdot}44$
$\log \Delta_1^2 \Delta_2$	$13{\cdot}54383$	$-\frac{1}{6}(\Delta_1 \Delta_2^2 : R^2)$	$+ 0{\cdot}05$
$\log \Delta_1 \Delta_2^2$	$13{\cdot}04330_n$	$x_1 - x = x_1 =$	$+ 15167{\cdot}63\ m$ Koordinaten des
$\log R^2$	$13{\cdot}60928$	$y_1 - y = y_1 =$	$- 48023{\cdot}39\ m$ Hundsheimer
$\log \text{arc } 1''$	$4{\cdot}68557 - 10$	$\mu_1 - \mu =$	$+ 1{\cdot}85''$
		$\mu_1 =$	$287^\circ\ 31'\ 43{\cdot}55''$.

Zum Übergang auf den Dreieckspunkt Magoš-hegy ist der Winkel

$$\text{Hermannskogel—Hundsheimer—Magoš-hegy} = 210^\circ\ 30'\ 27{\cdot}92'' = 180^\circ + 30^\circ\ 30'\ 27{\cdot}92''$$

und die Länge der Seite Hundsheimer—Magoš-hegy $= \log \Delta = 4{\cdot}9131663{,}4$.

Es ist daher nunmehr $\mu = 287^\circ\ 31'\ 43{\cdot}55'' + 30^\circ\ 30'\ 27{\cdot}92''$, d. h. $\mu = 318^\circ\ 2'\ 11{\cdot}47''$. Für die weitere Rechnung sind daher x, y die Koordinaten des Hundsheimer und die Rechnung gestaltet sich daher für die folgenden Punkte (vgl. das Dreiecksnetz Tafel I) folgendermaßen, wobei die konstanten Werte $\log R^2 = 13{\cdot}60928$* und $\log \text{arc } 1'' = 4{\cdot}68557$ bei jeder Rechnung wiederkehren.

Ausgangspunkt	Hundsheimer	Magoš-hegy	Geschriebenstein
$\log \sin \mu$	$9{\cdot}8252033_n$	$9{\cdot}9834309$	$9{\cdot}4876281_n$
$\log \Delta$	$4{\cdot}9131663$	$4{\cdot}9812157$	$4{\cdot}9940864$
$\log \cos \mu$	$9{\cdot}8713226$	$9{\cdot}4330407$	$9{\cdot}9784534$
$\log \Delta_1$	$4{\cdot}7383696_n$	$4{\cdot}9646466$	$4{\cdot}4817145_n$
$\log \Delta_1 \Delta_2$	$9{\cdot}522858_n$	$9{\cdot}378903$	$9{\cdot}454254_n$
$\log \Delta_2$	$4{\cdot}7844889$	$4{\cdot}4142564$	$4{\cdot}9725398$
$\log \Delta_2 y$	$9{\cdot}46594_n$	$9{\cdot}42612_n$	$8{\cdot}99727_n$
$\log y$	$4{\cdot}68145_n$	$5{\cdot}01186_n$	$4{\cdot}02473_n$
$\log \Delta_1^2 \Delta_2$	$14{\cdot}26123$	$14{\cdot}34355$	$13{\cdot}93597$
$\log \Delta_1 \Delta_2^2$	$14{\cdot}30735_n$	$13{\cdot}79316$	$14{\cdot}42679_n$
$\log y^2 \Delta_2$	$14{\cdot}14739$	$14{\cdot}43798$	$13{\cdot}02200$
$\log y \Delta_2^2$	$14{\cdot}25043_n$	$13{\cdot}84038_n$	$13{\cdot}96981_n$

* Mittlerer Krümmungshalbmesser in der geographischen Breite 45°.

Ausgangspunkt	Hundsheimer	Magoš-hegy	Geschriebenstein
$\log (y \Delta_2 : R^2)$	$5{\cdot}85666_n - 10$	$5{\cdot}81684_n - 10$	$5{\cdot}38799_n - 10$
$\log (\Delta_1 \Delta_2 : R^2)$	$5{\cdot}91358_n - 10$	$5{\cdot}76962 - 10$	$5{\cdot}84497_n - 10$
$\log (y^2 \Delta_2 : R^2)$	$0{\cdot}53811$	$0{\cdot}82870$	$9{\cdot}41272 - 10$
$\log (y \Delta_2^2 : R^2)$	$0{\cdot}64115_n$	$0{\cdot}23110_n$	$0{\cdot}36053_n$
$\log (\Delta_1^2 \Delta_2 : R^2)$	$0{\cdot}65195$	$0{\cdot}73427$	$0{\cdot}32669$
$\log (\Delta_1 \Delta_2^2 : R^2)$	$0{\cdot}69807_n$	$0{\cdot}18388$	$0{\cdot}81751_n$
Δ_2	$+ 60882{\cdot}00$	$+ 25957{\cdot}11$	$+ 93872{\cdot}80$
$+ \frac{1}{2} (y^2 \Delta_2 : R^2)$	$+ 1{\cdot}73$	$+ 3{\cdot}37$	$+ 0{\cdot}13$
$- \frac{1}{6} (\Delta_1^2 \Delta_2 : R^2)$	$- 0{\cdot}75$	$- 0{\cdot}90$	$- 0{\cdot}35$
Δ_1	$- 54748{\cdot}16$	$+ 92182{\cdot}11$	$- 30318{\cdot}97$
$- \frac{1}{2} (y \Delta_2^2 : R^2)$	$+ 2{\cdot}18$	$+ 0{\cdot}85$	$+ 1{\cdot}15$
$- \frac{1}{6} (\Delta_1 \Delta_2^2 : R^2)$	$+ 0{\cdot}83$	$- 0{\cdot}25$	$+ 1{\cdot}09$
$- (y \Delta_2 : R^2 \text{ arc } 1'')$	$+ 14{\cdot}83''$	$+ 13{\cdot}53''$	$+ 5{\cdot}04''$
$- \frac{1}{2} (\Delta_1 \Delta_2 : R^2 \text{ arc } 1'')$	$+ 8{\cdot}45$	$- 6{\cdot}07$	$+ 7{\cdot}22$
$x_1 - x$ in Meter	$+ 60882{\cdot}98$	$+ 25959{\cdot}58$	$+ 93872{\cdot}58$
$y_1 - y$ in Meter	$- 54745{\cdot}15$	$+ 92182{\cdot}71$	$- 30316{\cdot}73$
$\mu_1 - \mu$	$+ 23{\cdot}28''$	$+ 7{\cdot}46''$	$+ 12{\cdot}26''$
μ_1	$318° 2' 34{\cdot}75''$	$74° 16' 32{\cdot}30''$	$342° 6' 14{\cdot}49''$

Koordinaten des	Magoš-hegy (104)	Geschriebenstein (99)	Gurgo-hegy (220)
x_1 (Meter)	$+ 76050{\cdot}61$	$+ 102010{\cdot}19$	$+ 195882{\cdot}77$
y_1 (Meter)	$- 102768{\cdot}54$	$- 10585{\cdot}83$	$- 40902{\cdot}56$
Winkel $-180°$	(100) – (104) – (99)	(104) – (99) – (220)	
	$116° 13' 50{\cdot}09''$	$267° 49' 29{\cdot}93''$	
$\mu =$	$74\ 16\ 24{\cdot}84$	$342\ \ 6\ .\ 2{\cdot}23$	
log Seite	(104) – (99)	(99) – (220)	
	$4{\cdot}9812156{,}9$	$4{\cdot}9940864{,}3$	

135. Bestimmung der Distanz und der Richtungswinkel aus den rechtwinkligen Koordinaten. Man erhält aus dem sphärischen Dreiecke PP_1W (Fig. 270) zur Bestimmung von δ, μ und μ_1:

$$\cos \delta = \sin \eta \sin \eta_1 + \cos \eta \cos \eta_1 \cos \omega$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} (\mu - \mu_1) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta)}{\cos \frac{1}{2} (\eta_1 - \eta)} \text{tang } \tfrac{1}{2} (\xi_1 - \xi)$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} (\mu + \mu_1) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\eta_1 - \eta)}{\cos \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta)} \cot \tfrac{1}{2} (\xi_1 - \xi)$$

oder in Reihen entwickelt:*

$$\cot \mu_0 = \frac{x_1 - x}{y_1 - y}; \quad \begin{matrix} \cos \mu_0 \text{ mit dem Zeichen von } x_1 - x \\ \sin \mu_0 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad y_1 - y \end{matrix}$$

* $(1 - \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{24} \delta^4) = (\eta - \frac{1}{6} \eta^3) (\eta_1 - \frac{1}{6} \eta_1^3) +$
$+ (1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{24} \eta^4) (1 - \frac{1}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{24} \eta_1^4) (1 - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{24} \omega^4)$
$\frac{1}{2} \delta^2 - \frac{1}{24} \delta^4 = \frac{1}{2} (\eta - \eta_1)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{24} (\eta - \eta_1)^4 - \frac{1}{4} \omega^2 (\eta^2 + \eta_1^2) - \frac{1}{24} \omega^4$

$$\tfrac{1}{2}(\mu+\mu_1)-\mu_0 = -\tfrac{1}{8}\sin 2\mu_0\left[\tfrac{1}{3}\frac{(x_1-x)^2}{R^2\,\mathrm{arc}\,1''}+\tfrac{1}{6}\frac{(y_1-y)^2}{R^2\,\mathrm{arc}\,1''}-\tfrac{1}{2}\frac{(y_1+y)^2}{R^2\,\mathrm{arc}\,1''}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_1) = +\tfrac{1}{4}\frac{(y_1+y)(x_1-x)}{R^2\,\mathrm{arc}\,1''}$$

$$\Delta = \frac{y_1-y}{\sin\mu_0}\left[1-\tfrac{1}{6}\cos{\mu_0}^2\left\{\frac{(y_1-y)^2}{R^2}+\frac{3yy_1}{R^2}\right\}\right].$$

Beispiel: Nach den in Nr. 134 erhaltenen Resultaten sollen die Entfernungen und Richtungswinkel der Verbindungslinien Hundsheimer (100) — Geschriebenstein (99) und der Verbindungslinie Hermannskogel (103), Gurgo-hegy (220) bestimmt werden. Es ist

Beispiel 1		Beispiel 2	
$x = x_{100}$	$= +\ 15167{\cdot}63$	$x = x_{103}$	$= 0$
$x_1 = x_{99}$	$= +\ 102010{\cdot}19$	$x_1 = x_{220}$	$= +\ 195882{\cdot}77$
$y = y_{100}$	$= -\ 48023{\cdot}39$	$y = y_{103}$	$= 0$
$y_1 = y_{99}$	$= -\ 10585{\cdot}83$	$y_1 = y_{220}$	$= -\ 40902{\cdot}56.$

$$\mathfrak{d}^2 = (\eta-\eta_1)^2+\omega^2-\tfrac{1}{3}\omega^2(\eta^2+\eta_1{}^2+\eta\eta_1) = (\eta-\eta_1)^2+\omega^2-\tfrac{1}{3}\omega^2(\eta-\eta_1)^2-\omega^2\eta\ \eta$$

$$\mathfrak{d} = \sqrt{(\eta-\eta_1)^2+\omega^2}\left[1-\tfrac{1}{6}\frac{\omega^2(\eta-\eta_1)^2+3\eta\eta_1\omega^2}{\mathfrak{d}^2}\right].$$

Setzt man hier $\frac{1}{2}(\eta+\eta_1)=\eta_0$, $\eta-\eta_1=\Delta\eta$ ein, so ergibt sich die Formel von Helmert (l. c. I, S. 122).

$$\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_1)+\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_1)]^3 = \frac{\frac{1}{2}(\eta+\eta_1)-\frac{1}{6}[\frac{1}{2}(\eta+\eta_1)]^3}{1-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\eta-\eta_1)]^2}\left\{\tfrac{1}{2}(\xi-\xi_1)-\tfrac{1}{6}[\tfrac{1}{2}(\xi-\xi_1)]^3\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{4}(\eta+\eta_1)(\xi_1-\xi)[1-\tfrac{1}{24}(\eta+\eta_1)^2+\tfrac{1}{8}(\eta-\eta_1)^2-\tfrac{1}{24}(\xi_1-\xi)^2]$$

$$\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_1) = \tfrac{1}{4}(\eta+\eta_1)(\xi_1-\xi)$$

$$\cot\tfrac{1}{2}(\mu+\mu_1) = \frac{\frac{1}{2}(\xi_1-\xi)+\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(\xi_1-\xi)]^3}{\frac{1}{2}(\eta_1-\eta)-\frac{1}{6}[\frac{1}{2}(\eta_1-\eta)]^3}\left[1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\eta_1+\eta}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\xi_1-\xi}{\eta_1-\eta}[1+\tfrac{1}{12}(\xi_1-\xi)^2+\tfrac{1}{24}(\eta_1-\eta)^2-\tfrac{1}{8}(\eta_1+\eta)^2].$$

Setzt man

$$\cot\mu_0 = \frac{\xi_1-\xi}{\eta_1-\eta} = \frac{\omega}{\eta_1-\eta},$$

so wird

$$\cot\tfrac{1}{2}(\mu+\mu_1) = \cot\mu_0[1+\Theta]$$

und

$$\mathfrak{d} = (\eta_1-\eta)\operatorname{cosec}\mu_0\left[1-\tfrac{1}{6}\frac{\omega^2(\eta_1-\eta)^2+3\eta\eta_1\omega^2}{\mathfrak{d}^2}\right] = (\eta_1-\eta)\operatorname{cosec}\mu_0\left[1-\tfrac{1}{6}\cos{\mu_0}^2\left\{(\eta_1-\eta)^2+3\eta\eta_1\right\}\right]$$

$$\cot\tfrac{1}{2}(\mu+\mu_1)-\cot\mu_0 = \frac{\sin[\mu_0-\frac{1}{2}(\mu+\mu_1)]}{\sin\mu_0\sin\frac{1}{2}(\mu+\mu_1)} = \frac{\Theta\cos\mu_0}{\sin\mu_0}$$

$$\sin[\mu_0-\tfrac{1}{2}(\mu+\mu_1)] = \Theta\cos\mu_0\sin\tfrac{1}{2}(\mu+\mu_1)$$

und mit demselben Grade der Näherung

$$\mu_0-\tfrac{1}{2}(\mu+\mu_1) = \tfrac{1}{2}\Theta\sin 2\mu_0 = \tfrac{1}{8}\sin 2\mu_0[\tfrac{1}{3}(\xi_1-\xi)^2+\tfrac{1}{6}(\eta_1-\eta)^2-\tfrac{1}{2}(\eta_1+\eta)^2].$$

Daher wird:

	Beispiel 1	Beispiel 2
$x_1 - x$	+ 86842·56	+ 195882·77
$y_1 - y$	+ 37437·56	— 40902·56
$y_1 + y$	— 58609	— 40903
$\log (y_1 + y)$	4·76796„	4·61175„
$\log (x_1 - x)$	4·9387326	5·2919962
$\log (y_1 - y)$	4·5733075	4·6117505„
$\log (x_1 - x)^2$	9·87747	10·58399
$\log (y_1 - y)^2$	9·14661	9·22350
$\log (y_1 + y)^2$	9·53592	9·22350
$\log y$	4·68145„	—
$\log y_1$	4·02473„	—
$\log (y_1 + y)(x_1 - x)$	9·70669„	9·90375„
$\log y y_1$	8·70618	—
$+ \frac{1}{3}(x_1 - x)^2 : R^2$ arc 1″	+ 12·75″	+ 64·87″
$+ \frac{1}{6}(y_1 - y)^2 : R^2$ arc 1″	+ 1·18	+ 1·41
$- \frac{1}{2}(y_1 + y)^2 : R^2$ arc 1″	— 8·71	— 4·24
Summe_1	+ 5·22	+ 62·04
$(y_1 - y)^2 : R^2$	+ 0·0000344,6	+ 0·0000411,4
$3 y y_1 : R^2$	+ 0·0000375,0	—
Summe_2	+ 0·0000719,6	+ 0·0000411,4
$\log \cot \mu_0$	0·3654251	0·6802457„
$\log \text{Summe}_1$	0·71767	1·79267
$\log \sin 2\mu_0$*	9·86158	9·60225„
$\log \text{Summe}_2$	5·85709	5·61422
$\log \cos {\mu_0}^2$*	9·92597	9·98147
$\log [\frac{1}{6} \text{Summe}_2 \cos {\mu_0}^2]$	5·00491	4·81754
$\log [1 - \frac{1}{6} \text{Summe}_2 \cos {\mu_0}^2]$	9·9999957	9·9999971
$\log (y_1 - y)$	4·5733075	4·6117505„
$\log \sin \mu_0$*	9·5975610	9·3104867„
$2\mu_0$	46° 38′ 29″	336° 24′ 39″
μ_0	23° 19′ 14·61″	348 12 19·66
$\frac{1}{2}(\mu + \mu_1) - \mu_0$	— 0·47	+ 3·10
$\frac{1}{2}(\mu + \mu_1)$	23 19 14·14	348 12 22·76
$\frac{1}{2}(\mu - \mu_1)$	— 6·45	— 10·16
μ	23 19 7·69	348 12 12·60
μ_1	23 19 20·59	348 12 32·92
$\log \Delta$	4·9757422	5·3012609
Δ	94567·57 *m*	200106·36 *m*

* Die Werte in diesen Zeilen folgen aus dem Werte für μ_0, welcher hier sofort tiefer unten hingeschrieben wurde, da er mit dem Werte der darauffolgenden Zeile zu verbinden ist. Die Werte für $\log R^2 = 13·60928$ und $\log (R^2 \text{ arc } 1'') = 8·29485$ sind nicht angeschrieben, sondern werden am unteren Rande eines Papierstreifens geschrieben und über die betreffenden Zeilen gehalten. Man gewöhne sich auch die Logarithmen von links nach rechts im Kopfe zu addieren und zu subtrahieren und sofort die Zahlen aus den Logarithmentafeln herauszuschreiben.

Ist der eine der beiden Punkte der Koordinatenanfangspunkt, so sind Distanz Δ und Richtungswinkel in diesem Punkte die Polarkoordinaten (Richtungswinkel gleich dem Azimut). Da dann $x = y = 0$ ist, so kann einfacher (den Index 1 weglassend) geschrieben werden:

$$\cot \mu_0 = \frac{x}{y};$$

$$\tfrac{1}{2}(A + \mu_1) - \mu_0 = -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} \sin 2\mu_0 \cdot \frac{x^2 - y^2}{R^2 \operatorname{arc} 1''}$$

$$\tfrac{1}{2}(A - \mu_1) = +\tfrac{1}{4} \frac{xy}{R^2 \operatorname{arc} 1''}$$

$$\Delta = \frac{y}{\sin \mu_0}\left[1 - \tfrac{1}{6}\cos \mu_0{}^2 \frac{y^2}{R^2}\right].$$

In Beispiel 2 gibt das Resultat

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= 200106{\cdot}36\ m \\ \mu = A &= 348^\circ\ 12'\ 12{\cdot}60'' \end{aligned}\right\}$$

die Polarkoordinaten des Dreieckspunktes Gurgo-hegy bezogen auf den Hermannskogel als Ursprung.

136. Bestimmung der geographischen Koordinaten aus den rechtwinkligen. Hat man für sämtliche Punkte des Netzes die rechtwinkligen Koordinaten, so kann man für jeden Punkt aus diesen seine geographischen Koordinaten: Breiten- und Längendifferenz gegen den Ausgangsmeridian bestimmen. Seien die Koordinaten des Punktes P (Fig. 271) x_1, y_1. Die Meridiane der beiden Punkte P und O werden sich im Nordpol N schneiden und es wird daher wohl die Richtung NO senkrecht zu $PP' = y$ sein, weil die y senkrecht zu ON gezählt werden; es wird aber NP nicht senkrecht zur Richtung y sein. Da $\measuredangle NPP' = \nu$ kleiner als 90° ist, so ist zwischen dem Meridian und dem durch P zu NO parallel gelegten kleinen Kreis ein Winkel $NPp = k$, welcher die Meridiankonvergenz genannt wird. Seien φ, λ geographische Breite und Länge des Punktes O; φ_1, λ_1 ebenso für den Punkt P, so sind in dem bei P' rechtwinkligen sphärischen Dreiecke NPP' die Seiten:

$NP' = 90^\circ - \varphi + \xi$; $PP' = \eta$; $PN = 90^\circ - \varphi_1$

und die gegenüberliegenden Winkel:

$$\nu = 90^\circ - k;\quad \lambda_1 - \lambda;\quad 90^\circ$$

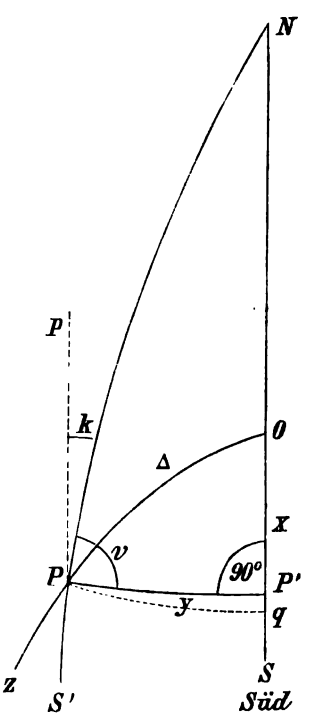


Fig. 271.

Es folgt daher:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} k &= \cos \eta \operatorname{tang} (\varphi - \xi) \\ \sin \varphi_1 &= \cos \eta \sin (\varphi - \xi) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang} (\lambda_1 - \lambda) = \frac{\operatorname{tang} \eta}{\cos (\varphi - \xi)}.$$

Auch hier sind Reihenentwicklungen praktischer, wenn die Entfernungen klein sind. Da jedoch die eigentliche „geodätische Übertragung" der geographischen Koordinaten nach Nr. 137 aus den Polarkoordinaten (Entfernungen und Azimute) ausgeführt werden kann, so kann von den Reihenentwicklungen zu dieser Lösung abgesehen werden.

137. Die geodätische Übertragung der geographischen Koordinaten. Darunter versteht man die Bestimmung der geographischen Koordinaten (Länge, Breite und Azimut $\lambda_1, \varphi_1, A_1$) eines Punktes P aus den geographischen Koordinaten λ, φ eines andern, O, wenn die Distanz Δ und das Azimut A der Richtung OP in O beobachtet wurde. Infolge der Meridiankonvergenz wird hier auch das Azimut A_1 in dem Punkte P derselben Linie ein anderes sein.

In dem Dreiecke OPN (Fig. 271) sind die Seiten

$$NO = 90° - \varphi; \quad OP = \delta \text{ und } NP = 90° - \varphi_1$$

und die gegenüberliegenden Winkel

$$NPO = \measuredangle PS' = A_1; \quad PNO = \lambda_1 - \lambda \text{ und } NOP = 180° - A,$$

von welchen φ, Δ, A als bekannt angesehen werden. Man erhält daher φ_1, $\lambda_1 - \lambda = \Delta\lambda$ und A_1 nach den Formeln

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos A$$

$$\cot \Delta\lambda = \frac{\cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \cos A}{\sin \delta \sin A}$$

$$\cot A_1 = \frac{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos A}{\cos \varphi \sin A}.$$

Gauß* gab hierfür die folgende für logarithmische Rechnung taugliche, daher bequemere Lösung. Es ist nach den Gaußschen Gleichungen [5) S. 298]

$$\begin{aligned}
\cos \tfrac{1}{2}(A - A_1) \cos \tfrac{1}{2}\delta &= \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda_1) \\
\sin \tfrac{1}{2}(A - A_1) \cos \tfrac{1}{2}\delta &= \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) \sin \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda_1) \\
\cos \tfrac{1}{2}(A + A_1) \sin \tfrac{1}{2}\delta &= \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda_1) \\
\sin \tfrac{1}{2}(A + A_1) \sin \tfrac{1}{2}\delta &= \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) \sin \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda_1).
\end{aligned}$$

Sieht man in erster Näherung $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$, $\frac{1}{2}(A + A_1)$ als bekannt an, da sie für kleine Distanzen nahe gleich den bekannten Werten φ, A sind, so kann man die Differenzen $(\varphi - \varphi_1)$, $(A - A_1)$ und $(\lambda - \lambda_1)$ leicht aus diesen Gleichungen berechnen. Die letzte Gleichung liefert zunächst

$$\sin \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda_1) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + A_1)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)} \sin \tfrac{1}{2}\delta; \quad \ldots\ldots (1)$$

dann die dritte Gleichung:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + A_1)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_1)} \sin \tfrac{1}{2}\delta; \quad \ldots\ldots (2)$$

* Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 2. Abhandlung, Nr. 58 ff.; Werke, 2. Abdruck, Bd. V, Göttingen 1880, S. 304.

endlich die zweite Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-A_1)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}\delta}\sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda_1)=$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(A+A_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Für sehr kleine Längen Δ wird hieraus*

$$\lambda_1-\lambda=-\frac{\Delta}{R\,\text{arc}\,1''}\frac{\sin A}{\cos\varphi}\left(1-\frac{\Delta}{R}\cos A\operatorname{tang}\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$\varphi_1-\varphi=-\frac{\Delta\cos A}{R\,\text{arc}\,1''}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{\Delta}{R}\sin A\operatorname{tang}A\operatorname{tang}\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

$$A_1-A=-\frac{\Delta}{R\,\text{arc}\,1''}\sin A\operatorname{tang}\varphi\left[1-\frac{\Delta}{R}\frac{\cos A}{\sin 2\varphi}(\sin\varphi^2+1)\right]. \quad (3a)$$

Bezeichnet man mit p den linearen Abstand der Parallelen der beiden Punkte,** so wird

$$p=R(\varphi-\varphi_1)$$

und da $\Delta=R\delta$ ist, so folgt

$$p=\Delta\cos A\left(1+\frac{\Delta}{2R}\sin A\operatorname{tang}A\operatorname{tang}\varphi\right).$$

---

* Mit Berücksichtigung der ersten Potenzen wird zunächst

$$\lambda-\lambda_1=\delta\frac{\sin A}{\cos\varphi};\quad \varphi-\varphi_1=\delta\cos A;\quad A-A_1=\delta\sin A\operatorname{tang}\varphi.$$

Setzt man nun

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)=\psi;\quad \tfrac{1}{2}(A-A_1)=a;\quad \tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda_1)=\tau,$$

so wird

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\varphi-\psi;\quad \tfrac{1}{2}(A+A_1)=A-a;\quad \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda_1)=\lambda-\tau,$$

daher mit Beibehaltung von Größen zweiter Ordnung:

$$\tau=\frac{\sin A-a\cos A}{\cos\varphi+\psi\sin\varphi}\cdot\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}\frac{\sin A}{\cos\varphi}(1-a\cot A-\psi\operatorname{tang}\varphi)$$

$$\psi=(\cos A+a\sin A)\cdot\frac{\delta}{2}$$

$$a=(\sin\varphi-\psi\cos\varphi)\tau=\frac{\delta}{2}(\sin A\operatorname{tang}\varphi-a\cos A\operatorname{tang}\varphi-\psi\sin A\sec\varphi^2)$$

$$\lambda-\lambda_1=\delta\frac{\sin A}{\cos\varphi}(1-\tfrac{1}{2}\delta\cos A\operatorname{tang}\varphi-\tfrac{1}{2}\delta\sin A\operatorname{tang}\varphi\cot A)=\delta\frac{\sin A}{\cos\varphi}(1-\delta\cos A\operatorname{tang}\varphi)$$

$$\varphi-\varphi_1=\delta(\cos A+\tfrac{1}{2}\delta\sin A^2\operatorname{tang}\varphi)$$

$$A-A_1=\delta(\sin A\operatorname{tang}\varphi-\tfrac{1}{2}\delta\sin A\operatorname{tang}\varphi\cos A\operatorname{tang}\varphi-\tfrac{1}{2}\delta\cos A\sin A\sec\varphi^2)$$
$$=\delta\sin A\operatorname{tang}\varphi\left[1-\tfrac{1}{2}\delta\frac{\cos A}{\sin\varphi\cos\varphi}(\sin\varphi^2+1)\right].$$

** Dieser Abstand der Parallelen ist nicht identisch mit x in Nr. 136; x ist der Abstand des Punktes P' von O, welcher durch ein sphärisches Perpendikel von P auf den Meridian gefunden wird. Der Parallelkreis Pq (Fig. 271) hingegen ist kein größter Kreis, sondern ein kleiner Kreis, der senkrecht zu beiden Meridianen steht; der größte Kreis zwischen P und q wird daher auf keinem der beiden Meridiane senkrecht stehen; es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck PNq, dessen Winkel bei P und q einander gleich, und zwar kleiner als 90°, aber größer als ν sind.

Hier ist R herausgefallen und die Kenntnis des Wertes des Erdhalbmessers ist nur nötig für die Berechnung des zweiten Gliedes, wofür, wie schon aus den früheren Beispielen ersichtlich ist, ein Näherungswert vollständig ausreicht. Man erhält daher aus der gemessenen oder berechneten Entfernung Δ den Abstand der Parallelen p.

Desgleichen folgt aus der Formel für $\lambda_1 - \lambda$ der Bogen des Parallels π:

$$\pi = \varrho\,(\lambda - \lambda_1),$$

wenn ϱ der Halbmesser des Paralleles ist, also $\varrho = R\cos\varphi$; demnach wird

$$\pi = \Delta \sin A \left(1 - \frac{\Delta}{R}\cos A \operatorname{tang}\varphi\right).$$

Beispiel: Für den Hermannskogel sind die geographischen Koordinaten

$$\varphi = 48^\circ\,16'\,15{\cdot}29''$$
$$\lambda = 33^\circ\,57'\,41{\cdot}06''\text{ von Ferro.}$$

Für den Dreieckspunkt Gurgo-hegy wurde gefunden (Nr. 135)

$$\Delta = 200106{\cdot}36\ m\ (\log = 5{\cdot}3012609)$$
$$A = 348^\circ\,12'\,12{\cdot}60''.$$

Es wird mit $R = 6{\cdot}804785$ (mittlerer Krümmungshalbmesser in der Breite $47^\circ\,50'$):

$\log\cos A$	9·990729
$\log\operatorname{tang}\varphi$	0·049694
$\log\Delta$	5·301261
$\log\sin A$	$9{\cdot}310558_n$
$\log\operatorname{tang} A$	$9{\cdot}31983_n$
$\log\Delta\cos A\operatorname{tang}\varphi$	5·34168
$\log\frac{1}{2}\Delta\sin A\operatorname{tang} A\operatorname{tang}\varphi$	3·68031
$\log\sec\varphi$	0·176781
$\log\Delta\sin A$	$4{\cdot}611819_n$
$\log(1 - \Delta R^{-1}\cos A\operatorname{tang}\varphi)$	9·984786
$\log\sin\varphi^2$	9·74583
$\log\operatorname{cosec} 2\varphi$	0·00284
$\log(1 + \sin\varphi^2)$	0·19228
$\log\Delta\cos A$	5·291990
$\log(1 + \frac{1}{2}\Delta R^{-1}\sin A\operatorname{tang} A\operatorname{tang}\varphi)$	0·000326
$\log\Delta\cos A\,(1 + \sin\varphi^2)\,R^{-1}\sin 2\varphi^{-1}$	8·68232
$\log[1 - \text{id.}]$	9·978583
$\log(\Delta\sin A\operatorname{tang}\varphi)$	$4{\cdot}661513_n$
$\log(A_1 - A)$	3·149736
$\log(\lambda_1 - \lambda)$	3·283026
$\log(\varphi_1 - \varphi)$	$3{\cdot}801956_n$
$A_1 - A$	$+\,23'\,31{\cdot}68''$
$\lambda_1 - \lambda$	$+\,31\;58{\cdot}78$
$\varphi_1 - \varphi$	$-\,1^\circ\,45'\,38{\cdot}06$
φ_1	$46\;30\;37{\cdot}23$
λ_1	$34\;29\;39{\cdot}84.$

Für die Berechnung des Abstandes der Parallelen hat man ohne eine Annahme über R zu machen:

$$\log\left(\frac{\Delta}{2R}\sin A\,\mathrm{tang}\,A\,\mathrm{tang}\,\varphi\right) = 6{\cdot}87552 - 10$$
$$\log(1+\mathrm{id.}) = 0{\cdot}0003260$$
$$\log \Delta = 5{\cdot}3012609$$
$$\log\cos A = 9{\cdot}9907294$$
$$\log p = 5{\cdot}2923163$$
$$p = 196027{\cdot}20\ m.$$

138. Gradmessungen. Das Erdellipsoid. Verbindet man zwei Punkte A und B, welche wenigstens sehr nahe im selben Meridian liegen, durch eine Kette von Dreiecken, rechnet aus den beobachteten Basen und Winkeln nach Nr. 137 den Abstand ihrer Parallelen im linearen Maße gleich p und beobachtet an den Endpunkten die Polhöhen φ und φ_1, so wird die Länge eines Meridiangrades

$$M = \frac{p}{\varphi - \varphi_1}$$

sein, und da

$$p = R\,\mathrm{arc}\,(\varphi - \varphi_1)$$

sein muß, so würde sich für die Größe des Erdradius

$$R = \frac{p}{\mathrm{arc}\,(\varphi-\varphi_1)} = \frac{p}{(\varphi-\varphi_1)\,\mathrm{arc}\,1''}$$

ergeben. In Nr. 137 wurde der Abstand der Parallelen der beiden Punkte Hermannskogel—Gurgo-hegy gleich 196027·20 m gefunden.* Hätte man nun an beiden Stationen die Polhöhen $\varphi = 48°\,16'\,15{\cdot}29''$ und $\varphi_1 = 46°\,30'\,37{\cdot}23''$ beobachtet,** so wäre $\varphi - \varphi_1 = 1°\,45'\,38{\cdot}06'' = 1{\cdot}760572° = 6338{\cdot}06''$ und somit wäre

$$\log p = 5{\cdot}2923163 \qquad \log p = 5{\cdot}2923163$$
$$\log(\varphi-\varphi_1)° = 0{\cdot}2456538 \qquad \log(\varphi-\varphi_1)'' = 3{\cdot}8019563$$
$$\log(M) = 5{\cdot}0466625 \qquad \log\mathrm{arc}\,1'' = 4{\cdot}6855749$$
$$\log R = 6{\cdot}8047851$$

die Länge des Meridiangrades: $M = 111342{\cdot}9\ m$ $\qquad R = 6379478\ m.$

In erster Näherung wurde auch die Größe der Erde nach dieser Formel bestimmt.*** Da bei dieser Art der Bestimmung die Abstände der

---

* Daher war für R nur eine genäherte Annahme wegen des Faktors

$$1 + \frac{\Delta}{2R}\sin A\,\mathrm{tang}\,A\,\mathrm{tang}\,\varphi$$

nötig; selbst ein sehr fehlerhafter Wert von R würde diesen Faktor wenigstens auf 6 Dez. noch richtig geben.

** Für die Übertragung der Polhöhe φ auf φ_1 war R schon auf 6 Stellen nötig und auch da ist die letzte Stelle in φ nicht mehr sicher; hier soll aber vorausgesetzt werden, daß auch φ_1 durch Beobachtungen bekannt wurde.

*** Eratosthenes aus dem Stande der Sonne am 21. Juni in Syene (im Zenit) und in Alexandrien ($7\frac{1}{5}°$ südlich vom Zenit); Posidonius aus dem Stande des Sternes Kanopus in Rhodus (im Horizont) und in Alexandrien (in $7\frac{1}{2}°$ Höhe) und der gemessenen Entfernung der Beobachtungsorte.

Parallelen, also die Länge eines Breitengrades bestimmt wird, so nennt man diese Art der Messung Breitengradmessungen.

Man kann aber auch eine Dreieckskette zwischen zwei Punkten A und B legen, die nahe im selben Parallelkreis liegen. Die Beobachtungen ergeben dann den Wert von π und da

$$\pi = R \cos \varphi \, (\lambda_1 - \lambda)$$

ist, so wird

$$R = \frac{\pi}{(\lambda_1 - \lambda) \cos \varphi}.$$

Messungen dieser Art, welche sich längs eines Parallelkreises zwischen zwei Punkten verschiedener Länge erstrecken, nennt man Längengradmessungen.

Um die Erddimensionen aus Breitengradmessungen zu bestimmen, ist nebst der geodätischen Messung des linearen Abstandes noch die astronomische Beobachtung der Breiten der Endpunkte nötig; im zweiten Falle jedoch die Beobachtung des Längenunterschiedes. Längengradmessungen konnten daher erst für die Berechnung der Größe der Erde zu Hilfe genommen werden, als man Längenbestimmungen mit einem genügenden Grade der Genauigkeit vorzunehmen in der Lage war, also seit der Einführung der Längenbestimmung durch den elektrischen Telegraphen.

Schon die erste französische Gradmessung (1680—1718) ergab für den Erdhalbmesser R nicht denselben Wert in verschiedenen Breiten. Die Länge eines Breitengrades ergab im nördlichen Teil zwischen Paris und Dünkirchen 56970^t, im südlichen Teil zwischen Paris und Perpignan 57098^t ($1^t = 1$ Toise $= 6$ Pariser Fuß; $0{\cdot}513074^t$ wurden später gleich 1^m festgesetzt, daher $1^t = 1{\cdot}9490363\ m$), so daß die Länge des Meridiangrades gegen die Pole zu abzunehmen schien. Hieraus folgerte Cassini, daß die Erde ein an den Polen überhöhtes Ellipsoid sein müsse (Zitronenform). Schon früher hatten aber Huygens und Newton aus der Rotation der Erde geschlossen, daß die Erde ein abgeplattetes Ellipsoid sein müsse (Orangenform), und zwar folgerte Newton, daß das Verhältnis des Äquatorhalbmessers zum Polarhalbmesser 230 : 229 wäre. Im letzteren Falle müßten aber die Breitengrade gegen die Pole zu zunehmen.

Um dies einzusehen, stelle in Fig. 272 die Ellipse $ACBD$ den Meridiandurchschnitt dar, so daß CD die Polarachse ist; der Horizont eines Punktes M ist gegeben durch die Tangentialebene an die Erdoberfläche und die Richtung gegen den Weltpol durch die Parallele MP, welche durch den Punkt M zu dem in der Richtung OC unendlich entfernten Punkte der Himmelskugel gezogen wird. Es ist daher auch hier der Winkel HMP die Höhe des Poles über dem Horizonte, die Polhöhe. Die auf die Horizontebene errichtete Normale MZ bestimmt die Richtung gegen das Zenit und es ist $\sphericalangle HMP = \sphericalangle MNB$, wenn N der Punkt ist, in welchem die Normale ZMN den Äquatorradius AB trifft. Bezeichnet man daher wieder den Winkel $MNB = \varphi$ als die geographische Breite des Punktes M, so gilt wieder die Beziehung: die geographische Breite eines Ortes ist gleich der Polhöhe für diesen Ort.

Ob man es nun mit einer Kugel oder einer von der Kugelform abweichenden Erde zu tun hat, die Methoden der astronomischen Beobachtung bleiben, wenn man es mit Fixsternen zu tun hat, wegen deren außerordentlich großer Entfernung genau dieselben. M ist der Mittelpunkt der Weltkugel; man hat es nur mit Richtungen zu tun, welche auf der Weltkugel Punkte bestimmen, die sphärische Dreiecke bilden usw. Ein Unterschied tritt nur dann in der Reduktion ein, wenn man Objekte beobachtet, die in meßbarer Entfernung sind; also die Sonne, Planeten, vor allem aber den Mond; dann wird die Reduktion vom Beobachtungsorte M auf den Erdmittelpunkt O nicht dieselbe wie bei der Kugel; die Berechnung der Parallaxe hängt von der Erdform ab. Alle auf Fixsterne bezogenen Beobachtungen

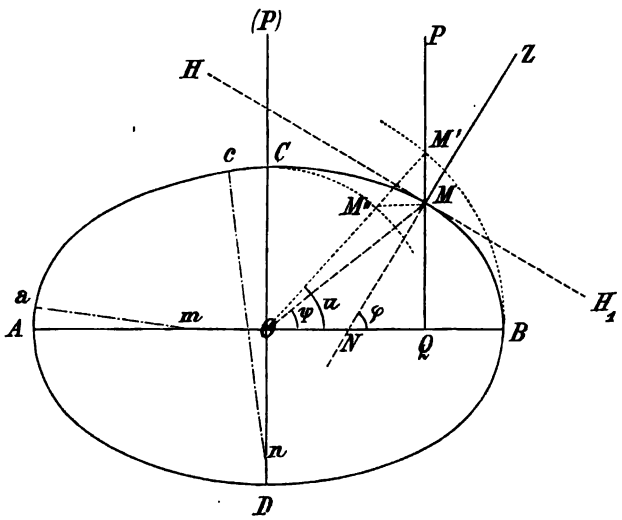


Fig. 272.

und Rechnungen bleiben aber unverändert und so ergibt sich auch für die Polhöhe der richtige Wert, genau so, als ob die Erde sphärisch wäre. Dies ist auch der Grund, warum man den Winkel MNB als geographische Breite beläßt und nicht den am Erdmittelpunkte befindlichen Winkel MOB. Weder den einen noch den andern kann man sehen oder messen; gefunden wird durch die verschiedenen Beobachtungsmethoden stets die Polhöhe HMP und dieser Winkel gibt unmittelbar den Winkel MNB, aus welchem erst der Winkel MOB, d. i. die geozentrische Breite, berechnet wird.

Denkt man sich nun zwei Normalen in C, c in der Nähe des Endpunktes der kleinen Achse und ebenso am Endpunkte der großen Achse zwei Normalen in A, a so, daß beide Paare denselben Winkel, z. B. von 1° einschließen, so sind die Längen der Bögen Cc und Aa nicht gleich. Da die Krümmung der Ellipse bei A am größten, bei C am geringsten ist, so wird einer gleich großen Drehung der Normalen (um denselben Winkel) bei C ein längerer Bogen entsprechen als bei A. Ist daher CD die Rotationsachse (abgeplattetes Rotationsellipsoid), so wird die Länge des Meridiangrades gegen die Pole zu größer; wäre aber AB die Rotations-

achse* (überhöhtes Rotationsellipsoid), so würden die Meridiangrade am Äquator größer. Nach den Resultaten der ersten französischen Gradmessung mußte auf die letztere Form geschlossen werden.

139. Theoretische Untersuchungen über die Figur der Erde. Infolge der Rotation der Erde muß sich in jedem Punkte der Erdoberfläche eine gewisse Fliehkraft entwickeln, welche von der Rotationsachse weggerichtet ist. In dem Punkte M hat sie daher die Richtung Mp (Fig. 273), während die Anziehung der ganzen Erde auf einen in M befindlichen Punkt gegen den Erdmittelpunkt gerichtet ist. Stellt man die Intensität der Attraktion durch $A = Mq$, die Intensität der Fliehkraft durch $f = Mp$ dar, so werden diese beiden Kräfte eine Resultierende ergeben, welche die Diagonale Mu des aus den beiden Komponenten konstruierten Parallelogrammes ist. Unter der Voraussetzung, daß die Erdoberfläche ihre Gleichgewichtsfigur zu einer Zeit annahm, als sie sich noch im flüssigen Zustande befand, mußte sich ihre Oberfläche normal zur Resultierenden stellen, also in die Richtung tt', so daß Mu die Normale blieb und ihre Verlängerung gegen Z die Richtung zum Zenit in diesem Punkte gab. Die Abweichung der Oberflächennormale MN gegen den Radius der Kugel MO, der Winkel α folgt aus dem Dreiecke Mqu nach dem Sinussatz:

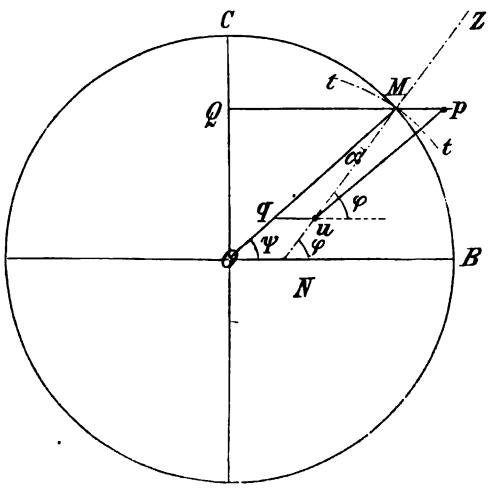


Fig. 273.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{f}{A},$$

daher

$$\sin\alpha = \frac{f}{A}\sin\varphi.$$

φ ist dabei die geographische Breite und $\alpha = \varphi - \psi$ der Unterschied zwischen geographischer und geozentrischer Breite; dieser Unterschied hängt daher von dem Verhältnis der Fliehkraft zur Erdattraktion ab.

Die Fliehkraft hängt ab von der Rotationsgeschwindigkeit des Punktes und seiner Entfernung von der Rotationsachse und drückt sich für ein Massenteilchen μ aus durch

$$f = \varkappa^2 \mu \omega^2 \varrho,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit in der Zeiteinheit (z. B. in einer Sekunde

* Dann wäre allerdings MP nicht die Richtung nach dem Pol, sondern eine dazu senkrechte Gerade.

oder einem Tage) ist und $\varrho = MQ$ der Halbmesser des Parallelkreises also

$$\varrho = r \cos \psi$$

(r der Erdhalbmesser) und $\varkappa^2$ eine Konstante ist, die von der Wahl der Einheiten abhängt. A hingegen ist für das Massenteilchen μ gegeben durch

$$A = \frac{M \mu k^2}{r^2},$$

wenn M die Erdmasse (im Erdmittelpunkt vereinigt gedacht) und k^2 die Attraktionskonstante bedeutet. Hieraus folgt

$$\frac{f}{A} = \frac{\varkappa^2}{k^2} \cdot \frac{\omega^2 r^3 \cos \psi}{M}.$$

Um das Verhältnis $\varkappa : k$ zu ermitteln, kann man die Anziehung und Fliehkraft eines Punktes auf der Erdoberfläche mit den analogen Größen für den Mond vergleichen. Ist die Entfernung des Mondes von der Erde R, so ist die Anziehung, welche er von der Erde erfährt, die Mondmasse gleich m gesetzt:

$$A' = \frac{M m k^2}{R^2},$$

während die Fliehkraft in seiner Bahn

$$f' = \varkappa^2 m \omega_1^2 R$$

ist, wenn ω_1 seine Winkelgeschwindigkeit darstellt. Da aber der Mond, ohne in seiner Bahn festgehalten zu werden, aus derselben nicht heraustritt, so muß $f' = A'$ sein, daher

$$\frac{M k^2}{R^2} = \varkappa^2 \omega_1^2 R,$$

folglich

$$\frac{\varkappa^2}{k^2} = \frac{M}{\omega_1^2 R^3},$$

wobei R in derselben Einheit wie r, ω_1 in derselben Einheit wie ω (und auf dieselbe Zeiteinheit bezogen) auszudrücken sind, damit $\varkappa^2$, k^2 dieselben Konstanten bedeuten. Hieraus folgt

$$\frac{f}{A} = \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot \cos \psi = p \cos \psi$$

und

$$\sin \alpha = p \sin \varphi \cos \psi,$$

wenn

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 = p$$

gesetzt wird.

Da die Erde ihre Rotation in einem Sterntage, der Mond seinen siderischen Umlauf in 27·322 mittleren Sonnentagen = 27·397 Sterntagen

ausführt, so ist seine Winkelgeschwindigkeit in demselben Verhältnis kleiner, daher

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 27{\cdot}397.$$

Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt weiters 60·27 Erdhalbmesser, daher ist

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{60{\cdot}27},$$

demnach

$$p = \frac{(27{\cdot}397)^2}{(60{\cdot}27)^3} = 0{\cdot}0034285 \ (\log = 7{\cdot}53510).$$

Da p sehr klein ist, so sieht man, daß α nur ein sehr kleiner Winkel sein kann, daher φ von ψ nur wenig verschieden, so daß man hinreichend genau

$$\sin \alpha = \tfrac{1}{2} p \sin 2\varphi$$

setzen kann. Der Maximalwert ergibt sich für $\sin 2\varphi = 1$, $2\varphi = 90°$, $\varphi = 45°$ und ist

$$\sin \alpha_0 = \tfrac{1}{2} p.$$

Am Äquator und Pol verschwindet diese Differenz.*

Der Beweis für die Richtigkeit der Newtonschen Annahme wurde durch die beiden auf Anregung der französischen Akademie unternommenen Gradmessungen geliefert: die peruanische Gradmessung zwischen Cotchesqui und Tarqui (1735 bis 1743) gab am Äquator für die Länge eines Meridiangrades 56732 t; die Lappländische zwischen Tornea und Kittis (1736/7) in 66° n. Br. 57438 t.

140. Die Erde als Ellipsoid. Beziehungen zwischen geographischer, geozentrischer und reduzierter Breite. Beschreibt man mit einem Halbmesser gleich der großen Halbachse einen mit der Ellipse konzentrischen Kreis und verbindet denjenigen Punkt M' (Fig. 272) dieses Kreises, welcher dieselbe Abszise OQ wie der Ellipsenpunkt M hat, mit dem Mittelpunkte, so erhält man einen Winkel $M'OQ = u$, welcher die reduzierte

* Für die strengere Rechnung ist das obige Resultat unzureichend, denn durch die veränderte Form der Erde wird auch die Größe der Attraktion geändert, und kann die strenge Rechnung nicht ohne Zuhilfenahme der höheren Analysis (Potential) ausgeführt werden; vgl. hierzu die Anmerkung in Nr. 149. Für die ausführlichen Entwicklungen s. Helmert, „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie", Bd. II. Nach den Untersuchungen von Jacobi (Pogg. Annalen, Bd. XXXIII) kann auch ein dreiachsiges Ellipsoid Gleichgewichtsfigur einer flüssigen rotierenden Masse sein (vgl. des Verfassers Artikel „Mechanik des Himmels" in W. Valentiners „Handwörterbuch der Astronomie", Bd. II, S. 551). In der Tat wurde auch mitunter ein dreiachsiges Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur der Erde aus den Beobachtungen zu rechnen versucht. Allein schon Clausen hatte 1841 (Astron. Nachrichten, Bd. XVIII, S. 145) gezeigt, daß diese Gleichgewichtsfigur weit von der Kugelgestalt verschieden sein muß; wäre c die Länge der Rotationsachse, so müßten die Längen der beiden Äquatorachsen für die Erde 1·0023 c und 52·4346 c sein (Helmert, l. c., Bd. II, S. 136).

Breite genannt wird. (Denselben Winkel erhält man, wenn man mit dem Halbmesser gleich der kleinen Halbachse einen Kreis beschreibt und in diesem einen Punkt M'' mit dem Mittelpunkt verbindet, der dieselbe Ordinate $MQ = y$ hat.)

Um die Beziehungen zwischen φ, ψ, u aufzustellen, hat man aus den Elementen der analytischen Geometrie der Ebene:

Die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a, b, wenn die große Halbachse a als x-Achse gewählt wird:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Die Gleichung der Tangente in einem Punkte, dessen Koordinaten $OQ = x_0$, $QM = y_0$ sind:

$$b^2 x x_0 + a^2 y y_0 = a^2 b^2,$$

daher der Richtungskoeffizient der Tangente

$$A = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

und der Richtungskoeffizient der darauf senkrecht stehenden Normale

$$A' = \operatorname{tang} \varphi = +\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Weiter hat man aus der Figur

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{y_0}{x_0} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

und da

$$M'Q = \sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{a}{b} y_0$$

ist, auch

$$\operatorname{tang} u = \frac{a}{b} \frac{y_0}{x_0}. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Zu jedem x_0 ergibt sich aus (1) ein gewisses y_0, hierzu nach (2), (3), (4) die zugehörigen φ, ψ, u. Wichtig ist es jedoch, zu einem gegebenen φ die zugehörigen Werte von ψ und u zu finden und umgekehrt. Eliminiert man daher $(y_0 : x_0)$, so erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \varphi &= \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \psi = \frac{a}{b} \operatorname{tang} u \\ \operatorname{tang} u &= \frac{a}{b} \operatorname{tang} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi \quad \ldots\ldots (5) \\ \operatorname{tang} \psi &= \frac{b}{a} \operatorname{tang} u = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \varphi, \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen man zwei der drei Winkel aus dem dritten rechnen kann. Da aber a sehr nahe gleich b ist, so sind die drei Winkel φ, ψ, u nur wenig voneinander verschieden und man wird besser tun, die

Differenz der Winkel zu suchen, was nach den Reihenentwicklungen für $\operatorname{tang} x = \nu \operatorname{tang} y$ aus Nr. 97 erfolgen kann. Man erhält:*

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tang} u; \quad \varphi - u = n\sin 2u + \tfrac{1}{2}n^2\sin 4u + \tfrac{1}{3}n^3\sin 6u + \ldots$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}\psi; \quad \varphi - \psi = m\sin 2\psi + \tfrac{1}{2}m^2\sin 4\psi + \tfrac{1}{3}m^3\sin 6\psi + \ldots$$

$$\operatorname{tang} u = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\psi; \quad u - \psi = n\sin 2\psi + \tfrac{1}{2}n^2\sin 4\psi + \tfrac{1}{3}n^3\sin 6\psi + \ldots$$

$$\operatorname{tang} u = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi; \quad \varphi - u = n\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}n^2\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}n^3\sin 6\varphi - \ldots$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tang} u; \quad u - \psi = n\sin 2u - \tfrac{1}{2}n^2\sin 4u + \tfrac{1}{3}n^3\sin 6u - \ldots$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi; \quad \varphi - \psi = m\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}m^2\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}m^3\sin 6\varphi - \ldots,$$

wobei

$$n = \frac{a-b}{a+b}; \quad m = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

ist. Man nennt das Verhältnis

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = e$$

die Exzentrizität der Ellipse und das Verhältnis

$$\frac{a-b}{a} = \mathfrak{a}$$

die Abplattung derselben. Die hier vorkommenden Koeffizienten m und n lassen sich leicht durch $\mathfrak{a}$ oder e ausdrücken. Man hat zunächst

$$b = a(1-\mathfrak{a}) = a\sqrt{1-e^2}$$

und damit

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{a-b}{2a-(a-b)} = \frac{\mathfrak{a}}{2-\mathfrak{a}}$$

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

$$m = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{1-(1-\mathfrak{a})^2}{1+(1-\mathfrak{a})^2} = \frac{2\mathfrak{a}-\mathfrak{a}^2}{2-2\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2}$$

$$m = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{e^2}{2-e^2} = \frac{2n}{1+n^2}$$

$$e^2 = \frac{2m}{1+m} = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

* Z. B. aus $\operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tang} u$; $\nu = \frac{a}{b}$, $\frac{\nu-1}{\nu+1} = \frac{a-b}{a+b} = n$.

Mit den Erddimensionen von Bessel ist

a	$= 6377397{\cdot}155\,m$	log: 6·8046434,64
b	$= 6356078{\cdot}963\,m$	6·8031892,84
α	$= 0{\cdot}003342773$	7·524106901—10
e^2	$= 0{\cdot}006674372$	7·824410415—10
n	$= 0{\cdot}001674185$	7·223803386—10
m	$= 0{\cdot}003348360$	7·524832164—10.

Behält man nur die Glieder erster Ordnung bei, so wird

$$\varphi - u = \tfrac{1}{2}\,\alpha \sin 2\varphi; \qquad \varphi - \psi = \alpha \sin 2\varphi$$

und die Maximalwerte folgen für $\varphi = 45°$:

$$\varphi - u = 5'\,45'' \qquad \varphi - \psi = 11'\,30''.$$

Für viele Rechnungen ist noch die Kenntnis des Radiusvektors r wichtig. Man erhält für diesen* (ausgedrückt durch u, ψ, φ):

$$\log r = \log\left[\frac{a}{1+n}\right] + \text{Mod}\,[n\cos 2u - \tfrac{1}{2}n^2\cos 4u + \tfrac{1}{3}n^3\cos 6u - \ldots]$$

$$\log r = \log\,[a(1-n)] + \text{Mod}\,[n\cos 2\psi + \tfrac{1}{2}n^2\cos 4\psi + \tfrac{1}{3}n^3\cos 6\psi + \ldots]$$

$$\log r = \log\left[a\left(\frac{1+n}{1+m}\right)\right] + \text{Mod}\,[(m-n)\cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}(m^2-n^2)\cos 4\varphi + \\ + \tfrac{1}{3}(m^3-n^3)\cos 6\varphi - \ldots],$$

---

* Da $\text{tang}\,u = \dfrac{b}{a}\,\text{tang}\,\varphi = \dfrac{a}{b}\,\text{tang}\,\psi$

ist, so wird

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}\,u^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2\,\text{tang}\,\varphi^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2\,\text{tang}\,\psi^2}} = \\ = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}} = \frac{b\cos\psi}{\sqrt{b^2\cos\psi^2+a^2\sin\psi^2}}$$

$$\sin u = \text{tang}\,u\,\cos u = \frac{b\,\text{tang}\,\varphi}{\sqrt{a^2+b^2\,\text{tang}\,\varphi^2}} = \frac{a\,\text{tang}\,\psi}{\sqrt{b^2+a^2\,\text{tang}\,\psi^2}} = \\ = \frac{b\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}} = \frac{a\sin\psi}{\sqrt{b^2\cos\psi^2+a^2\sin\psi^2}}.$$

Es ist aber

$$a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2 = a^2(1-e^2\sin\varphi^2)$$
$$b^2\cos\psi^2 + a^2\sin\psi^2 = a^2(1-e^2\cos\psi^2),$$

daher

$$x = a\cos u = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}\cos\psi}{\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}}$$

$$y = b\sin u = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin\psi}{\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}}$$

und hieraus

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{1-e^2\sin u^2}$$
$$= a\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\cos\psi^2}}$$
$$= a\sqrt{\frac{1-(2e^2-e^4)\sin\varphi^2}{1-e^2\sin\varphi^2}}$$

wobei

$$\text{Mod} = 0{\cdot}43429448 \qquad \log \text{Mod} = 9{\cdot}6377843{,}_1$$

$$\log\left[\frac{a}{1+n}\right] = 6{\cdot}8039169{,}825 \qquad \log\left[\text{Mod}\, n\right] = 6{\cdot}861587$$

$$\log\left[a(1-n)\right] = 6{\cdot}8039157{,}652 \qquad \log\left[\tfrac{1}{2}\,\text{Mod}\, n^2\right] = 3{\cdot}78436$$

$$\log\left(a\,\frac{1+n}{1+m}\right) = 6{\cdot}8039181{,}997 \qquad \log\left[\text{Mod}\,(m-n)\right] = 6{\cdot}861585$$

$$\log\left[\tfrac{1}{2}\,\text{Mod}\,(m^2-n^2)\right] = 4{\cdot}26147$$

$$\log\left(\frac{n}{\text{arc } 1''}\right) = 2{\cdot}538228 \qquad \log\left(\frac{m}{\text{arc } 1''}\right) = 2{\cdot}839257$$

$$\log\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{n^2}{\text{arc } 1''}\right) = 9{\cdot}46101 \qquad \log\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{m^2}{\text{arc } 1''}\right) = 0{\cdot}06306$$

---

oder durch Einführung von m und n

$$r = \frac{a}{\sqrt{(1+n)^2}}\sqrt{(1+n)^2 - 4n\sin u^2} = \frac{a}{(1+n)}\sqrt{1+n^2+2n\cos 2u} =$$

$$= \frac{a}{1+n}\sqrt{(1+n\,\varepsilon^{2iu})(1+n\,\varepsilon^{-2iu})}$$

$$r = \frac{a\sqrt{(1+n)^2-4n}}{\sqrt{(1+n)^2-4n\cos\psi^2}} = a(1-n)\,\frac{1}{\sqrt{1+n^2-2n\cos 2\psi}} =$$

$$= \frac{a(1-n)}{\sqrt{(1-n\,\varepsilon^{2i\psi})(1-n\,\varepsilon^{-2i\psi})}}$$

$$r = \frac{a(1+n)}{1+m}\sqrt{\frac{(1+m)^2-4m\sin\varphi^2}{(1+n)^2-4n\sin\varphi^2}} = a\left(\frac{1+n}{1+m}\right)\sqrt{\frac{(1+m\,\varepsilon^{2i\varphi})(1+m\,\varepsilon^{-2i\varphi})}{(1+n\,\varepsilon^{2i\varphi})(1+n\,\varepsilon^{-2i\varphi})}}$$

wobei ε die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Geht man hier auf die natürlichen Logarithmen über, so folgt:

$$\log_n r = \log_n\left[\frac{a}{1+n}\right] + \tfrac{1}{2}\log_n(1+n\,\varepsilon^{2iu}) + \tfrac{1}{2}\log_n(1+n\,\varepsilon^{-2iu})$$

$$\log_n r = \log_n\left[a(1-n)\right] - \tfrac{1}{2}\log_n(1-n\,\varepsilon^{2i\psi}) - \tfrac{1}{2}\log_n(1-n\,\varepsilon^{-2_i\psi})$$

$$\log_n r = \log_n\left[a\left(\frac{1+n}{1+m}\right)\right] + \tfrac{1}{2}\log_n(1+m\,\varepsilon^{2i\varphi}) + \tfrac{1}{2}\log_n(1+m\,\varepsilon^{-2i\varphi}) -$$

$$- \tfrac{1}{2}\log_n(1+n\,\varepsilon^{2i\varphi}) - \tfrac{1}{2}\log_n(1+n\,\varepsilon^{-2i\varphi}).$$

Beachtet man daß:

$$\log_n(1+x\,\varepsilon^{\pm iy}) = x\,\varepsilon^{\pm iy} - \tfrac{1}{2}x^2\,\varepsilon^{\pm 2iy} + \tfrac{1}{3}x^3\,\varepsilon^{\pm 3iy} - \tfrac{1}{4}x^4\,\varepsilon^{\pm 4iy}\ldots.$$

und zum Übergang auf Briggsche Logarithmen, daß:

$$\log x = \log_n x \,.\, \log \varepsilon = \text{Mod}\,\log_n x$$

ist, so folgen die oben angeschriebenen Reihen.

Beispiele:

1. $\varphi = 48° 16' 15{\cdot}29''$ (Hermannskogel) $2\varphi = 96° 32' 30{\cdot}6''$, $4\varphi = 193\ 5\ 1$

$\log n = 2{\cdot}538228$	$\log \frac{1}{2} n^2 = 9{\cdot}46101$
$\log \sin 2\varphi = 9{\cdot}997163$	$\log \sin 4\varphi = 9{\cdot}35482_n$
$\log m = 2{\cdot}839257$	$\log \frac{1}{2} m^2 = 0{\cdot}06306$
$\log \cos 2\varphi = 9{\cdot}056633_n$	$\log \cos 4\varphi = 9{\cdot}98858_n$
$\log [(m - n) \text{ Mod}] = 6{\cdot}861585$	$\log [\frac{1}{2}(m^2 - n^2) \text{ Mod}] = 4{\cdot}26147$

$\log \cos 6\varphi = 9{\cdot}5260$

$\log [\frac{1}{3}(m^3 - n^3) \text{ Mod}] = 1{\cdot}6752$

$n \sin 2\varphi = 5' 43{\cdot}08''$	$m \sin 2\varphi = 11' 26{\cdot}15''$
$-\frac{1}{2} n^2 \sin 4\varphi = + 0{\cdot}06$	$-\frac{1}{2} m^2 \sin 4\varphi = + 0{\cdot}26$
$\varphi - u = 5' 43{\cdot}14''$	$\varphi - \psi = 11' 26{\cdot}41''$
$u = 48° 10' 32{\cdot}15''$	$\psi = 48° 4' 48{\cdot}88''$

$\text{Mod}\,(m - n) \cos 2\varphi = - 0{\cdot}000082836$

$-\frac{1}{2} \text{Mod}\,(m^2 - n^2) \cos 4\varphi = + 0{\cdot}000001778$

$- 0{\cdot}000081056$

$6{\cdot}803918200$

$\log r = 6{\cdot}803837144.$

2. $\psi = 48° 4' 48{\cdot}88''$ $2\psi = 96° 9' 37{\cdot}7''$, $4\psi = 192\ 19\ 15{\cdot}4$

$\log n = 2{\cdot}538228$	$\log \frac{1}{2} n^2 = 9{\cdot}46101$
$\log \sin 2\psi = 9{\cdot}997485$	$\log \sin 4\psi = 9{\cdot}32917_n$
$\log m = 2{\cdot}839257$	$\log \frac{1}{2} m^2 = 0{\cdot}06306$
$\log \cos 2\psi = 9{\cdot}030654_n$	$\log \cos 4\psi = 9{\cdot}98988_n$
$\log [n \text{ Mod}] = 6{\cdot}861587$	$\log [\frac{1}{2} n^2 \text{ Mod}] = 3{\cdot}78436$
$+ n \sin 2\psi = 5' 43{\cdot}33''$	$+ m \sin 2\psi = 11' 26{\cdot}66''$
$+\frac{1}{2} n^2 \sin 4\psi = - 0{\cdot}06$	$+\frac{1}{2} m^2 \sin 4\psi = - 0{\cdot}25$
$u - \psi = 5' 43{\cdot}27''$	$\varphi - \psi = 11' 26{\cdot}41''$
$u = 48° 10' 32{\cdot}15''$	$\varphi = 48° 16' 15{\cdot}29''$

$\text{Mod}\, n \cos 2\psi = - 0{\cdot}000078026$

$\frac{1}{2} \text{Mod}\, n^2 \cos 4\psi = - 0{\cdot}000000595$

$- 0{\cdot}000078621$

$6{\cdot}803915765$

$\log r = 6{\cdot}803837144.$

141. Länge des Meridiangrades und des Grades im Parallel. Für die Länge eines Meridianbogens zwischen den reduzierten Breiten u_1 und u_2 ergibt sich,* wenn man

$$\tfrac{1}{2}(u_1 + u_2) = u, \qquad u_2 - u_1 = \Delta u$$

* Da $\dfrac{dx}{du} = -a \sin u, \quad \dfrac{dy}{du} = +b \cos u$

setzt:

$$s = a\,[A_0 \operatorname{arc} \Delta u - A_1 \cos 2u \sin \Delta u - A_2 \cos 4u \sin 2\Delta u - A_3 \cos 6u \sin 3\Delta u \ldots.]$$

oder ausgedrückt durch die geographischen Breiten φ_1, φ_2, wenn

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi, \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$$

ist, so wird

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = \sqrt{a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2} = a\sqrt{1 - e^2 \cos u^2}$$

$$s = a \int \sqrt{1 - e^2 \cos u^2}\, du.$$

Durch die geographische Breite ausgedrückt wird, wie durch unmittelbare Differentiation folgt:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{(1 - e^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieser Wert ist auch der Krümmungshalbmesser im Meridian ρ_m; durch u ausgedrückt wird derselbe

$$\rho_m = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}(1 - e^2 \cos u^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Für den Meridianbogen findet sich daraus

$$s = a(1-e^2) \int \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integrationen führen auf elliptische Funktionen, können aber leicht durch Reihen ausgedrückt werden, welche nach Vielfachen von u oder φ fortschreiten. Setzt man nämlich wieder $e^2 = 4n : (1+n)^2$ ein, so wird wie früher

$$\sqrt{1 - e^2 \cos u^2} = \frac{1}{1+n}\sqrt{(1 - n\varepsilon^{2iu})(1 - n\varepsilon^{-2iu})}.$$

Entwickelt man hier

$$(1 - n\varepsilon^{\pm 2iu})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\varepsilon^{\pm 2iu} - \frac{n^2}{8}\varepsilon^{\pm 4iu} \ldots.$$

multipliziert und setzt in s ein, so folgt

$$s = a \int_{u_1}^{u_2} [A_0 - A_1 \cos 2u - 2A_2 \cos 4u - 3A_3 \cos 6u \ldots.]\, du,$$

wobei A_0, A_1, $A_2 \ldots$ die oben gegebenen Ausdrücke sind. Durch Integration folgt daher

$$s = a\,[A_0(u_2 - u_1) - \tfrac{1}{2}A_1(\sin 2u_2 - \sin 2u_1) - \tfrac{1}{2}A_2(\sin 4u_2 - \sin 4u_1) \ldots.]$$

und wenn man die Differenzen der Sinus in Produkte umsetzt, die oben gegebenen Ausdrücke. Ebenso erhält man, ausgedrückt durch die geographische Breite

$$\sqrt{(1 - e^2 \sin\varphi^2)^3} = \frac{1}{(1+n)^3}\sqrt{(1 + n\varepsilon^{2i\varphi})(1 + n\varepsilon^{-2i\varphi})^3}.$$

Da nun

$$(1 + n\varepsilon^{\pm 2i\varphi})^{-\frac{3}{2}} = 1 - \tfrac{3}{2}n\varepsilon^{\pm 2i\varphi} + \tfrac{15}{8}n^2\varepsilon^{\pm 4i\varphi} - \tfrac{35}{16}n^3\varepsilon^{\pm 6i\varphi} + \ldots.$$

ist, so wird

$$s = a\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 (1+n)^3 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (A_0' - A_1' \cos 2\varphi + 2A_2' \cos 4\varphi - 3A_3' \cos 6\varphi \ldots.)\, d\varphi$$

gesetzt wird:

$$s = a\,[A_0 \operatorname{arc} \Delta\varphi - 3A_1 \cos 2\varphi \sin \Delta\varphi + 15A_2 \cos 4\varphi \sin 2\Delta\varphi - \\ - 35A_3 \cos 6\varphi \sin 3\Delta\varphi \ldots .],$$

wobei

$$A_0 = \frac{1}{1+n}(1 + \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{1}{64}n^4 + \ldots .)$$

$$A_1 = \frac{1}{1+n}(n - \tfrac{1}{8}n^3 - \ldots .)$$

$$A_2 = \frac{1}{8(1+n)}(n^2 - \tfrac{1}{4}n^4 - \ldots .)$$

$$A_3 = \frac{1}{24(1+n)}(n^3 - \ldots .)$$

$$A_4 = \frac{1}{256(1+n)}(n^4 - \ldots .)$$

Für kleine Meridianbögen kann man eine einfache geschlossene Form aus dem Werte des Krümmungshalbmessers ableiten. Der Krümmungshalbmesser eines Punktes der Meridianellipse in der Breite φ ist

$$\varrho_m = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und da der Bogen s der Ellipse gleich dem Bogen des Krümmungskreises ist, so wird

$$s = \varrho_m \Delta\varphi = \frac{a(1-e^2)\Delta\varphi}{(1-e^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Beispiel: Die Länge eines Meridiangrades im Äquator l_0, in der Breite 45°: l_{45} und am Pol l_{90} wird

$\Delta\varphi = 1°$, arc $\Delta\varphi = 0{\cdot}01745329$, $\log a = 6{\cdot}8046435$

für	$\varphi = 0°$	45°	90°	$\log(1-e^2) = 9{\cdot}9970916$
$\log \sin\varphi$	—	9·8494850	0·0000000	$\log \operatorname{arc} 1° = 8{\cdot}2418774$
$\log \sin\varphi^2$	—	9·6989700	0·0000000	$5{\cdot}0436125$
$\log e^2 \sin\varphi^2$	—	7·5233804	7·8244104	
$\log(1 - e^2\sin\varphi^2)$	0·0000000	9·9985482	9·9970916	
$\log(1-e^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}$	0·0000000	9·9978223	9·9956374	
$\log l$	5·0436125	5·0457902	5·0479751	
l	110563·7 m	111119·5 m	111679·9 m.	

---

oder

$$s = a(1-n)(1-n^2)\,[A_0'(\varphi_2 - \varphi_1) - \tfrac{1}{2}A_1'(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \\ + \tfrac{1}{2}A_2'(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) \ldots .],$$

wobei

$$A_0' = 1 + \tfrac{9}{4}n^2 + \tfrac{225}{64}n^4 + \ldots . \qquad A_2' = \tfrac{15}{8}n^2 + \tfrac{105}{32}n^4 \ldots .$$

$$A_1' = 3n + \tfrac{45}{8}n^2 \ldots . \qquad A_3' = \tfrac{35}{24}n^3 \ldots .$$

oder wenn mit $(1-n^2)^2$ hineinmultipliziert wird:

$$s = a\,[A_0(\varphi_2 - \varphi_1) - \tfrac{3}{2}A_1(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \tfrac{15}{2}A_2(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) \ldots .],$$

wobei A_0, A_1 .... wieder dieselben oben angeschriebenen Werte bedeuten. Die Darstellung durch die reduzierten Breiten ist demnach viel stärker konvergent.

Die Länge des Meridianquadranten erhält man, indem $u_1 = 0$, $u_2 = 90°$ oder $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 90°$ gesetzt wird, wodurch $\cos 2u = \cos 4u = \ldots 0$, $\cos 2\varphi = \cos 4\varphi = \ldots = 0$ wird, demnach:*

$$Q = a A_0 \operatorname{arc} 90° = \frac{\pi}{2} a A_0.$$

Die Bestimmung der Länge eines Bogens des Parallelkreises ist bedeutend einfacher, da es sich um die Länge eines Kreisbogens handelt, für welchen der Kreishalbmesser ϱ die Abszisse des betrachteten Ellipsenpunktes ist; daher wird für einen Bogen von $\alpha°$:

$$s_1 = \varrho\alpha = a \cos u \operatorname{arc} \alpha = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2}} \operatorname{arc} \alpha.$$

142. Bestimmung der Erddimensionen aus zwei Gradmessungen.

1. Zwei Breitengradmessungen. Es seien die Längen von je einem Grade in verschiedenen Breiten gemessen:**

die Länge eines Grades in der Breite φ (mittlere Breite zwischen den Breiten der Endpunkte φ_1 und φ_2) gleich s,

die Länge eines Grades in der Breite φ' (mittlere Breite zwischen den Breiten der Endpunkte φ_1' und φ_2') gleich s',

so ist

$$s = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{arc} 1°}{(1 - e^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad s' = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{arc} 1°}{(1 - e^2 \sin \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dividiert man diese Gleichungen durcheinander, so fällt a heraus und man erhält

$$\frac{s}{s'} = \left(\frac{1 - e^2 \sin \varphi'^2}{1 - e^2 \sin \varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$k = \left(\frac{s}{s'}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1 - e^2 \sin \varphi'^2}{1 - e^2 \sin \varphi^2},$$

aus welcher Gleichung sich e^2 bestimmen läßt; es wird

$$k - 1 = e^2 [k \sin \varphi^2 - \sin \varphi'^2]$$

$$e^2 = \frac{k - 1}{k \sin \varphi^2 - \sin \varphi'^2}$$

---

* In ähnlicher Weise wie die Länge des Meridians kann auch die Oberfläche und das Volumen des Ellipsoides berechnet werden. Mit den Besselschen Erddimensionen erhält man

Mittlere Länge des Meridiangrades $= \frac{1}{90}$ des Quadranten $= 111120{\cdot}6\,m$
Oberfläche der Erde $= 509950714\,km^2$
Radius einer Kugel gleicher Oberfläche $r_1 = 6370289\,m$
Radius einer Kugel gleichen Inhaltes $r_2 = 6370283\,m$.

* Hat man die Länge eines Bogens von $\alpha°$ gleich S gemessen, so wird die Länge eines Grades gleich $\frac{S}{\alpha}$.

und dann $$a = \frac{s(1 - e^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2) \operatorname{arc} 1^\circ} = \frac{s'(1 - e^2 \sin \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2) \operatorname{arc} 1^\circ}.$$

2. Zwei Längengradmessungen. Seien wieder s_1 und s_1' die Längen je eines Grades des Paralleles in den Breiten φ und φ', welche hier die Breiten der Parallelen selbst darstellen, so wird

$$s_1 = \frac{a \cos \varphi \operatorname{arc} 1^\circ}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2}}; \qquad s_1' = \frac{a \cos \varphi' \operatorname{arc} 1^\circ}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi'^2}}$$

und daraus, wenn $$\left(\frac{s_1}{s_1'} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}\right)^2 = k$$

gesetzt wird, $$\frac{1 - e^2 \sin \varphi'^2}{1 - e^2 \sin \varphi^2} = k,$$

folglich $$e^2 = \frac{k - 1}{k \sin \varphi^2 - \sin \varphi'^2}$$

und dann $$a = \frac{s_1 \sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2}}{\cos \varphi \operatorname{arc} 1^\circ} = \frac{s_1' \sqrt{1 - e^2 \sin \varphi'^2}}{\cos \varphi' \operatorname{arc} 1^\circ}.$$

Beispiel. Die Gradmessung in Peru zwischen Tarqui (— 3° 4′ 32·068″) und Cotchesqui (+ 0° 2′ 31·387″) ergab für einen Bogen von 3° 7′ 3·455″ eine Länge von 176875·5^t, daher für die mittlere Polhöhe $\varphi' = -1^\circ\ 31'\ 0{\cdot}340''$, die Länge des Meridiangrades $s' = 56734{\cdot}01^t$.

Die Besselsche Gradmessung in Ostpreußen* zwischen Trunz (54° 13′ 11·466″) und Memel (55° 43′ 40·446″) ergab für einen Bogen von 1° 30′ 28·980″ eine Länge von 86176·975^t, daher für die mittlere Polhöhe $\varphi = +54^\circ\ 58'\ 25{\cdot}956''$, die Länge des Meridiangrades $s = 57144{\cdot}66^t$.

Demnach wird die Berechnung:

log sin φ	9·9132258	log arc 1°	8·2418774
log sin φ'	8·4227438	log $(1 - e^2)$	9·9968791
log s	4·7569756	log $e^2 \sin \varphi^2$	7·681385
log s'	4·7538435	log $(1 - e^2 \sin \varphi^2)$	9·9979097
log $(s : s')$	0·0031321	log $(1 - e^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}$	9·9968645
log k	0·0020881	log s	4·7569756
log sin φ^2	9·8264516	log $e^2 \sin \varphi'^2$	4·700421
log $k \sin \varphi^2$	9·8285397	log $(1 - e^2 \sin \varphi'^2)$	9·9999978
log sin φ'^2	6·8454876	log $(1 - e^2 \sin \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}$	9·9999967
Subtr.	0·0004518	log s'	4·7538435
log Nenner	9·828088	log $s(1 - e^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}$	4·7538401
log $(k - 1)$	7·683021	log $(1 - e^2)$ arc 1°	8·2387565
log e^2	7·854933	log $s'(1 - e^2 \sin \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}$	4·7538402
		log a	6·5150836
			6·5150837.

* Bessel, „Bestimmung der Achsen des elliptischen Rotationssphäroides, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am besten entspricht.“ Astr. Nachr. Bd. XIV, S. 333, Werke Bd. III, S. 41.

Die Richtigkeit der Rechnung erscheint durch die doppelte Bestimmung (aus φ und φ') geprüft. Dennoch weicht der Wert von e^2 ziemlich weit von demjenigen ab, welcher S. 337 angeführt wurde. Es wird eben e^2 aus der sehr geringen Abweichung von k gegen 1 erschlossen und ist daher von den Werten von s und s', insbesondere aber von den Bestimmungen der Polhöhen der Endpunkte der Meridianbögen affiziert. Eine gute Bestimmung kann daher nur aus zahlreicheren Gradmessungen erhalten werden, aus welchen dann aber e^2 und a nach der Methode der kleinsten Quadraten erhalten werden muß. Die von Bessel (1841) aus 10 Gradmessungen abgeleiteten Werte wurden S. 337 mitgeteilt. Clarkes später (1880) abgeleitete Werte* sind

$$\begin{aligned} a &= 6378249{\cdot}2\ m \\ b &= 6356515{\cdot}0\ m \\ \alpha &= 1:293{\cdot}465 = 0{\cdot}00340756 \\ \log e^2 &= 7{\cdot}832730. \end{aligned}$$

Doch schließt sich das Besselsche Ellipsoid den späteren Messungen besser an, weshalb es allgemein beibehalten wird.

3. Eine Methode, die Abplattung der Erde auf astronomischem Wege zu ermitteln, leitet sich unmittelbar aus dem früher Gesagten ab. In Nr. 139 ergab sich aus dem Verhältnis der Fliehkraft zur Erdanziehung für einen Punkt auf der Erdoberfläche und am Monde der größte Unterschied zwischen geographischer und geozentrischer Breite:

$$\sin \alpha_0 = \tfrac{1}{2} p$$

oder wegen der Kleinheit des Wertes von α_0 und mit Rücksicht auf den Wert von p

$$\alpha_0 = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Je genauer die siderische Umlaufszeit des Mondes und die Entfernung desselben (die Mondparallaxe) bekannt sind, desto sicherer kann man auch α_0 erhalten. Setzt man eine auf diese Weise genau erlangte Kenntnis von α_0 voraus, so ist wegen

$$\varphi - \psi = m \sin 2\varphi$$

der Maximalwert

$$(\varphi - \psi)_0 = \operatorname{arc} \alpha_0 = m = \frac{e^2}{2 - e^2},$$

woraus sich e^2 oder α ergibt, so daß man mittels dieser astronomischen Bestimmungen (der Mondparallaxe) die Abplattung der Erde bestimmen kann.

143. Die Berechnungen auf der ellipsoidischen Erdoberfläche. Ist einmal die wahre Figur der Erde als von der Kugel verschieden erkannt, so ergibt sich daraus als notwendige Folge, daß man die Messungen selbst nicht auf die Kugelfläche, wie dies bisher angenommen wurde, sondern

* Clarke, Geodesy, Oxford 1880, S. 319.

auf die Ellipsoidfläche beziehen muß. Für diesen Übergang erscheint es allerdings günstig, daß die Abweichung von der Kugelgestalt nur eine sehr geringe ist und demnach die notwendigen Korrektionen jedenfalls sehr gering sein werden. Daß dieselben nichtsdestoweniger mit der größten Genauigkeit verfolgt werden müssen, hat seine Ursache darin, daß selbst das Sphäroid nicht die wahre Gestalt der Erde darstellt, sondern daß die genauen Beobachtungen ziemlich beträchtliche Abweichungen von dieser Form ergeben haben (s. Nr. 147), deren Größe aber nur mit Richtigkeit erkannt werden kann, wenn der genaue Betrag der auf das Sphäroid bezogenen Werte bekannt ist.

In der Ebene wird bekanntlich die Gerade allen Rechnungen zugrunde gelegt, weil dieselbe die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten ist, demnach als das einzig zulässige eindeutig bestimmte Maß der Entfernungen zweier Punkte gelten kann. Für die Kugel sind aus demselben Grunde die größten Kreise einzuführen; denn jede andere, zwischen zwei Punkten gezogene Linie, etwa ein kleiner Kugelkreis oder irgendeine andere zwischen denselben verlaufende Linie, ist ihrer Lage nach durch die beiden Punkte allein nicht bestimmt: es gibt unzählig viele Linien zwischen den beiden Punkten, aber es gibt nur einen größten Kreis, nämlich denjenigen, in welchem die Kugel durch die Ebene geschnitten wird, welche durch die beiden Punkte und den Mittelpunkt der Kugel geht. Dieser größte Kreis gibt gleichzeitig die kürzeste Entfernung der beiden Punkte auf der Kugeloberfläche.

Auf dem Ellipsoid lassen sich ebenso zwischen zwei Punkten unzählig viele krumme Linien legen; unter allen diesen wird eine die kürzeste sein; diese nennt man die geodätische Linie, die von ihnen gebildeten Dreiecke geodätische Dreiecke. Der Verlauf der geodätischen Linie ist aber keinesfalls einfach. Man kann jedoch jedes geodätische Dreieck, für welches zwei Seiten Meridiane (die ebenfalls geodätische Linien sind) und die dritte Seite irgendeine geodätische Linie ist, durch ein sogenanntes sphärisches Hilfsdreieck lösen.* Haben die beiden Punkte A, B (Fig. 274) auf dem Rotationsellipsoid die Breiten φ, φ_1, den Längenunterschied $\lambda - \lambda_1$ und ist

---

* Die geodätische Linie AB (Fig. 274) kann auf mehrfache Weise bestimmt werden. Eine Bestimmung ergibt sich daraus, daß sie die kürzeste Linie sein soll. Die Länge des Differentiales ab derselben ist gegeben durch

$$ab = \sqrt{ac^2 + bc^2},$$

wo $ac = \rho_m d\varphi$ das Bogendifferential des Meridians, $bc = \rho d\lambda$ das Bogendifferential des Paralleles ist. Es wird demnach

$$ds = \sqrt{(\rho_m d\varphi)^2 + (\rho d\lambda)^2} = d\lambda \sqrt{\rho_m^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \rho^2}$$

$$s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\rho_m^2 \varphi'^2 + \rho^2}\, d\lambda,$$

wenn φ' die erste Ableitung von φ, d. i. $d\varphi : d\lambda$ bedeutet.

Betrachtet man einen andern Linienzug zwischen denselben Punkten A, B, der durch mn geht, so wird derselbe eine andere Länge haben, welche man aus s erhalten

das Azimut der Richtung der geodätischen Linie im ersten Punkte (von Süd gegen West) α_1, im zweiten Punkte α, so kann man zu dem Dreiecke ABP (Fig. 274) ein Dreieck $A'B'P'$ auf der Kugel (Fig. 275) annehmen, so daß dessen Eckpunkte A', B' geographische Breiten haben gleich den reduzierten Breiten der Punkte A, B auf dem Ellipsoide, deren Längenunterschied ω und Entfernung $A'B' = \sigma$ allerdings andere sind, für welche aber die Azimute α, α_1 dieselben sind.

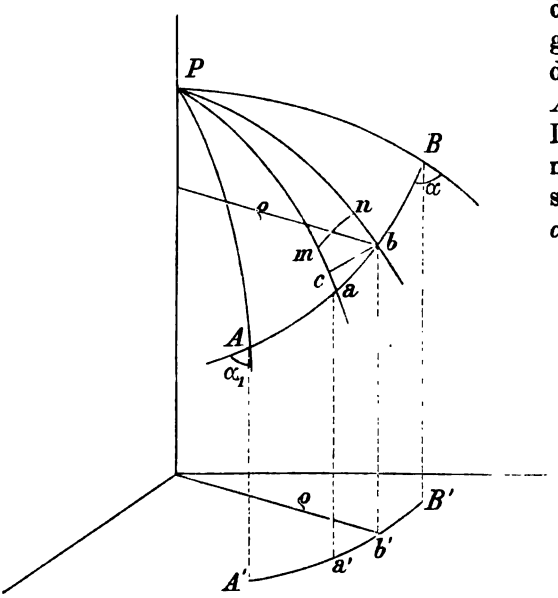


Fig. 274.

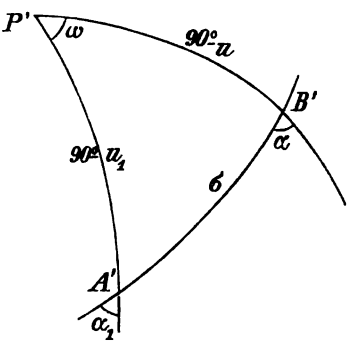


Fig. 275.

---

kann, indem man von Punkt zu Punkt für dasselbe λ die Breiten φ variiert; die Länge wird sich dann um

$$\delta s = \delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\rho_m{}^2 \varphi'^2 + \rho^2}\, d\lambda$$

ändern. Bezeichnet man die Funktion unter dem Integralzeichen, die hier nur von φ und φ', nicht aber von λ abhängt, da ρ_m und ρ von λ unabhängig sind, mit

$$\sqrt{\rho_m{}^2 \varphi'^2 + \rho^2} = f(\varphi, \varphi'),$$

so wird

$$\delta s = \delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f(\varphi, \varphi')\, d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \delta\varphi' \right) d\lambda.$$

Da aber

$$\int \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \delta\varphi'\, d\lambda = \int \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \frac{d\delta\varphi}{d\lambda}\, d\lambda$$

ist, woraus durch partielle Integration

$$\int \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \delta\varphi'\, d\lambda = \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \delta\varphi - \int \delta\varphi \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi'} \right) d\lambda$$

folgt, so wird

$$\delta s = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi'} \delta\varphi \right)_{\lambda_0}^{\lambda_1} + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi'} \right) \right] d\lambda\, \delta\varphi.$$

Es entsprechen daher den geogr. Breiten	φ,	φ_1,	
d. h. den Seiten des geodätischen Dreieckes	AP,	BP,	s
die Seiten des sphärischen Dreieckes	$90° - u_1$,	$90° - u$,	σ
und den Winkeln des geodätischen Dreieckes	α_1	$180° - \alpha$,	$\lambda_1 - \lambda$
die Winkel des sphärischen Dreieckes	α_1	$180° - \alpha$,	ω.

Für alle betrachteten Kurven, die ja durch die fixen Punkte A, B gehen sollen, ist für die Anfangs- und Endpunkte $\delta\varphi$ gleich Null und es bleibt

$$\delta s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi'}\right)\right] \delta\varphi \, d\lambda.$$

Für irgendeine beliebige Kurve wird je nach der Wahl von $\delta\varphi$ die Änderung δs positiv oder negativ werden. Für diejenige Annahme, für welche jedoch $\delta s = 0$ ist, d. h. für welche

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi'}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(m)}$$

ist, wird in der Entwicklung

$$s = s_0 + \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)\delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}\right)\delta\varphi^2 + \ldots$$

die Änderung von s für positive und negative $\delta\varphi$ dieselbe sein; die Linie wird ein Maximum, wenn $\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}$ negativ ist, weil dann für jede benachbarte Linie $s < s_0$ ist; die Linie wird ein Minimum, wenn $\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}$ positiv ist, weil dann stets $s > s_0$ wird. Die kürzeste Linie wird daher durch die Gleichung (m) bestimmt.

Enthält die Funktion f wie hier nur φ und φ', so wird die Gleichung (m) durch Multiplikation mit $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ integrabel, denn es wird:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi'}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \varphi'}\frac{\partial \varphi'}{d\lambda} - \frac{\partial f}{\partial \varphi'}\frac{d\varphi'}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi'}\right)\cdot\frac{d\varphi}{d\lambda} \\ &= \frac{df}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\left(\varphi'\,\frac{\partial f}{\partial \varphi'}\right) \end{aligned}$$

deren Integral

$$f - \varphi'\,\frac{\partial f}{\partial \varphi'} = \text{Konst.}$$

ist. Nun wird

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi'} = \rho_m{}^2\,\frac{\varphi'}{f}$$

daher wird die Gleichung

$$\sqrt{\rho_m{}^2\varphi'^2 + \rho^2} - \frac{\varphi'^2\,\rho_m{}^2}{\sqrt{\rho_m{}^2\varphi'^2 + \rho^2}} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho_m{}^2\varphi'^2 + \rho^2}} = \text{Konst.}$$

daher auch

$$\frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho_m\, d\varphi}{\rho\, d\lambda}\right)^2 + 1}} = \text{Konst.}$$

Es ist aber

$$\frac{\rho_m d\varphi}{\rho\, d\lambda} = \cot cab = \cot\alpha,$$

Allerdings läßt sich immer ein sphärisches Dreieck aus drei Seiten konstruieren. Würde man also zu den beiden Punkten mit den Breiten φ, φ_1 und dem geodätischen Azimut α_1 die zugehörigen reduzierten Breiten u, u_1 und denselben Winkel α_1 als gegeben annehmen, so würde sich ein sphärisches Dreieck zeichnen lassen; fraglich bleibt aber dabei, ob in diesem

---

wenn α der (von Punkt zu Punkt veränderliche) Winkel ist, den die geodätische Linie mit dem Meridian in diesem Punkte einschließt. Daher folgt

$$\rho \sin \alpha = \text{Konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(n)}$$

die Clairautsche Gleichung (Memoiren der Pariser Akademie für 1733).

Spannt man einen Faden zwischen zwei Punkten einer beliebigen Fläche, so wird er sich so anlegen, daß jedes Stück desselben in der Krümmungsebene liegt; dies gibt eine zweite Bestimmung der geodätischen Linie und man erhält als Differentialgleichung derselben in rechtwinkligen Koordinaten

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

welche Gleichung allein mit der Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der geodätischen Linie bestimmt. (Die beiden Bedingungen lassen sich übrigens auch mathematisch aufeinander zurückführen.)

Für das Rotationsellipsoid wird die Gleichung

$$F(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

daher

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{a^2}$$

und die Differentialgleichung wird

$$y\frac{d^2x}{ds^2} - x\frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

oder

$$\frac{d}{ds}\left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

deren erstes Integral

$$y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = C$$

ist, wobei C die Integrationskonstante bedeutet. Führt man hier Polarkoordinaten in der xy-Ebene durch

$$x = \rho \cos \lambda, \; y = \rho \sin \lambda$$

ein (λ die Länge vom Anfangsmeridian), so wird

$$\frac{dx}{ds} = -\rho \sin \lambda \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \frac{d\rho}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = +\rho \cos \lambda \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \frac{d\rho}{ds}$$

demnach

$$y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = -\rho^2 \frac{d\lambda}{ds} = \text{Konst.}$$

und da $\rho d\lambda : ds = \sin \alpha$ ist

$$\rho \sin \alpha = \text{Konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(n)}$$

dieselbe Gleichung wie oben.

Dreiecke auch der Winkel α vorkommen wird. Dieses läßt sich in der Tat zeigen.*

* Vgl. hierzu Grunert, Sphäroidische Trigonometrie, Berlin 1833, S. 52 ff. — Ph. Fischer, Lehrbuch der höheren Geodäsie, III. Abschnitt, S. 139 ff. — Clarke, Geodesy, Oxford 1880, S. 125 ff. — Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I. Bd., S. 213 ff.

Bezeichnet man mit ρ und z die Koordinaten der Meridianellipse (in Nr. 140 mit x, y bezeichnet), daher

$$\rho = a \cos u, \quad z = b \sin u,$$

so wird die Clairautsche Gleichung

$$\sin \alpha \cos u = \text{Konst.} = \sin \alpha_1 \cos u_1.$$

Für das Bogenelement ds auf der Fläche hat man nun

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \rho^2 d\lambda^2 + d\rho^2 + dz^2.$$

Aus den Gleichungen

$$\rho d\lambda = ds \sin \alpha$$
$$ds^2 = \rho^2 d\lambda^2 + (d\rho^2 + dz^2)$$

folgt dann weiter noch

$$ds^2 = (d\rho^2 + dz^2) \sec \alpha^2$$
$$\rho^2 d\lambda^2 = (d\rho^2 + dz^2) \tan \alpha^2.$$

Drückt man auch hier alles durch die reduzierte Breite aus, so wird

$$d\rho = -a \sin u \, du, \quad dz = +b \cos u \, du,$$

demnach

$$ds^2 = (a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2) \, du^2 \sec \alpha^2$$
$$a^2 \cos u^2 \, d\lambda^2 = (a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2) \, du^2 \tan \alpha^2$$

oder

$$ds = \pm a \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos u^2}}{\cos \alpha} \, du$$

$$d\lambda = \pm \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos u^2}}{\cos u} \tan \alpha \, . \, du$$

Differentialausdrücke, deren Integration zur Kenntnis von s und λ, ausgedrückt durch u, führt. Es kommt zwar noch α vor, welches sich aber mittels der ersten Grundformel ebenfalls durch u ausdrücken läßt. Allein bei der Ausführung stößt man auf Schwierigkeiten, welche umgangen werden, wenn man das sphärische Hilfsdreieck einführt, in welchem $90° - u_1$, $90° - u$ zwei Seiten und α_1, $180° - \alpha$ die gegenüberliegenden Winkel sind. Daß dies zulässig ist, lehrt die Gleichung

$$\sin \alpha \cos u = \sin \alpha_1 \cos u_1.$$

Hingegen werden die beiden noch übrigen Stücke nicht $\lambda_1 - \lambda$ beziehungsweise s sein, sondern andere Werte ω und σ erhalten. Durch Einführung dieser Stücke ω, σ an Stelle von $\lambda_1 - \lambda$ und s kann α leicht eliminiert und die Integration vereinfacht werden.

Wird der Punkt A als fest angesehen und B als beweglich, z. B. in b, längs der geodätischen Linie gleitend, so werden α_1, u_1 konstant, $d\alpha_1 = du_1 = 0$, alle anderen Stücke als veränderlich anzusehen sein.

Zwischen den Differentialen der Seiten a, b, c und der Winkel A, B, C eines sphärischen Dreieckes bestehen die Beziehungen

$$da = \cos C db + \cos B dc + \sin b \sin C dA$$
$$\sin a dB = \sin C db - \cos a \sin B dc - \sin b \cos C dA.$$

Nimmt man der Reihe nach a, b, c, A, B, C in dem Dreiecke $A'P'B'$: $90° - u$, $90° - u_1$, σ; α_1, $180° - \alpha$, ω, so folgt aus der ersten Formel

$$du = \cos \alpha d\sigma,$$

Unter diesen Voraussetzungen hat man dann zunächst für das sphärische Hilfsdreieck (Fig. 275)

$$\begin{aligned} \sin u &= \sin u_1 \cos\sigma + \cos u_1 \sin\sigma \cos\alpha_1 \\ \cos u \sin\alpha &= \cos u_1 \sin\alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \cos u \cos\alpha &= -\sin u_1 \sin\sigma + \cos u_1 \cos\sigma \cos\alpha_1 \\ \cos u \sin\omega &= \sin\sigma \sin\alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ \cos u \cos\omega &= \cos\sigma \cos u_1 - \sin\sigma \sin u_1 \cos\alpha_1, \end{aligned}$$

daher

$$ds = \pm a \sqrt{1 - e^2 \cos u^2}\, d\sigma.$$

Nimmt man aber für a, b, c, A, B, C: σ, $90^\circ - u$, $90^\circ - u_1$; ω, α_1, $180^\circ - \alpha$, so folgt aus der zweiten Formel

$$\sin\alpha\, du - \cos u \cos\alpha\, d\omega = 0,$$

daher

$$du = \cos u \cot\alpha\, d\omega$$

und

$$d\lambda = \pm \sqrt{1 - e^2 \cos u^2}\, d\omega.$$

In diesen beiden Formeln ist α eliminiert. Wächst λ gleichzeitig mit ω, σ mit s, so entfallen die negativen Zeichen und die zu integrierenden Gleichungen werden:

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos u^2}\, d\sigma$$

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2 \cos u^2}\, d\omega.$$

Die erste Gleichung ist einfach zu integrieren, da sich $\cos u$ mit Hilfe der in (3) eingeführten Hilfswinkel k, K durch σ ausdrücken läßt; es wird mit Benutzung der Gleichungen (4)

$$1 - e^2 \cos u^2 = 1 - e^2 + e^2 \sin u^2 = 1 - e^2 + e^2 \cos k^2 \sin(K + \sigma)^2$$

$$= (1 - e^2)\left[1 + \frac{e^2 \cos k^2}{1 - e^2} \sin(K + \sigma)^2\right].$$

Es läßt sich für jeden Wert von l und v schreiben:

$$1 \pm l^2 \sin v^2 = \mu^2 (1 \mp \nu\varepsilon^{2iv})(1 \mp \nu\varepsilon^{-2iv}),$$

(ε die Basis der natürlichen Logarithmen); denn durch Multiplikation erhält man

$$1 \pm l^2 \sin v^2 = \mu^2 (1 + \nu^2 \mp 2\nu \cos 2v)$$

und daher

$$\mu^2 (1 \mp \nu)^2 = 1;\ 4\mu^2\nu = l^2,$$

woraus für die oberen Zeichen:

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + l^2} \mp 1\right);\ \nu = \frac{\sqrt{1 + l^2} \pm 1}{\sqrt{1 + l^2} \mp 1}$$

$$\mu = \frac{1}{1 - \nu}$$

und für die unteren Zeichen:

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - l^2}\right);\ \nu = \frac{1 \pm \sqrt{1 - l^2}}{1 \mp \sqrt{1 - l^2}}$$

$$\mu = \frac{1}{1 + \nu}$$

folgt. Die für jeden einzelnen Fall geltenden Doppelzeichen führen zu demselben Resultate; bei kleinen Werten von l sind die unteren Zeichen zu wählen.

Da hier

$$l^2 = \frac{e^2 \cos k^2}{1 + e^2}$$

welche Gleichungen zur geodätischen Übertragung von Länge, Breite und Azimut von einem bekannten Punkte A auf einen andern Punkt B zunächst im Hilfsdreiecke dienen, wenn aus der geodätischen Entfernung s der Bogen σ

---

für den ersten Fall ist, so wird, wenn

$$\frac{e\cos k}{\sqrt{1-e^2}} = \operatorname{tang} L,\ \nu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}L^2,\ \mu = \frac{1}{1-\nu}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{1-e^2\cos u^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-\nu}\left(1-\nu\varepsilon^{2i(K+\sigma)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\nu\varepsilon^{-2i(K+\sigma)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man jeden Faktor nach dem binomischen Lehrsatz und benutzt die Koeffizienten S_0, S_1, S_2 aus (7), so folgt:

$$ds = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-\nu}\left[S_0 - S_1\cos 2(K+\sigma) - S_2\cos 4(K+\sigma)\ldots\right]d\sigma$$

und daher durch Integration zwischen den Grenzen $\sigma = 0$ bis σ:

$$s = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-\nu}\left[S_0\sigma - \tfrac{1}{2}S_1\left\{\sin 2(K+\sigma) - \sin 2K\right\} - \tfrac{1}{4}S_2\left\{\sin 4(K+\sigma) - \sin 4K\right\}\ldots\right]$$

und daraus die Reihe (5) für s.

Statt in ähnlicher Weise $\cos u$ für die zweite Gleichung durch ω auszudrücken, ist es leichter, $d\omega$ ebenfalls durch $d\sigma$ zu ersetzen. Aus den beiden Beziehungen für du folgt unmittelbar

$$\cos\alpha\, d\sigma = \cos u\cot\alpha\, d\omega,$$

demnach

$$d\omega = \frac{\sin\alpha\, d\sigma}{\cos u} = \frac{\sin\alpha\cos u}{\cos u^2}d\sigma = \frac{\sin\alpha_1\cos u_1}{\cos u^2}d\sigma,$$

womit das veränderliche Azimut α durch das konstante α_1 ersetzt ist, so daß

$$d\lambda = \sin\alpha_1\cos u_1\frac{\sqrt{1-e^2\cos u^2}}{\cos u^2}d\sigma$$

wird. Um hier den Nenner wegzuschaffen, setzt Bessel

$$d\lambda = d\omega - (1-\sqrt{1-e^2\cos u^2})\,d\omega$$

$$= d\omega - \sin\alpha_1\cos u_1\frac{1-\sqrt{1-e^2\cos u^2}}{\cos u^2}d\sigma.$$

Es ist aber

$$\sqrt{1-e^2\cos u^2} = 1 - \tfrac{1}{2}e^2\cos u^2 - \tfrac{1}{8}e^4\cos u^4 - \tfrac{1}{16}e^6\cos u^6 - \tfrac{5}{128}e^8\cos u^8\ldots,$$

daher

$$d\lambda = d\omega - \sin\alpha_1\cos u_1\tfrac{1}{2}e^2\left[1+\tfrac{1}{4}e^2\cos u^2+\tfrac{1}{8}e^4\cos u^4+\tfrac{5}{64}e^6\cos u^6+\ldots\right]d\sigma.$$

Bessel leitete für die Lösung durch eine sinnreiche Transformation, allerdings mit einer kleinen Vernachlässigung, Reihen ab, welche denjenigen der S ähnlich sind; ohne diese Vernachlässigung lassen sich auf die folgende Weise Reihen für die Koeffizienten ableiten. Setzt man

$$\cos k^2\sin(K+\sigma)^2 = n^2,$$

so wird

$$\cos u^2 = 1 - n^2$$
$$\cos u^4 = 1 - 2n^2 + n^4$$
$$\cos u^6 = 1 - 3n^2 + 3n^4 - n^6$$

des Hilfsdreieckes berechnet wurde. Dann hat man noch aus u und ω die für das Ellipsoid geltenden φ, $\lambda_1 - \lambda$ zu berechnen, da α dasselbe ist.

Da u und u_1 stets im ersten Quadranten liegen und σ stets positiv ist, so ersieht man aus der zweiten und vierten dieser Formeln, daß α und α_1

---

und damit folgt für die hier vorkommende Reihe

$$R = 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos u^2 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} e^4 \cos u^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} e^6 \cos u^6 \ldots .$$

der Wert

$$R = P_0 - \frac{1}{4} P_1 e^2 n^2 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} P_2 e^4 n^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} P_3 e^6 n^6 + \ldots .$$

wobei

$$P_0 = 1 + \frac{1}{4} e^2 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} e^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} e^6 \ldots .$$

$$P_1 = 1 + \binom{2}{1} \cdot \frac{3}{6} e^2 + \binom{3}{1} \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} e^4 + \ldots .$$

$$P_2 = 1 + \binom{3}{2} \cdot \frac{5}{8} e^2 + \binom{4}{2} \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 10} e^4 + \ldots .$$

$$P_3 = 1 + \binom{4}{3} \frac{7}{10} e^2 + \binom{5}{3} \frac{7 \cdot 9}{10 \cdot 12} e^4 + \ldots .$$

. . . . . .

$$P_n = 1 + \binom{n+1}{1} \frac{2n+1}{2n+4} e^2 + \binom{n+2}{2} \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+4)(2n+6)} e^4 \ldots .$$

ist. Setzt man Kürze halber $e^2 \cos k^2 = \rho$

so wird

$$-e^2 n^2 = \frac{1}{2} \rho [\cos 2(K+\sigma) - \frac{1}{2} \cdot 2]$$

$$+e^4 n^4 = \frac{1}{2^2} \rho^2 [\cos 4(K+\sigma) - 4 \cos 2(K+\sigma) + \frac{1}{2} \cdot 6]$$

$$-e^6 n^6 = \frac{1}{2^5} \rho^3 [\cos 6(K+\sigma) - 6 \cos 4(K+\sigma) + 15 \cos 2(K+\sigma) - \frac{1}{2} \cdot 20].$$

. . . . . .

Führt man diese Werte in die Reihe R ein, so treten die Produkte $P_1 \rho$, $P_2 \rho^2$, $P_3 \rho^3 \ldots .$ auf; da aber

$$\rho = e^2 \cos k^2 = l^2 (1 - e^2) = 4 \mu^2 \nu (1 - e^2) = \frac{4\nu}{(1-\nu)^2} (1 - e^2)$$

ist, so sind zunächst die Produkte $P_i (1 - e^2)^i$ zu bilden; man findet:

$$Q_0 = P_0$$

$$Q_1 = P_1 (1 - e^2) = 1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{8} e^4 - \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} e^6 \ldots . - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots . (2n-1)}{6 \cdot 8 \cdot 10 \ldots . (2n+2)} \cdot \frac{n-1}{2n+4} e^{2n} \ldots .$$

$$Q_2 = P_2 (1 - e^2)^2 = 1 - \frac{1}{8} e^2 - \frac{1}{8} e^4 - \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{8} e^6 \ldots . -$$

$$- \frac{5 \cdot 7 \ldots . (2n-1)}{8 \cdot 10 \ldots . (2n+2)} \cdot \frac{n^2 + 11n - 6}{2(2n+4)(2n+6)} e^{2n} \ldots .$$

$$Q_3 = P_3 (1 - e^2)^3 = 1 - \frac{1}{5} e^2 - \frac{3}{20} e^4 - \frac{1}{10} e^6 \ldots . -$$

$$- \frac{7 \cdot 9 \ldots . (2n-1)}{8 \cdot 10 \ldots . (2n+2)} \cdot \frac{n^3 + 12n^2 + 77n - 30}{2(2n+4)(2n+6)(2n+8)} e^{2n} \ldots .$$

. . . . . .

. . . . . .

$$Q_n = P_n (1 - e^2)^n = 1 - \frac{n-1}{2n+4} e^2 - \frac{n^2 + 11n - 6}{2(2n+4)(2n+6)} e^4 - \frac{n^3 + 12n^2 + 77n - 30}{2(2n+4)(2n+6)(2n+8)} e^6 \ldots .$$

Setzt man

$$\frac{\nu}{(1-\nu)^2} = \pi$$

stets im selben Quadranten liegen und ω positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem α_1 kleiner oder größer als 180° ist; daraus folgt, daß ω daher auch der Längenunterschied beim Übergang auf einen zweiten östlich gelegenen Ort positiv, beim Übergang auf einen westlich gelegenen Ort negativ zu nehmen ist.

Setzt man

$$\begin{aligned} \sin u_1 &= \cos k \sin K \\ \cos u_1 \cos \alpha_1 &= \cos k \cos K \\ \cos u_1 \sin \alpha_1 &= \sin k, \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

was immer möglich ist, da man durch Quadrieren und Addieren der drei Gleichungen auf die Identität $1 = 1$ geführt wird und substituiert in die Gleichungen (1), so folgt

$$\begin{aligned} \sin u &= \cos k \sin (K + \sigma) \\ \cos u \cos \alpha &= \cos k \cos (K + \sigma) \\ \cos u \sin \alpha &= \sin k \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

wobei die Hilfswinkel k, K sich aus den Werten u_1 und α_1 für den Anfangspunkt A bestimmen.

Zwischen s und σ besteht dann die Beziehung

$$s = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-\nu}\,[S_0\,\sigma - S_1 \cos(2K+\sigma)\sin\sigma - \tfrac{1}{2} S_2 \cos 2(2K+\sigma)\sin 2\sigma - \\ - \tfrac{1}{3} S_3 \cos 3(2K+\sigma)\sin 3\sigma \ldots] \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

wobei

$$\frac{e\cos k}{\sqrt{1-e^2}} = \operatorname{tang} L,\ \nu = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} L \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\log\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right) = 8{\cdot}9136594$$

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \nu^2 + \left(\tfrac{1}{2.4}\right)^2 \nu^4 + \left(\tfrac{1.3}{2.4.6}\right)^2 \nu^6 \ldots. \\ S_1 &= 2\left[\tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2.4}\nu^3 - \tfrac{1}{2.4}\tfrac{1.3}{2.4.6}\nu^5 - \ldots\right] \\ S_2 &= 2\left[\tfrac{1}{2.4}\nu^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1.3}{2.4.6}\nu^4 - \ldots\right] \\ S_3 &= 2\left[\tfrac{1.3}{2.4.6}\nu^3 - \ldots\right] \end{aligned} \quad \ldots\ldots (7)$$

ist. Da die Koeffizienten S_1, S_2, S_3 ... sehr klein sind und S_0 nahe 1 ist, so wird s nahe $a\sigma$; um daher umgekehrt σ zu bestimmen, wenn s, die

---

und führt hier die Koeffizienten L_0, L_1, L_2 ... aus (10) ein, so erhält man

$$d\lambda = d\omega - \tfrac{1}{2}e^2 \sin\alpha_1 \cos u_1 [L_0 + L_1 \cos 2(K+\sigma) + L_2 \cos 4(K+\sigma) + L_3 \cos 6(K+\sigma)\ldots] d\sigma$$

und durch Integration

$$\lambda_1 - \lambda = \omega - \tfrac{1}{2}e^2 \sin\alpha_1 \cos u_1 \left[L_0\sigma + \tfrac{1}{2}L_1\left\{\sin 2(K+\sigma) - \sin 2K\right\} + \tfrac{1}{4}L_2\left\{\sin 4(K+\sigma) - \sin 4K\right\}\ldots\right]$$

woraus die Formel (9) resultiert.

Länge einer Seite auf dem Erdsphäroid gemessen wurde, kann man in erster Näherung

$$\sigma = \frac{1-\nu}{a\sqrt{1-e^2}\,S_0}\,s = \frac{\Sigma_0}{a\sqrt{1-e^2}}\,s$$

setzen und diesen Wert rechts in den mit σ behafteten Gliedern in Formel (8) verwenden. Es wird dann

$$\sigma = \frac{\Sigma_0}{a\sqrt{1-e^2}}\,s + \Sigma_1 \cos(2K+\sigma)\sin\sigma + \Sigma_2 \cos 2(2K+\sigma)\sin 2\sigma + \ldots . \quad (8)$$

wobei

$$\Sigma_0 = \frac{1-\nu}{S_0}, \quad \Sigma_1 = \frac{S_1}{S_0}, \quad \Sigma_2 = \tfrac{1}{2}\frac{S_2}{S_0} \text{ usw.}$$

ist. Die Werte Σ_1, Σ_2 sind nicht konstant, sondern hängen von der Lage des Anfangspunktes und der Richtung der Seite s ab; denn aus diesen bestimmt sich k und damit ν; aber mit dem Argument ν kann man die Koeffizienten Σ in Tafeln bringen, wie dies von Bessel geschah. Abgekürzte Tafeln dieser Art finden sich im Anhange. (Tafel V a).

Schließlich erhält man für die Längendifferenz auf dem Erdellipsoide:

$$\lambda - \lambda_1 = \omega - \tfrac{1}{2}e^2 \sin\alpha_1 \cos u_1 [L_0\sigma + L_1 \cos(2K+\sigma)\sin\sigma + \\ + \tfrac{1}{2}L_2 \cos 2(2K+\sigma)\sin 2\sigma + \tfrac{1}{3}L_3 \cos 3(2K+\sigma)\sin 3\sigma \ldots] \quad (9)$$

wobei

$$\begin{aligned} L_0 &= T_0 - \tbinom{2}{1} T_1 \pi + \tbinom{4}{2} T_2 \pi^2 - \tbinom{6}{3} T_3 \pi^3 + \ldots . \\ L_1 &= 2[T_1 \pi - \tbinom{4}{1} T_2 \pi^2 + \tbinom{6}{2} T_3 \pi^3 \ldots .] \\ L_2 &= 2[T_2 \pi^2 - \tbinom{6}{1} T_3 \pi^3 + \tbinom{8}{2} T_4 \pi^4 \ldots .] \\ L_3 &= 2[T_3 \pi^3 - \tbinom{8}{1} T_4 \pi^4 \ldots .], \end{aligned} \quad \ldots \ldots (10)$$

wobei

$$\begin{aligned} T_0 &= Q_0 \\ T_1 &= \tfrac{1}{4} Q_1 \\ T_2 &= \tfrac{1.3}{4.6} Q_2 \\ T_3 &= \tfrac{1.3.5}{4.6.8} Q_3 \\ &\ldots \ldots \end{aligned} \qquad \pi = \frac{\nu}{(1-\nu)^2} \quad \ldots . (10a)$$

ist und die Q_0, Q_1, Q_2 .... die in der Anmerkung S. 352 angegebenen Reihen bedeuten. Mit dem Besselschen Werte von e erhält man:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1{\cdot}0016741847 \\ T_1 &= 0{\cdot}249999299 & T_4 &= 0{\cdot}054596 \\ T_2 &= 0{\cdot}12489501 & T_5 &= 0{\cdot}04094 \\ T_3 &= 0{\cdot}0780202 & T_6 &= 0{\cdot}0322 \end{aligned}$$

Auch diese Formel läßt sich umkehren. Wenn nämlich $\lambda - \lambda_1 = \Delta\lambda$ bekannt ist, so erhält man ω nach

$$\omega = \Delta\lambda + \tfrac{1}{2}e^2 \sin\alpha_1 \cos u_1 [L_0\sigma + L_1 \cos(2K+\sigma)\sin\sigma + \\ + \tfrac{1}{2}L_2 \cos 2(2K+\sigma)\sin 2\sigma \ldots] \quad \ldots \ldots (11)$$

Für die Koeffizienten L_0, L_1 ... sind die Werte ebenfalls den Tafeln im Anhange (Tafel V*b*) zu entnehmen. Statt der Logarithmen wurden die Zahlen selbst tabuliert, weil in dieser Form ähnlich wie bei den Besselschen Tafeln die Interpolation viel bequemer ist.

144. Geodätische Übertragung der geographischen Koordinaten. Sind λ_1, φ_1 die geographischen Koordinaten eines Punktes A, s die Länge einer Seite AB, deren Azimut auf dem Ellipsoid $A_1 = 180° + \alpha_1$ ist, so kann man nach den Formeln von Nr. 143 die geographische Breite und Länge des zweiten Punktes und das Azimut $A' = \alpha_2$ derselben Richtung am zweiten Punkte bestimmen. Zunächst wird aus φ_1 der Wert von u_1 berechnet (Nr. 140), hiermit wird k und K ermittelt, worauf sich dann σ nach Formel (8) Nr. 143 ergibt. Nunmehr kann das sphärische Dreieck nach den Formeln (1), (2) Nr. 143 berechnet werden und gibt die Werte von u, α und ω; aus der reduzierten Breite u findet sich schließlich die geographische Breite φ und aus ω nach Formel (9) Nr. 143 der Wert von $\lambda_1 - \lambda$.

Für die Auflösung des sphärischen Dreieckes sind die logarithmisch-tauglichen Gaußschen Gleichungen jedoch vorzuziehen. Nennt man $90° - u_1 = v_1$, $90° - u_2 = v_2$, so ergibt das sphärische Hilfsdreieck aus den bekannten Werten v_1, σ, α_1 durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \omega)\cos\tfrac{1}{2}v_2 &= \cos\tfrac{1}{2}(v_1 - \sigma)\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \omega)\cos\tfrac{1}{2}v_2 &= \cos\tfrac{1}{2}(v_1 + \sigma)\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\\
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \omega)\sin\tfrac{1}{2}v_2 &= \sin\tfrac{1}{2}(v_1 - \sigma)\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \omega)\sin\tfrac{1}{2}v_2 &= \sin\tfrac{1}{2}(v_1 + \sigma)\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1
\end{aligned} \quad \ldots (1)$$

$$u_2 = 90° - v_2.$$

Beachtet man übrigens, daß das sphärische Hilfsdreieck (Fig. 275) aus dem analogen Dreiecke (Fig. 271) bei Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde hervorgeht, wenn

φ,	φ_1,	δ,	A,	A_1,	$\lambda - \lambda_1$

durch

u_1,	u_2,	σ,	$180° + \alpha_1$	$180° + \alpha_2$	ω

ersetzt werden, so ist auch die dort angeführte Gaußsche Lösung verwendbar; es wird (sphärisch $\lambda_2 - \lambda_1$, ellipsoidisch ω):

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\omega &= +\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos\frac{1}{2}(u_1 + u_2)}\sin\tfrac{1}{2}\sigma\\
\sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) &= +\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos\frac{1}{2}\omega}\sin\tfrac{1}{2}\sigma \quad \ldots (2)\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) &= +\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\tan\tfrac{1}{2}(u_1 + u_2)\tan\tfrac{1}{2}\sigma.
\end{aligned}$$

Beispiel. Ausgehend vom trigonometrischen Punkt I. Ordnung Hermannskogel, für welchen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 48° 16' 15{\cdot}29''\\
\lambda_1 &= 33° 57' 41{\cdot}06'' \text{ von Ferro}
\end{aligned}$$

ist, sollen die geographischen Koordinaten am trigonometrischen Punkte I. Ordnung Gurgo-hegy berechnet werden, wobei siehe S. 328

$$s = 200106{\cdot}36\ m \qquad \log s = 5{\cdot}3012609$$

$$A = 348^\circ\ 12'\ 12{\cdot}60''.$$

ist. Zunächst findet sich

$$u_1 = 48^\circ\ 10'\ 32{\cdot}15'' \qquad \alpha_1 = 168^\circ\ 12'\ 12{\cdot}60''$$

und damit

$$\begin{aligned}
\log\cos\alpha_1 &= 9{\cdot}990729_n & \log\cos k &= 9{\cdot}995926\\
\log\cos u_1 &= 9{\cdot}824028 & \log\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} &= 8{\cdot}913659\\
\log\sin\alpha_1 &= 9{\cdot}310558 & \log\operatorname{tang} L &= 8{\cdot}909585\\
\log(\cos k\sin K) &= 9{\cdot}872268 & L &= 4^\circ\ 38'\ 33{\cdot}19''\\
& 9{\cdot}876842 & \tfrac{1}{2}L &= 2\ \ 19\ \ 16{\cdot}59\\
\log(\cos k\cos K) &= 9{\cdot}814757_n & \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}L &= 8{\cdot}607842\\
\log\operatorname{tang} K &= 0{\cdot}057511_n & \log\nu &= 7{\cdot}215684\\
\log\cos k &= 9{\cdot}995926 & \nu &= 0{\cdot}0016432\\
\log\sin k &= 9{\cdot}134586 & \Sigma_0 &= 0{\cdot}9983562;\ \Sigma_1 = \nu\\
K &= 131^\circ\ 13'\ 2{\cdot}6'' & L_0 &= 1{\cdot}0008519;\ L_1 = \tfrac{1}{2}\nu\\
\log s &= 5{\cdot}3012609 & 2K &= 262^\circ\ 26'\ 5''\\
\log\Sigma_0 &= 9{\cdot}9992855 & \sigma' &= 1\ \ 48\ \ 3\\
& 5{\cdot}3005464 & 2K+\sigma' &= 264^\circ\ 14'\ 8''\\
\log(a\sqrt{1-e^2}) &= 6{\cdot}8031893 & \log\cos(2K+\sigma') &= 9{\cdot}00190_n\\
\log\text{arc}\,1'' &= 4{\cdot}6855749 & \log\sin\sigma' &= 8{\cdot}49728\\
\log\sigma' &= 3{\cdot}8117822 & \log\Sigma_1 &= 7{\cdot}21568\\
\sigma' &= 1^\circ\ 48'\ 3{\cdot}093'' & & 4{\cdot}71486_n\\
&\text{(erste Näherung)} & \log\text{arc}\,1'' &= 4{\cdot}68557\\
\text{Korr.} &= \quad -1{\cdot}070 & \log\text{Korr.} &= 0{\cdot}02929_n\\
\sigma &= 1^\circ\ 48'\ 2{\cdot}023''
\end{aligned}$$

Die Auflösung des Dreieckes ergibt* nach den Formeln (1):

---

* Zur Vergleichung ist hier auch die Auflösung des Dreieckes unter der Voraussetzung der Erde als Kugel angeschrieben. Hierzu ist jedoch eine Annahme für den Kugelhalbmesser notwendig, unter der Voraussetzung, daß dieser gleich dem mittleren Krümmungshalbmesser des Erdellipsoides für 47° 23·4′ Breite ist, folgt

$$\begin{aligned}
\log\Delta &= 5{\cdot}3012578\\
\log\frac{1}{R\,\text{arc}\,1''} &= 8{\cdot}5096629\\
\log\delta &= 3{\cdot}8109207\\
\delta(s) &= 1^\circ\,47'\,50{\cdot}244'',
\end{aligned}$$

welcher Wert oben verwendet wurde. Die kleinen Abweichungen gegen das Resultat auf S. 328 rühren davon her, daß dort ein anderer Wert für R verwendet und Glieder höherer Ordnung vernachlässigt wurden.

Sphärisch:		Auf dem Ellipsoide:	
$v_1 = 90° - \varphi_1$	$= 41° 43' 44{\cdot}71''$	$90° - u_1$	$= 41° 49' 27{\cdot}85''$
σ'	$= 1 47 50{\cdot}244$		$1 48 2{\cdot}023$
$v_1 + \sigma$	$= 43 31 34{\cdot}954$		$43 37 29{\cdot}873$
$v_1 - \sigma$	$= 39 55 54{\cdot}466$		$40 1 25{\cdot}827$
$\frac{1}{2}(v_1 + \sigma)$	$= 21 45 47{\cdot}477$		$21 48 44{\cdot}936$
$\frac{1}{2}(v_1 - \sigma)$	$= 19 57 57{\cdot}233$		$20 0 42{\cdot}913$
$\frac{1}{2}\alpha_1$	$= 84 6 6{\cdot}30$		$84 6 6{\cdot}30$
$\log\cos\frac{1}{2}(v_1 - \sigma)$	$= 9{\cdot}9730798$		$9{\cdot}9729530$
$\log\cos\frac{1}{2}\alpha_1$	$= 9{\cdot}0118332$		$9{\cdot}0118332$
$\log\sin\frac{1}{2}(v_1 - \sigma)$	$= 9{\cdot}5333409$		$9{\cdot}5342998$
$\log\cos\frac{1}{2}(v_1 + \sigma)$	$= 9{\cdot}9678868$		$9{\cdot}9677375$
$\log\sin\frac{1}{2}\alpha_1$	$= 9{\cdot}9976947$		$9{\cdot}9976947$
$\log\sin\frac{1}{2}(v_1 + \sigma)$	$= 9{\cdot}5691060$		$9{\cdot}5700408$
$\log[\cos\frac{1}{2}(\alpha_2 - \omega)\cos\frac{1}{2}v_2]$	$= 8{\cdot}9849130$		$8{\cdot}9847862$
	$9{\cdot}9976392$		$9{\cdot}9976390$
$\log[\sin\frac{1}{2}(\alpha_2 - \omega)\cos\frac{1}{2}v_2]$	$= 9{\cdot}9655815$		$9{\cdot}9654322$
$\log[\cos\frac{1}{2}(\alpha_2 + \omega)\sin\frac{1}{2}v_2]$	$= 8{\cdot}5451741$		$8{\cdot}5461330$
	$9{\cdot}9980432$		$9{\cdot}9980430$
$\log[\sin\frac{1}{2}(\alpha_2 + \omega)\sin\frac{1}{2}v_2]$	$= 9{\cdot}5668007$		$9{\cdot}5677355$
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha_2 - \omega)$	$= 0{\cdot}9806685$		$0{\cdot}9806460$
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha_2 + \omega)$	$= 1{\cdot}0216266$		$1{\cdot}0216025$
$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \omega)$	$= 84° 1' 52{\cdot}711''$		$84° 1' 51{\cdot}606''$
$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \omega)$	$= 84 33 54{\cdot}398$		$84 33 53{\cdot}319$
$\log\cos\frac{1}{2}v_2$	$= 9{\cdot}9679423$		$9{\cdot}9677932$
$\log\sin\frac{1}{2}v_2$	$= 9{\cdot}5687575$		$9{\cdot}5696925$
$\frac{1}{2}v_2$	$= 21° 44' 41{\cdot}42''$		$21° 47' 38{\cdot}77''$
α_2	$= 168 35 47{\cdot}11$		$168 35 44{\cdot}92$
ω	$= 0 32 1{\cdot}687$		$0 32 1{\cdot}713$
v_2	$= 43 29 22{\cdot}84$		$43 35 17{\cdot}54$
φ_2	$= 46 30 37{\cdot}16$	u_2	$= 46 24 42{\cdot}46$
		φ_2	$= 46 30 27{\cdot}34.$

Nach den Formeln (2) wird die Rechnung nur 6stellig zu führen sein, jedoch mit genäherten Werten von φ_2, u_2 und α_2, die daher bereits bekannt sein müssen:

Sphärisch:		Auf dem Ellipsoide:	
$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$	$= 168° 23' 59{\cdot}8''$	$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$	$= 168° 23' 58{\cdot}8''$
$\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$	$= 47 23 26{\cdot}2$	$\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$	$= 47 17 37{\cdot}3$
σ	$= 1 47 50{\cdot}244$	σ	$= 1 48 2{\cdot}023$
$\frac{1}{2}\sigma$	$= 0 53 55{\cdot}122$	$\frac{1}{2}\sigma$	$= 0 54 1{\cdot}011$

Sphärisch:		Auf dem Ellipsoide:	
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma$	$= 8{\cdot}195501$		$8{\cdot}196291$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$	$= 0{\cdot}036283$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$	$= 0{\cdot}034809$
$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$	$= 9{\cdot}303366$	$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$	$= 9{\cdot}303377$
$\log \sec \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$	$= 0{\cdot}169413$	$\log \sec \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$	$= 0{\cdot}168616$
$\log \sin \frac{1}{2}\sigma$	$= 8{\cdot}195447$	$\log \sin \frac{1}{2}\sigma$	$= 8{\cdot}196237$
$\log \sec \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$	$= 0{\cdot}000005$	$\log \sec \frac{1}{2}\omega$	$= 0{\cdot}000005$
$\log \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$	$= 9{\cdot}991038_n$	$\log \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$	$= 9{\cdot}991037_n$
$\log \sin \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$	$= 7{\cdot}668226$	$\log \sin \frac{1}{2}\omega$	$= 7{\cdot}668230$
$\log \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$	$= 8{\cdot}186490_n$	$\log \sin \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$	$= 8{\cdot}187279_n$
$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	$= 7{\cdot}535150$	$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	$= 7{\cdot}534477$
$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$	$= +0^\circ\ 16'\ 0{\cdot}843''$	$\frac{1}{2}\omega$	$= +0^\circ\ 16'\ 0{\cdot}853''$
$\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$	$= -0\ 52\ 49{\cdot}073$	$\frac{1}{2}(u_2 - u_1)$	$= -0\ 52\ 54{\cdot}838$
$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	$= +0\ 11\ 47{\cdot}256$	$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	$= +0\ 11\ 46{\cdot}160$
$\lambda_2 - \lambda_1$	$= +0\ 32\ 1{\cdot}686$	ω	$= +0\ 32\ 1{\cdot}706$
$\varphi_2 - \varphi_1$	$= -1\ 45\ 38{\cdot}146$	$u_2 - u_1$	$= -1\ 45\ 49{\cdot}676$
$\alpha_2 - \alpha_1$	$= +0\ 23\ 34{\cdot}512$	$\alpha_2 - \alpha_1$	$= +0\ 23\ 32{\cdot}320$
λ_2	$= 34^\circ\ 29'\ 42{\cdot}75''$		—
φ_2	$= 46\ 30\ 37{\cdot}14$	u_2	$= 46^\circ\ 24'\ 42{\cdot}47$
α_2	$= 168\ 35\ 47{\cdot}11$	α_2	$= 168\ 35\ 44{\cdot}92.$

Endlich wären für das Ellipsoid mit Beibehaltung der genaueren, aus der letzten differentiellen Rechnung erhaltenen Werte

$\log \sigma$	$= 3{\cdot}81171$	$\log \cos (2K + \sigma)$	$= 9{\cdot}0019_n$
$\log L_0$	$= 0{\cdot}00037$	$\log \sin \sigma$	$= 8{\cdot}4973$
$\log L_0 \sigma$	$= 3{\cdot}81208$	$\log L_1$	$= 6{\cdot}9147$
$\log [L_1 \cos (2K + \sigma) \sin \sigma]$	$= 9{\cdot}7283_n$		$4{\cdot}4139_n$
Subtr. log	$= 9{\cdot}99996$	log arc 1″	$= 4{\cdot}6856$
log (Summe)	$= 3{\cdot}81204$		
$\log (\sin \alpha_1 \cos u_1)$	$= 9{\cdot}13459$		
$\log \frac{1}{2}e^2$	$= 7{\cdot}52338$	$\omega =$	$0^\circ\ 32'\ 1{\cdot}706''$
log Korrekt.	$= 0{\cdot}47001$	Korr. =	$-\ 2{\cdot}951''$
		$\lambda_2 - \lambda_1$	$= 0^\circ\ 31'\ 58{\cdot}755''$
		λ_2	$= 34\ 29\ 39{\cdot}81$ von Ferro.

Die Übertragung mit Rücksicht auf die ellipsoidische Gestalt der Erde ergibt daher für die Längendifferenz einen um 3″, in Breite um + 10″ von der rein sphärischen Übertragung verschiedenen Wert.

145. Bestimmung der Distanz und des Azimutes aus den geographischen Positionen zweier Punkte. Aus den geographischen Breiten φ_2 und φ_1 können sofort die reduzierten Breiten u_2 und u_1 berechnet werden. Da σ nicht bekannt ist, so kann der sphärische Winkel ω nicht aus dem sphäroidischen Längenunterschiede bestimmt werden. Es bedarf daher noch einer Transformation. Mit bloßer Berücksichtigung des ersten

Gliedes wird Formel (9) Nr. 143, in welcher überdies zunächst wegen des Faktors $\frac{1}{4}\,e^2$ der Wert $L_0 = 1$ gesetzt werden kann,

$$\Delta\lambda = \omega - \tfrac{1}{2}\,e^2 \sin\alpha_1 \cos u_1 \sin\sigma.$$

Berücksichtigt man, daß im sphärischen Hilfsdreiecke

$$\sin\sigma = \frac{\sin\omega \cos u_2}{\sin\alpha_1}$$

ist, so wird

$$\Delta\lambda = \omega - \tfrac{1}{2}\,e^2 \cos u_2 \cos u_1 \sin\omega,$$

aus welcher Formel sich durch Umkehrung eine erste Näherung für ω

$$\omega = \Delta\lambda + \tfrac{1}{2}\,e^2 \cos u_2 \cos u_1 \sin\Delta\lambda$$

ergibt. Mit diesem Werte kann jetzt das sphärische Hilfsdreieck aufgelöst werden, und zwar erhält man aus den Gaußschen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}\sigma &= \cos\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\tfrac{1}{2}\omega\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}\sigma &= \sin\tfrac{1}{2}(u_2 + u_1)\sin\tfrac{1}{2}\omega\\
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}\sigma &= \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\tfrac{1}{2}\omega\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}\sigma &= \cos\tfrac{1}{2}(u_2 + u_1)\sin\tfrac{1}{2}\omega.
\end{aligned}$$

Nachdem hieraus σ und die Azimute berechnet sind, erhält man hiermit k und K sowie auch σ aus den Formeln (3), (4) Nr. 143 und dann die Koeffizienten der Reihen für λ und σ. Der Wert von σ aus dem Hilfsdreiecke muß mit dem aus der Auflösung der Formeln (3), (4) S. 353 erhaltenen übereinstimmen; außerdem kann man nun einen verbesserten Wert von ω aus der Reihenentwicklung erhalten und wenn nötig, die Rechnung für die Bestimmung von α_2, α_1 und σ wiederholen.

Beispiel: Es sind die Entfernung und die Azimute der Verbindungslinie der beiden Punkte

Wien, Universitätssternwarte $\varphi_1 = 48^\circ\ 13'\ 55{\cdot}4''$

Greenwich $\varphi_2 = 51^\circ\ 28'\ 38{\cdot}1''$

$$\Delta\lambda = -16^\circ\ 20'\ 22{\cdot}3''$$

zu berechnen.

Man erhält zunächst:

$u_1 = 48^\circ\ 8'\ 12{\cdot}2''$; $\quad u_2 = 51^\circ\ 23'\ 1{\cdot}4''$

$\log\tfrac{1}{2}\,e^2 = 7{\cdot}52338$

$\log\cos u_1 = 9{\cdot}82436$

$\log\cos u_2 = 9{\cdot}79526$

$\log\sin\Delta\lambda = 9{\cdot}44921_n$

$6{\cdot}59221_n \qquad \Delta\lambda = -16^\circ\ 20'\ 22{\cdot}3''$

$\log \text{arc}\ 1'' = 4{\cdot}68557$

$\log \text{Korr.} = 1{\cdot}90664_n \qquad \text{Korr.} = \quad -80{\cdot}66$

$\omega = -16^\circ\ 21'\ 42{\cdot}96''$

Hiermit wird die Rechnung

	Auf der Kugel*	Auf dem Ellipsoide I. Rechnung	II. Rechnung**
$u_2 + u_1 =$	99° 42′ 33·5″	99° 31′ 13·6″	
$u_2 - u_1 =$	+ 3 14 42·7	+ 3 14 49·2	
$\frac{1}{2}(u_2 + u_1) =$	49 51 16·75	49 45 36·80	
$\frac{1}{2}(u_2 - u_1) =$	+ 1 37 21·35	+ 1 37 24·60	
$\frac{1}{2}\omega =$	— 8 10 11·15	— 8 10 51·48	51·81″
$\log \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1) =$	9·9998258	9·9998256	8256
$\log \cos \frac{1}{2}\omega =$	9·9955700	9·9955578	5577
$\log \sin \frac{1}{2}(u_2 - u_1) =$	8·4520300	8·4522716	2716
$\log \sin \frac{1}{2}(u_2 + u_1) =$	9·8833271	9·8827224	7224
$\log \sin \frac{1}{2}\omega =$	$9{\cdot}1526143_n$	$9{\cdot}1532053_n$	2101_n
$\log \cos \frac{1}{2}(u_2 + u_1) =$	9·8093771	9·8102243	2243
$\log [\cos \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \frac{1}{2}\sigma] =$	9·9953958	9·9953834	3833
	9·9973984	9·9973984	3984
$\log [\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \frac{1}{2}\sigma] =$	$9{\cdot}0359414_n$	$9{\cdot}0359277_n$	9325_n
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) =$	$9{\cdot}0405456_n$	$9{\cdot}0405443_n$	5492_n
$\log [\cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) \sin \frac{1}{2}\sigma] =$	8·4476000	8·4478294	8293
	9·9805733	9·9806764	6769
$\log [\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) \sin \frac{1}{2}\sigma] =$	$8{\cdot}9619914_n$	$8{\cdot}9634296_n$	4344_n
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) =$	$0{\cdot}5143914_n$	$0{\cdot}5156002_n$	6051_n
$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) =$	— 6° 15′ 54·590″	— 6° 15′ 54·523″	54·776″
$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) =$	287 0 35·804	286 57 55·391	54·742
$\log \cos \frac{1}{2}\sigma =$	9·9979974	9·9979850	9849
$\log \sin \frac{1}{2}\sigma =$	8·9814181	8·9827532	7575
$\frac{1}{2}\sigma =$	5° 29′ 52·916″	5° 30′ 54·052″	54·250″
$\alpha_1 =$	293 16 30·394	293 13 49·914	49·518
$\alpha_2 =$	280 44 41·214	280 41 60·868	59·966
$\sigma =$	10 59 45·832	11 1 48·104	48·500

Für die Kugel wäre nun weiter:

$\delta(\sigma) = 10° 59′ 45·832″$

$\log \delta'' = 4·5975398$

$\log \text{arc } 1'' = 4·6855749$

$\log R = 6·8048861$ (für die mittlere Breite 49° 51′)

$\log \Delta = 6·0880008$ $\quad \Delta = 1224618\ m = 1224·618\ km.$

---

* In der Rechnung auf der Kugel ist statt u_1, u_2, ω überall φ_1, φ_2, $\Delta\lambda$ zu setzen.

** Von der zweiten Rechnung, mit dem Endwerte des ω aus der ersten Rechnung, sind nur die letzten Stellen angesetzt.

Für die Rechnung auf dem Ellipsoide hingegen hat man:

$\log \cos \alpha_1$	$= 9{\cdot}5959718$	9698
$\log \cos u_1$	$= 9{\cdot}8243571$	3571
$\log \sin \alpha_1$	$= 9{\cdot}9632802_n$	2805_n
$\log \cos \alpha_2$	$= 9{\cdot}2687435$	7334
$\log \cos u_2$	$= 9{\cdot}7952553$	2553
$\log \sin \alpha_2$	$= 9{\cdot}9923821_n$	3824_n
$\log \cos k \sin K$	$= 9{\cdot}8720044$	0044
	$9{\cdot}9744382$	4384
$\log \cos k \cos K$	$= 9{\cdot}4203289$	3269
$\log \sin k$	$= 9{\cdot}7876373_n$	6376_n *[1])
$\log \operatorname{tang} K$	$= 0{\cdot}4516755$	6775
K	$= 70^\circ\ 32'\ 3{\cdot}085''$	$32'\ 3{\cdot}383''$
$\log \cos k$	$= 9{\cdot}8975662$	5660 *[2])
$\log \cos k \sin (K+\sigma)$	$= 9{\cdot}8928419$	8419
	$9{\cdot}9952758$	2760
$\log \cos k \cos (K+\sigma)$	$= 9{\cdot}0639988$	9887
$\log \sin k$	$= 9{\cdot}7876374_n$	6377_n *[3])
$\log \operatorname{tang} (K+\sigma)$	$= 0{\cdot}8288431$	8532
$K+\sigma$	$= 81^\circ\ 33'\ 51{\cdot}178''$	$33'\ 51{\cdot}874''$
σ	$= 11^\circ\ 1'\ 48{\cdot}093''$	$48{\cdot}491''$ **
$\log \cos k$	$= 9{\cdot}8975661$	5659 *[4])
$\log \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$	$= 8{\cdot}9136594$	
$\log \operatorname{tang} L$	$= 8{\cdot}811226$	
L	$= 3^\circ\ 42'\ 16{\cdot}61''$	
$\frac{1}{2} L$	$= 1\ \ 51\ \ 8{\cdot}30$	
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} L$	$= 8{\cdot}509742$	
$\log \nu$	$= 7{\cdot}01948$	
ν	$= 0{\cdot}001046$	

$S_0 = 1{\cdot}0000003$
$S_1 = \nu$
$L_0 = 1{\cdot}0011509$
$L_1 = \frac{1}{2} \nu.$

$\log S_0$	$= 0{\cdot}0000001$	0001
$\log \sigma$	$= 4{\cdot}5988789$	8834
$\log L_0$	$= 0{\cdot}0004995$	4995
$\log S_0 \sigma$	$= 4{\cdot}5988790$	8835
$\log \text{arc } 1''$	$= 4{\cdot}6855749$	5749
$\log L_0 \sigma$	$= 4{\cdot}5993784$	3829

$(2K+\sigma)$	$= 152^\circ\ 5'\ 54''$
$\log S_1$	$= 7{\cdot}01948$
$\log \cos (2K+\sigma)$	$= 9{\cdot}94633_n$
$\log \sin \sigma$	$= 9{\cdot}28177$
$\log L_1$	$= 6{\cdot}71845$

* Die beiden Werte 1 und 3 von sin k und diejenigen 2 und 4 von cos k müssen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der logarithmischen Rechnung übereinstimmen.

** Dieser Wert muß mit dem aus der Auflösung des Hilfsdreieckes erhaltenen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der logarithmischen Rechnung übereinstimmen.

$\log S_0\,\sigma$	= 9·2844539	4584	$\log L_0\,\sigma$	= 9·28495
$\log Gl_2$	= 6·24758	58		5·9466$_n$
Add. log.	= 0·0003987	3987	Add. log.	= 9·99980
log (Summe)	= 9·2848526	8571	log (Summe)	= 9·28475
$\log a\sqrt{1-e^2}$	= 6·8031893	1893	$\log \sin \alpha_1$	= 9·99238
	6·0880419	0464	$\log \cos u_1$	= 9·79526
$\log (1-\nu)$	= 9·9995460	5460	$\log \frac{1}{2} e^2$	= 7·52338
$\log s$	= 6·0884959	5004		6·59577$_n$
s	= 1226015	028 *m*	log arc 1″	= 4·68557
		= 1226·028 *km*	log Korr.	= 1·91020$_n$
A_1	= 180° + α_1 = 113° 13′ 49·52″		Korr.	= −81·32″
A_2	= α_2 = 280° 41′ 59·97″		$\Delta\lambda$	= −16°20′22·3″
			ω	= −16°21′43·62″

Der aus der genaueren Rechnung folgende Wert von ω ist um 0·7″ gegen den Ausgangswert verschieden; die hieraus resultierende Änderung in s beträgt jedoch nur 13 *m*. Hingegen beträgt der Unterschied in σ gegen die Annahme der kugelförmigen Erde 1·4 *km*; in den Azimuten 2′ 40″.

146. Der Vertikalschnitt. Die bisher gegebene Lösung erfordert aber noch eine Untersuchung infolge des Umstandes, daß die gemessenen Winkel tatsächlich nicht die Winkel in den geodätischen Dreicken sind.* Das Instrument wird ja so aufgestellt, daß seine Umdrehungsachsen vertikal beziehungsweise horizontal sind; die von dem Fernrohr dabei beschriebenen Ebenen sind Vertikalebenen. Die Lotlinien (Ellipsoid-Normalen) zweier Punkte P_1P_2 (Fig. 276) können sich aber nur dann schneiden, wenn beide Punkte im selben Meridian oder im selben Parallelkreis liegen. In allen anderen Fällen kreuzen sie sich; daher fällt auch die Vertikalebene im Punkte P_1, welche durch den Punkt P_2 geht, und diejenige im Punkte P_2, die durch den Punkt P_1 geht, nicht zusammen.

Ist Π (Fig. 276) der Pol, ΠO die Rotationsachse, so werden die Normalen P_1N_1, P_2N_2, da sie die Rotationsachse in zwei verschiedenen Punkten N_1, N_2 treffen, sich kreuzen. Die Vertikalebene im Punkte P_1, die als Vertikalebene durch die Lotlinie P_1Z_1 geht und durch P_2 gelegt ist, ist P_1xP_2, während die Vertikalebene im Punkte P_2, durch P_2Z_2 und durch P_1 gelegt, von ihr verschieden, die Ebene P_2yP_1 ist. Das Ellipsoid wird von diesen beiden Ebenen in den beiden Vertikalschnitten P_1x gegen P_2 und P_2y gegen P_1 geschnitten. Die gemessenen Azimute sind $180° + \Pi P_1x$ beziehungsweise $180° - \Pi P_2y$; dieselben gehören nicht einem und demselben Dreiecke an;

* Vgl. hierzu Bessel, „Astron. Nachrichten", Bd. XIV. (1837) und Abhandlungen, Bd. III., S. 34. — Hansen, „Geodätische Untersuchungen". Abhandl. d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Bd. VIII. (1865). — Jacobi, „Crelles Journal", Bd. LIII und „Astron. Nachrichten", Bd. XLI. — Helmert, „Astron. Nachrichten", Bd. XCIV (1879). — Christoffel, „Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke", Abhandl. d. königl. preuß. Akad. d. Wissensch., 1868. Über die Krümmung der Normalschnitte und der Flächen s. Gauß: Disquisitiones generales circa superficies curvas (1828).

allein es läßt sich zeigen, daß die Differenz dieser Azimute rein sphärisch berechnet werden darf, weil der entstehende Fehler von der zweiten Ordnung der Erdabplattung ist.* Da die beiden Vertikalschnitte nicht zusammenfallen,

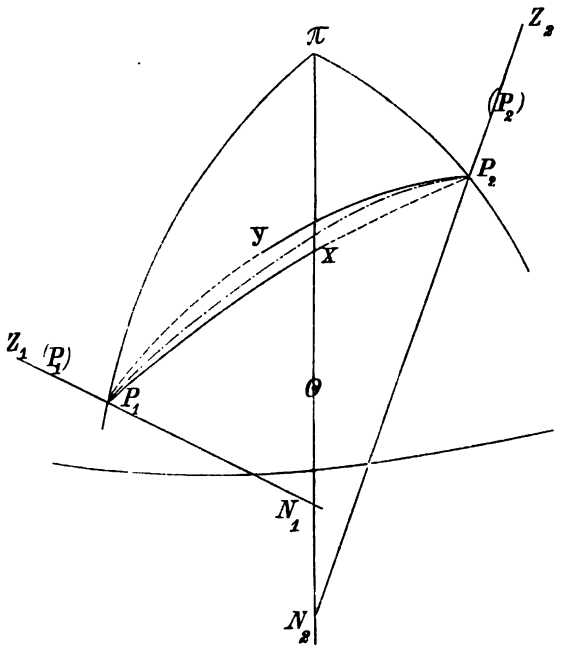


Fig. 276.

* Hiernach kann man auch den Längenunterschied durch rein sphärische Rechnung ermitteln, wie dies schon Dalby (Phil. transact. 1790 und 1795) bemerkte; allein der obige Satz gilt nur für die Azimutdifferenzen, während die Azimute selbst doch um Größen von der Ordnung der Abplattung von den sphärischen verschieden sind.

Um die Gleichung des Vertikalschnittes aufzustellen, sei NOA (Fig. 277) diejenige Meridianellipse, in welcher der Punkt P_1 liegt, in die Zeichnungsfläche gedreht. Legt man durch P_1 ein Koordinatensystem so, daß die $\xi\eta$-Ebene mit der Tangentialebene zusammenfällt, die positive ξ-Achse in der Richtung des südlichen Meridians und die positive ζ-Achse in das Innere des Ellipsoides, so hätte man für die Transformation auf die neuen Koordinaten die ursprünglichen x, y, z durch die neuen ξ, η, ζ auszudrücken und erhielte dann die Gleichung des Normalschnittes. (Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I. Bd., S. 137.) Man erhält aber umgekehrt, ohne Kenntnis dieser Gleichung das Azimut α_1 des Normalschnittes im Punkte P_1 durch

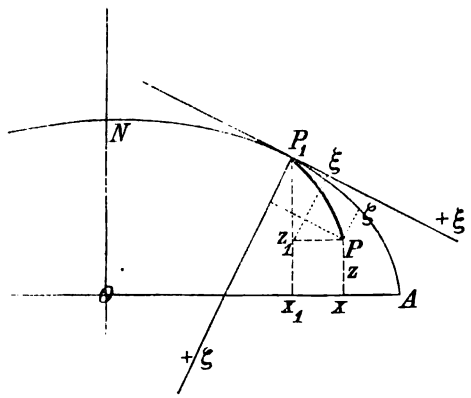


Fig. 277.

$$\cot \alpha_1 = \frac{\xi}{\eta}$$

so werden dieselben an den beiden Punkten stets einen gewissen Winkel yP_1x, yP_2x einschließen; derselbe ist aber für mäßige Entfernungen stets klein (nur für Entfernungen nahe 180°, d. h. für nahe diametral gegenüberliegende Punkte kann er groß werden) und steigt bei Seitenlängen bis zu

---

und es ist

$$\xi = +(x - x_1)\sin\varphi_1 - (z - z_1)\cos\varphi_1$$
$$\eta = +y$$
$$\zeta = -(z - z_1)\sin\varphi_1 - (x - x_1)\cos\varphi_1.$$

Mittels der reduzierten Breiten ausgedrückt wird

$$x_1 = a\cos u_1 \qquad x = a\cos u\cos\lambda$$
$$y_1 = 0 \qquad y = a\cos u\sin\lambda$$
$$z_1 = a\sqrt{1-e^2}\sin u_1 \qquad z = a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

demnach

$$\cot\alpha_1 = \frac{(\cos u\cos\lambda - \cos u_1)\sin\varphi_1 - \sqrt{1-e^2}(\sin u - \sin u_1)\cos\varphi_1}{\cos u\sin\lambda}$$

$$= \frac{(\cos u\cos\lambda - \cos u_1)\sin u_1 - (1-e^2)(\sin u - \sin u_1)\cos u_1}{\cos u\sin\lambda\sqrt{1-e^2\cos {u_1}^2}}$$

$$= \frac{\cos u\sin u_1(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2) - \sin u\cos u_1 + 2e^2\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)\cos u_1}{\cos u\sin\lambda\sqrt{1-e^2\cos {u_1}^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos {u_1}^2}}\left[\frac{\sin(u_1-u)}{\cos u\sin\lambda} - \sin u_1\tan\tfrac{1}{2}\lambda\right] -$$
$$- \frac{2e^2}{\sqrt{1-e^2\cos {u_1}^2}}\cdot\frac{\cos u_1}{\cos u\sin\lambda}\cdot\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u)\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u)$$

oder durch die geographischen Breiten:

$$x_1 = \frac{a\cos\varphi_1}{\sqrt{1-e^2\sin {\varphi_1}^2}} \qquad x = \frac{a\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$$

$$y_1 = 0 \qquad y = \frac{a\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}},$$

$$z_1 = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi_1}{\sqrt{1-e^2\sin {\varphi_1}^2}} \qquad z = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$$

daher wenn

$$W_1 = \sqrt{1-e^2\sin {\varphi_1}^2} \qquad W = \sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}$$

gesetzt wird

$$\cot\alpha_1 = \frac{(\cos\varphi\cos\lambda - \frac{W}{W_1}\cos\varphi_1)\sin\varphi_1 - (1-e^2)\cos\varphi_1(\sin\varphi - \frac{W}{W_1}\sin\varphi_1)}{\cos\varphi\sin\lambda}$$

$$\cot\alpha_1 = \frac{\cos\varphi\sin\varphi_1\cos\lambda - \cos\varphi_1\sin\varphi}{\cos\varphi\sin\lambda} + \frac{e^2\cos\varphi_1}{\cos\varphi\sin\lambda}(\sin\varphi - \frac{W}{W_1}\sin\varphi_1)$$

und ebenso erhält man für das Azimut des Punktes P_1 im Punkte P:

$$\cot\alpha = -\frac{\cos\varphi_1\sin\varphi\cos\lambda - \cos\varphi\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1\sin\lambda} - \frac{e^2\cos\varphi}{\cos\varphi_1\sin\lambda}(\sin\varphi_1 - \frac{W_1}{W}\sin\varphi).$$

Diese Formeln zeigen, daß wenn man zwei Winkel $\alpha_1^{(o)}$, $\alpha^{(o)}$ nach den Formeln

$$\cot\alpha_1^{(o)} = \frac{\cos\varphi\sin\varphi_1\cos\lambda - \cos\varphi_1\sin\varphi}{\cos\varphi\sin\lambda}$$

$$\cot\alpha^{(o)} = -\frac{\cos\varphi_1\sin\varphi\cos\lambda - \cos\varphi\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1\sin\lambda}$$

100 *km* höchstens auf 0·083″. Demgemäß wird auch der Maximalabstand der beiden geodätischen Linien nicht groß. Er wird für Seitenlängen von 100 *km* etwa 1 *cm*.

Die zwischen P_1 und P_2 verlaufende geodätische Linie muß ihrer ganzen Länge nach zwischen den beiden Normalschnitten liegen. Da nämlich je

---

rechnet, die Winkel α_1, α von diesen nur um Größen von der Ordnung von e^2 verschieden sind. Man sieht aber, daß die Winkel $\alpha_1^{(o)}$, $\alpha^{(o)}$ einem sphärischen Dreiecke angehören, in welchem die beiden Seiten $90°-\varphi$, $90°-\varphi_1$ den Winkel λ einschließen und in welchem $180°-\alpha_1^{(o)}$ und $\alpha^{(o)}$ die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel sind (Fig. 278). Ist σ die dem Winkel λ gegenüberliegende Seite, so wird noch

$$\frac{\sin\alpha^{(o)}}{\cos\varphi_1} = \frac{\sin\alpha_1^{(o)}}{\cos\varphi} = \frac{\sin\lambda}{\sin\sigma} \qquad (m).$$

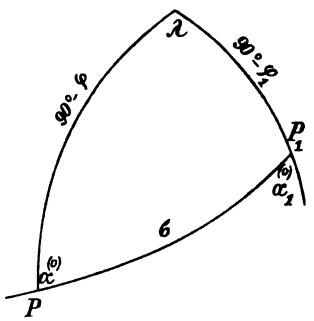


Fig. 278.

Die Ausdrücke für $\cot\alpha_1$ und $\cot\alpha$ lassen sich noch vereinfachen; es wird:

$$\cot\alpha_1 = \frac{1}{\cos\varphi\sin\lambda}\left\{\sin(\varphi_1-\varphi) - 2\cos\varphi\sin\varphi_1\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2 + e^2\cos\varphi_1\left(\sin\varphi - \frac{W}{W_1}\sin\varphi_1\right)\right\}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\cos\varphi_1\sin\lambda}\left\{\sin(\varphi_1-\varphi) + 2\cos\varphi_1\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2 + e^2\cos\varphi\left(\sin\varphi - \frac{W}{W_1}\sin\varphi_1\right)\frac{W_1}{W}\right\}$$

und

$$\cot\alpha_1^{(o)} = \frac{1}{\cos\varphi\sin\lambda}\left\{\sin(\varphi_1-\varphi) - 2\cos\varphi\sin\varphi_1\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2\right\} = \frac{\sin(\varphi_1-\varphi)}{\cos\varphi\sin\lambda} - \sin\varphi_1\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda$$

$$\cot\alpha^{(o)} = \frac{1}{\cos\varphi_1\sin\lambda}\left\{\sin(\varphi_1-\varphi) + 2\cos\varphi_1\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2\right\} = \frac{\sin(\varphi_1-\varphi)}{\cos\varphi_1\sin\lambda} + \sin\varphi\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda.$$

Setzt man daher

$$\frac{e^2\cos\varphi_1}{\cos\varphi\sin\lambda}\left[\sin\varphi - \frac{W}{W_1}\sin\varphi_1\right] = \operatorname{tang}\varepsilon_1$$

$$\frac{e^2\cos\varphi}{\cos\varphi_1\sin\lambda}\left[\sin\varphi - \frac{W}{W_1}\sin\varphi_1\right]\frac{W_1}{W} = \operatorname{tang}\varepsilon,$$

so wird

$$\cot\alpha_1 = \cot\alpha_1^{(o)} + \operatorname{tang}\varepsilon_1 = \frac{\cos(\alpha_1^{(o)}-\varepsilon_1)}{\sin\alpha_1^{(o)}\cos\varepsilon_1}$$

und ebenso $\cot\alpha$, daher

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1^{(o)}\cos\varepsilon_1}{\cos(\alpha_1^{(o)}-\varepsilon_1)}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha^{(o)}\cos\varepsilon}{\cos(\alpha^{(o)}-\varepsilon)}.$$

Besser wird es die Differenzen $\alpha_1-\alpha_1^{(o)}$, $\alpha-\alpha^{(o)}$ zu ermitteln. Setzt man hierzu

$$p = \frac{1}{\sin\lambda}\left(\frac{\sin\varphi}{W} - \frac{\sin\varphi_1}{W_1}\right)$$

während die Koeffizienten der höheren Potenzen von e nur angedeutet werden, so wird

$$\cot\alpha_1 - \cot\alpha_1^{(o)} = \frac{\sin(\alpha_1^{(o)}-\alpha_1)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_1^{(o)}} = p\,e^2\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}W$$

$$\cot\alpha - \cot\alpha^{(o)} = \frac{\sin(\alpha^{(o)}-\alpha)}{\sin\alpha\sin\alpha^{(o)}} = p\,e^2\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}W_1,$$

zwei aufeinanderfolgende Normalen der geodätischen Linie sich schneiden müssen, so werden die aufeinanderfolgenden Normalen durch stetigen Übergang aus der Lage $P_1 N_1$ in die Lage $P_2 N_2$ erhalten. Es wird daher für die Berechnung der Dreiecke die kürzeste Linie auf dem Ellipsoid sowohl ihrer Länge als ihrer Richtung nach allen Beobachtungen zugrunde gelegt werden können.

Zwischen der geodätischen Linie, die durch zwei Punkte $P_1 P_2$ geht, und dem Vertikalschnitt vom Punkte P_1 nach P_2 besteht natürlich ebenfalls ein Richtungsunterschied, der jedenfalls kleiner ist, als der Unterschied

---

daher

$$\alpha_1 - \alpha_1^{(o)} = -p\, e^2 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi} W . \sin\alpha_1 \sin\alpha_1^{(o)} + q\, e^6$$

$$\alpha - \alpha^{(o)} = -p\, e^2 \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} W_1 . \sin\alpha \sin\alpha^{(o)} + q'\, e^6.$$

Da diese Differenzen nur von der zweiten Ordnung von e sind, so kann man annehmen

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_1^{(o)} + p_1' e^2 \qquad \sin\alpha = \sin\alpha^{(o)} + p' e^2$$
$$W = 1 + \omega' e^2 \qquad W_1 = 1 + \omega_1' e^2,$$

folglich

$$\alpha_1 - \alpha_1^{(o)} = -p\, e^2 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi} \sin\alpha_1^{(o)\,2} + p''\, e^4$$

$$\alpha - \alpha^{(o)} = -p\, e^2 \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} \sin\alpha^{(o)2} + p'''\, e^4.$$

Eliminiert man hier rechts $\alpha_1^{(o)}$, $\alpha^{(o)}$ mittels der Gleichungen (m), so erhält man

$$\alpha_1 - \alpha_1^{(o)} = -p\, e^2 \frac{\sin\lambda^2 \cos\varphi \cos\varphi_1}{\sin\sigma^2} + p''\, e^4$$

$$\alpha - \alpha^{(o)} = -p\, e^2 \frac{\sin\lambda^2 \cos\varphi \cos\varphi_1}{\sin\sigma^2} + p'''\, e^4,$$

folglich

$$\alpha_1 - \alpha = \alpha_1^{(o)} - \alpha^{(o)} + N e^4.$$

Diese Beziehung findet nicht statt, wenn man die reduzierten Breiten benutzt. Allerdings wird auch hier

$$\cot\alpha_1^{(o)} = \frac{\cos u \sin u_1 \cos\lambda - \sin u \cos u_1}{\cos u \sin\lambda}$$

gesetzt werden können und ebenso für den zweiten Winkel, so daß die fünf Stücke $90° - u$, $90° - u_1$, λ_1, $\alpha_1^{(o)}$, $\alpha^{(o)}$ ebenfalls einem sphärischen Dreiecke angehören, wobei jedoch diese $\alpha_1^{(o)}$, $\alpha^{(o)}$ von den früheren verschieden sind; allein es wird weiter

$$\cot\alpha_1 = \frac{\cot\alpha_1^{(o)}}{\sqrt{1 - e^2 \cos u_1^2}} + \frac{e^2 (\sin u - \sin u_1) \cos u_1}{\sqrt{1 - e^2 \cos u_1^2}}$$

und man sieht leicht durch die weitere Entwicklung, daß hierbei

$$\alpha_1 - \alpha = \alpha_1^{(o)} - \alpha^{(o)} + N' e^2$$

wird. Der Bogen σ hängt aber nicht in so einfacher Weise, wie bei der geodätischen Linie mit der Länge des Vertikalschnittes zusammen, sondern mit der zwischen P und P_1 gelegten, im Innern des Erdkörpers verlaufenden Sehne (vgl. Helmert, l. c., Bd. I, S. 143, ferner die englische Vermessung: Ordnance Survey, Principal Triangulation, S. 235 und Andrae, Dänische Gradmessung, Bd. III, S. 324). Die Längen der beiden Vertikalschnitte lassen sich jedoch aus dieser Sehne berechnen, wobei sich die bemerkenswerte Tatsache ergibt, daß die Längen der beiden Vertikalschnitte bis auf Glieder siebenter Ordnung der Abplattung einander gleich sind (s. Helmert, l. c., Bd. I, S. 181).

zwischen den Richtungen der beiden Vertikalschnitte.* Für die 530 *km* lange Entfernung zwischen Berlin und Königsberg ergibt sich der Unterschied der beiden Richtungen in Berlin 0·216″, in Königsberg 0·243″. Bei einer Distanz unter 100 *km* wird dieser Unterschied 0·010″ nicht erreichen, kann daher vernachlässigt werden und auch die Länge der geodätischen Linie wird von derjenigen der Vertikalschnitte nicht verschieden. Für die Entfernung Berlin—Königsberg ist die Differenz der Längen nur 0·0002 *mm*,** so daß man praktisch die geodätische Linie und die Vertikalschnitte als zusammenfallend ansehen kann, d. h. daß man die Beobachtungen der Winkel, die sich stets auf Vertikalschnitte beziehen, als Beobachtungen von kürzesten oder geodätischen Linien zu betrachten hat. Dadurch wird bei der Berechnung der Dreiecke aus Vertikalschnitten, welche ja stets Doppelseiten enthalten würden, diese Schwierigkeit umgangen.

Allein der Umstand, daß man die Horizontalwinkel als Winkel zwischen Vertikalschnitten beobachtet, zieht noch eine andere, etwas erheblichere Schwierigkeit nach sich.

Beobachtet man auf einem erhöhten Instrumentenstande, in (P_1) statt in P_1, wobei man sich in der Lotlinie $P_1 N_1$ erhebt, weil Instrumentenstand und Dreieckspunkt vertikal übereinander abgesenkelt werden, so bleibt man im selben Vertikalschnitt und die Horizontalwinkel werden sich nicht ändern, weil für jede Richtung das Azimut $\Pi P_1 x$ dasselbe ist, bestimmt durch die Ebene, welche durch die Normale $Z_1 P_1 N_1$ und den Punkt P_2 geht. Anders jedoch verhält es sich, wenn der anvisierte Punkt höher liegt. Denn jeder Punkt der Normale $(P_2) P_2 N_2$ tritt aus der Ebene $P_1 P_2 N_1$ heraus, und zwar um so mehr, je mehr er von P_2 entfernt, d. h. je höher der Punkt (P_2) liegt. Der numerische Betrag des Unterschiedes folgt aus***

$$\alpha_1^{(h)} = \alpha_1 - \tfrac{1}{2} \frac{e^2 h}{a \text{ arc } 1''} (\cos \varphi_1{}^2 \sin 2\alpha_1 + \tfrac{1}{2} \frac{s}{a} \sin 2\varphi_1 \sin \alpha_1)$$

wenn $\alpha_1^{(h)}$ das Azimut des Vertikalschnittes durch den Punkt (P_2), α_1 das Azimut des Vertikalschnittes durch die Projektion P_2 selbst, h die Höhe $(P_2) P_2$ und s die Entfernung $P_1 P_2$ ist.

Im Maximum wird der Unterschied $\alpha_1^{(h)} - \alpha_1$ für eine Höhe von 1920 *m* gleich 0·21″, also eine, selbst bei kleinen Entfernungen nicht zu vernachlässigende Größe; doch kann die Reduktion nach der angegebenen Formel gerechnet und daher das Azimut des Vertikalschnittes (also auch der geodätischen Linie) für den Fußpunkt des anvisierten, hochstehenden Signales um diesen Betrag korrigiert werden.

147. Lotabweichungen. Geoid. Bestimmt man an zwei Punkten A und B eines Dreiecksnetzes die geographischen Koordinaten: Länge, Breite und Azimut, λ_1, φ_1, A_1 und λ_2, φ_2, A_2 und berechnet dann, von den geographischen Koordinaten des einen Punktes A ausgehend, durch geodätische Übertragung die Koordinaten des zweiten Punktes B, so wird man Werte λ_2',

* Über die analytischen Entwicklungen hierzu vgl. Helmert, l. c., Bd. I, S. 329 ff.
** Ibid., Bd. I, S. 341.
*** Helmert, l. c., Bd. I., S. 190.

φ_2', A_2' erhalten, die von den astronomisch bestimmten um nicht unerhebliche Beträge abweichen können. Die Unterschiede $\lambda_2' - \lambda_2$, $\varphi_2' - \varphi_2$, $A_2' - A_2$ sind aber keineswegs eine Folge von Beobachtungsfehlern, sondern darin gelegen, daß die Form der Erdoberfläche an der betrachteten Stelle von dem der Rechnung zugrunde gelegten Ellipsoide etwas abweicht. Beispielsweise mögen die beiden Punkte in demselben Meridian liegen. Aus den astronomisch bestimmten Polhöhen φ_2 und φ_1 erhält man einen zwischen den Normalen gelegenen Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$; ist die Länge dieses Bogens (direkt gemessen oder durch eine Triangulation bestimmt) gleich l, so würde sich die Entfernung des Schnittpunktes der beiden Normalen (der Krümmungshalbmesser in diesem Punkte)

$$\varrho_0 = \frac{l}{\text{arc}\,(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

ergeben. Die Übertragung der geographischen Koordinaten wurde aber mit einem Krümmungshalbmesser ϱ vorgenommen, welcher dem aus Gradmessungen gefundenen Erdellipsoide entspricht. Ergibt sich ϱ_0 größer, so würde dieses zeigen, daß die Erde in dieser Gegend flacher ist, als es dem Ellipsoid entspricht, ergibt sich ϱ_0 kleiner, so würde dieses heißen, daß die Krümmung eine stärkere ist. Die wirkliche Lotlinie in einem der Punkte oder auch die Lotlinien der beiden Punkte fallen daher nicht mit den Normalen des Ellipsoides zusammen. Diesen Unterschied der wirklichen Lotrichtungen gegenüber den Normalen des Ellipsoides nennt man die Lotabweichung.

Die Größe derselben ist mitunter ganz beträchtlich. So ergab sich zwischen Mailand und Turin eine Lotabweichung in Länge gleich 35″, zwischen Mailand und dem Simplon eine Lotabweichung in Breite von 29″. Noch bedeutendere Lotabweichungen wurden im Kaukasus und neuerdings auf den Sandwichinseln gefunden. Zwischen den Stationen Duschet am Südabhange und Wladikawkas am Nordabhange des Kaukasus wurde eine solche Abweichung von 54″ schon 1862 gefunden. Diese Abweichungen, entsprechend einer starken Konvergenz der beiden Lotrichtungen, lassen sich durch die Attraktion der zwischenliegenden Bergmassen erklären. Eine sehr große Störung zeigt sich auf dem wenig gebirgigen Terrain in der Krim, und zwar 65″ in Breite und 25″ in Länge. Die erwähnten sehr bedeutenden Abweichungen auf den Sandwichinseln betragen auf Hawaii 98″, auf der Insel Maoi 59″ und auf Oahu 52″.*

Bei allen Berechnungen erfordern die Lotabweichungen eine eingehende Berücksichtigung. Würde man die astronomisch bestimmten Positionen der Landestriangulation zugrunde legen, d. h. alle jene Punkte, auf denen astronomische Beobachtungen gemacht wurden, als Fixpunkte in die Detailblätter eintragen, so würde man geänderte Entfernungen zwischen den Fixpunkten erhalten. Wird die Differenz der geographischen Breiten infolge der Lotabweichungen kleiner, so rücken die Punkte näher, als es der Triangulation entspricht; bei einer Lotabweichung von 33″ in Breite würden die Punkte um nahe 1 *km* näher rücken.

Diesem Übelstande könnte dadurch abgeholfen werden, daß man sowohl

* Vgl. des Verfassers Referat in der Festschrift zur Feier des zweihundertjährigen Bestandes des k. k. Staatsgymnasiums im VIII. Bezirke Wiens. Wien 1901.

die geodätisch bestimmten Entfernungen als auch die astronomisch bestimmten Koordinaten als richtig beibehält; dann kann man aber als Oberfläche der Erde in diesem Punkte nicht das aus allen Gradmessungen abgeleitete Ellipsoid ansehen, sondern eine ganz bestimmte Fläche, die sich den Messungen in dieser Gegend am besten anschmiegt. Als solche Fläche kann ein „Referenzellipsoid" gewählt werden, d. h. ein anderes Ellipsoid, für welches man voraussetzen kann, daß seine Rotationsachse mit der Erdachse parallel ist, aber nicht mit ihr zusammenfällt und dessen Dimensionen aus den lokalen Beobachtungen abzuleiten sind. Jedes ausgedehntere Vermessungsgebiet hätte dann ein eigenes Referenzellipsoid, welches von dem Fundamentalellipsoide wesentlich abweichen kann.

Von diesem Standpunkte ist man sehr bald abgekommen. Selbst auf nicht allzu ausgedehnten Gebieten finden Lotabweichungen in ziemlich unregelmäßiger Folge (nur von lokalem Charakter) und in wechselnden Beträgen statt. Ein Referenzellipsoid,* das sich z. B. den Messungen auf dem europäischen Kontinente anschließt, wird noch Lotabweichungen an den meisten Orten ergeben: die wirklichen Lotrichtungen in den einzelnen Punkten weichen nicht nur von den Normalen des aus allen Gradmessungen berechneten Erdellipsoides ab, sondern auch von den Normalen des Referenzellipsoides.

Die Lotrichtung steht in jedem Punkte senkrecht zur Richtung des ruhenden Wasserspiegels; sie gibt nämlich die Richtung der Resultierenden aller auf ein Teilchen der Oberfläche wirkenden Kräfte; der ruhende Wasserspiegel muß sich senkrecht zu derselben stellen. Denkt man sich in jedem Punkte durch astronomische Beobachtungen den Ort des Zenites am Himmel bestimmt, sodann eine Fläche gezogen, welche in jedem Punkte senkrecht zur Richtung dieser astronomisch bestimmten Lotrichtung steht, so wird dieselbe eine unregelmäßige Fläche sein, die von dem Fundamentalellipsoid überall mehr oder weniger abweichen wird. Diese Fläche wurde von Listing** das Geoid genannt. Dasselbe fällt keineswegs mit der physischen Erdoberfläche zusammen, denn die Lotrichtungen, wenn sie auch von denjenigen Richtungen abweichen, welche durch die Normalen des Ellipsoides gegeben sind, werden doch weitaus nicht den Unregelmäßigkeiten der Erdoberfläche folgen, wie schon daraus ersichtlich ist, daß die Lotrichtung durch die Anziehung eines Berges geändert wird, aber nie so stark, daß sich das Lot normal zur Berglehne stellt. Während Talweitungen zwischen Bergen eine negative Krümmung haben (ihre Konkavität nach außen kehren), findet dieses nie für das Geoid statt.***

Dennoch ist das Geoid eine sehr unregelmäßig gestaltete Fläche, für

---

* Auch für ein oskulierendes Ellipsoid, das sich den Beobachtungen noch genauer anschließt, indem die Bedingung des Parallelismus der Achsen fallen gelassen wird, gilt dasselbe. Für ein solches ergibt sich aber eine wesentliche Schwierigkeit durch das Nichtzusammenfallen der Rotationsachse mit der Trägheitsachse des kleinsten Momentes.

** Listing, Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde. Göttingen 1872.

*** Sonst müßten Unregelmäßigkeiten in Länge und Breite auftreten, z. B. nördlicher gelegene Punkte eine kleinere Polhöhe, daher auch eine kleinere geographische Breite haben.

welche sich eine analytische Darstellung durch eine Gleichung nicht geben läßt und muß man den Rechnungen auf der Erdoberfläche daher eine andere, durch eine analytisch angebbare Funktion definierte Fläche zugrunde legen, die Abweichungen der Lotrichtungen aber als lokale Abweichungen (daher auch lokale Störungen, Lotstörungen genannt) für möglichst viele Punkte bestimmen.

Seien N_1, N_2 (Fig. 279) die Lotlinien in zwei Punkten (einem Tale P_1 und auf einer Bergspitze P_2), und zwar mögen zwei solche Punkte gewählt

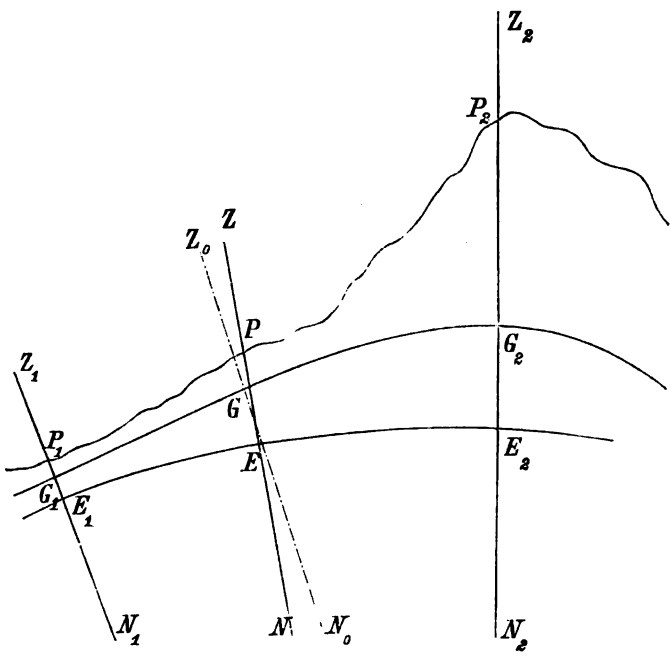


Fig. 279.

sein, daß die geodätische Übertragung der Koordinaten des einen Punktes direkt auf die Koordinaten des andern führt, sich also eine Lotabweichung nicht ergibt, was sich durch die angedeutete Konfiguration der physischen Erdoberfläche $P_1 P_2$ erklären läßt. In einem zwischenliegenden Punkte P aber wird vermöge der Bergattraktion eine Abweichung der wahren Lotrichtung von der Normalen N des Ellipsoides stattfinden. Diejenige Fläche, welche überall normal zu den betreffenden Lotlinien steht, $G_1 G G_2$ ist das Geoid, welches von dem Ellipsoide $E_1 E E_2$ etwas abweicht.

Würde man in der Karten- oder Plandarstellung des betrachteten Gebietes die Entfernung $E_1 E_2$ in gleiche Teile teilen, entsprechend gleichen Entfernungen, so würde die Lage des Punktes P durch seine Entfernungen von den beiden Endpunkten bestimmt und nach der Zeichnung etwa in der Mitte zwischen beiden liegen. Trägt man aber die Punkte ihrer astronomisch bestimmten geographischen Breite nach ein, so sieht man, daß der Unterschied der geographischen Breiten zwischen P und P_2 mehr als viermal so groß ist, als derjenige zwischen P_1 und P. Der Punkt P würde daher in

der Darstellung dreimal so weit von P_2 als von P_1 liegen, d. h. in $\frac{1}{4}$ der Distanz: ein den Tatsachen durchaus nicht entsprechendes Resultat. Trägt man aber die Punkte ihrer richtigen Entfernung nach in die Karte ein und bezeichnet an den Kartenrändern die üblichen Angaben für die geographischen Breiten, so entnimmt man offenbar aus den Karten ganz falsche Daten für diese, die um $\frac{1}{2}'$ und mehr (nämlich um den ganzen Betrag der Lotabweichung) fehlerhaft sein werden. Man drückt dies auch so aus: „Für die Detailvermessung muß man von den geographischen Positionen eines einzigen Punktes des Netzes ausgehen und die geographischen Positionen aller anderen Orte aus denjenigen des angenommenen Fundamentalpunktes nur durch geodätische Übertragung ableiten." Diese Ausdrucksweise deckt sich aber nicht mit der Kartendarstellung. Man müßte in diesem Falle eigentlich die Bezeichnung der Breiten und Längen ganz weglassen und nur Entfernungen (nach zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen, Koordinaten) eintragen; ein Vorgang, der wieder die Vergleichung der Lage verschiedener Orte, die auf verschiedene Koordinatensysteme bezogen sind, ungemein erschweren, ja sogar ganz unmöglich machen würde.

Man könnte diesem Übelstande dadurch vorbeugen, daß man für die Detailvermessung durchwegs auf geozentrische Breiten übergeht; denn die geozentrische Breite ist ein streng definierter, von der Form der Erdoberfläche unabhängiger Winkel. Die aus der Karte entnommenen Daten wären aber dann um auf geographische Breiten zu kommen, erst um die Differenz „geographische Breite — geozentrische Breite" und dann um die Abweichungen der wahren Breite von der ellipsoidischen Breite zu korrigieren. Da die erstere Differenz bis auf 11′ steigen kann, so würde dieses eine unnötige Komplikation bei der Entnahme der geographischen Positionen bedeuten. Da man aber ohnedies für alle Rechnungen das Erdellipsoid als ausreichende und notwendige Näherung für die wahre Erdgestalt substituieren kann und muß, so kann man für alle Punkte die ellipsoidische Breite und Länge als Bestimmungsstücke eintragen.

Diese folgen tatsächlich durch die geodätische Übertragung, wenn man die ellipsoidische Breite eines Punktes kennt. Aber auch dieses ist nicht der Fall; die angenommene Breite des Ausgangspunktes setzt voraus, daß daselbst eine Lotabweichung nicht vorhanden ist, daß beobachtete Breite und ellipsoidische Breite identisch sind. Man kennt aber in keinem Punkte die wahre ellipsoidische Breite. Was wir beobachten, sind daher nur relative Lotabweichungen. Für die Erkenntnis der wahren Figur der Erde, welches ja eigentlich die wichtigste Aufgabe der Erdmessung ist, ist es aber nötig, die Lotabweichungen in möglichst vielen Punkten zu finden, daher in möglichst vielen Punkten astronomische Ortsbestimmungen zu machen und aus diesen, da man den wahren Wert der Lotabweichungen nicht finden kann, den wahrscheinlichsten Wert abzuleiten, zu welchem Zwecke aber eine Hypothese über die Verteilung der Lotabweichungen nötig ist. Die nächstliegende Annahme ist nun die, daß die Lotabweichungen auf allen Punkten gleichmäßig verteilt werden, d. h. so, daß alle einzelnen Lotabweichungen möglichst geringe Beträge erreichen, was wieder eine Ausgleichung der beobachteten Lotabweichungen nach der

Methode der kleinsten Quadrate zuläßt, eine Aufgabe, die erst gelöst werden kann, wenn möglichst viele Beobachtungen bereits vorliegen.

Dieses führt aber sofort zu einer einfachen Methode, die Widersprüche zwischen den Aufgaben der Detailvermessung und der Landestriangulation zu beheben und dabei den tatsächlichen Verhältnissen vollkommen Rechnung zu tragen.

Bezeichnet man Linien gleicher geographischer Breite (gleicher Polhöhe) auf dem Geoid als Äquilatituden, Linien gleicher geographischer Länge als Äquilongituden, so werden diese keine ebenen Kurven mehr sein, sondern räumlich gekrümmt.* Verbindet man auf der Spezialkarte oder dem Plane die Punkte gleicher geographischer Breite und ebenso die Punkte gleicher geographischer Länge, so erhält man auch in diesen Darstellungen mehrfach gekrümmte Linien, welche von den geradlinig gezogenen Parallelkreisen und Meridianen bald nach der einen, bald nach der andern Seite abweichen.

Den wirklichen Verlauf der Äquilatituden und Äquilongituden erhält man, wenn man für jeden Punkt seine astronomisch bestimmte geographische Breite und Länge berücksichtigt. Natürlich genügt es, für eine größere Anzahl derselben die erforderlichen Beobachtungen anzustellen und zu berechnen und die anderen dazwischen zu interpolieren. Je größer die Zahl der ermittelten astronomischen Positionen, desto genauer wird der Verlauf der Äquilatituden und Äquilongituden bekannt.

Dabei werden die durch die geodätischen Operationen erhaltenen Karten und Pläne überhaupt nicht alteriert und geben stets die ellipsoidische Breite und Länge und wahren Distanzen; die Abweichungen der Äquilatituden und Äquilongituden von den ellipsoidischen Parallelkreisen beziehungsweise Meridianen gestattet sofort die Lotabweichung für jeden einzelnen Punkt zu entnehmen, so daß eine derartige graphische Darstellung eine raschere und leichtere Übersicht gewährt, als dies durch noch so ausführliche Tabellen zu erreichen möglich ist.

Da man hierbei für die Kartenzeichnung von einem Punkte ausgeht, für welchen die Lotabweichung gleich Null angenommen wurde, so erhält man aus dem verzeichneten System der Netzlinien nur die relativen Lotabweichungen. Man erhält aber aus diesen sofort die wahren Lotabweichungen, sobald die Lotabweichung für den Ausgangspunkt bekannt wird. Nach dem früheren wäre aber die Lotabweichung für den Ausgangspunkt gleich Null, wenn die Summe der Lotabweichungen für alle übrigen Punkte zusammen gleich Null wäre. Diese Summe läßt sich aber aus der graphischen Darstellung sehr leicht bilden: es ist die Summe der Flächen zwischen den wahren und den ellipsoidischen Netzlinien, wenn die nach der einen Seite liegenden Abweichungen positiv, die nach der andern Seite liegenden negativ genommen würden. Ist diese Summe nicht Null, sondern z. B. an n Netzlinien von je μ *cm* Länge** gleich F *cm*^{2}, so ist

* Ähnlich, nur in weniger auffälligem Maße, wie die Isogonen, Isoklinen usw.

** Die Breiten und Längen selbstverständlich für sich behandelt; diese Flächen können sehr einfach mittels der Planimeter bestimmt werden, wobei die Abweichungen für diese Zwecke auch in einem vergrößerten Maßstabe eingetragen werden können.

$$\frac{F}{n\,\mu}\,cm$$

als Lotabweichung des Ausgangspunktes anzusehen. Auf das System der wahren Lotabweichungen kann man dann einfach übergehen, wenn man nur die ellipsoidischen Meridiane und Parallelkreise um den gefundenen Betrag der Lotabweichung des Ausgangspunktes im entgegengesetzten Sinne parallel mit sich selbst verschiebt.

148. Einfluß der Lotabweichungen auf die Breiten, Längen und Azimute. Sei Z (Fig. 280) der Ort, in welchem die Normale des Ellipsoides mo die Himmelskugel trifft; man nennt Z das geodätische Zenit, da es dasjenige Zenit ist, welches unter der Annahme eines gegebenen Ellipsoides durch die geodätische Übertragung von einem Punkte des

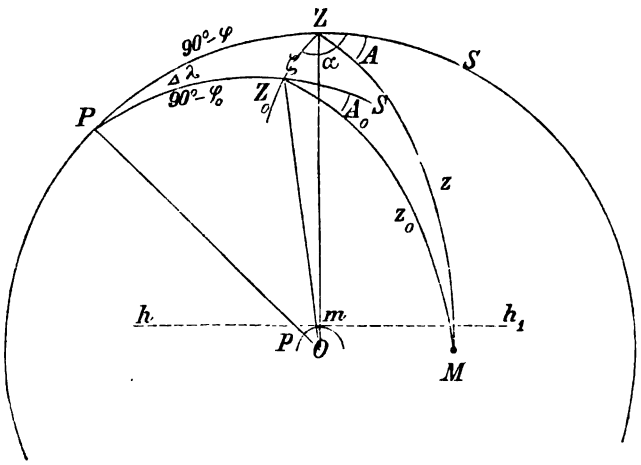


Fig. 280.

Ellipsoides auf einen andern erhalten wird. Die wirkliche Lotlinie wird aber die Himmelskugel in einem andern Punkte Z_0 treffen, welches das wirkliche oder astronomische Zenit, d. i. das durch astronomische Beobachtungen bestimmte Zenit ist.* Der Bogen $ZZ_0 = \zeta$ gibt den gesamten Betrag der Lotabweichung.

Ist P der Weltpol, so ist PZ das Komplement der geodätischen Polhöhe, PZ_0 der astronomisch bestimmten und die Richtung, in welcher die Lotabweichung stattfindet, ist bestimmt durch das Azimut $SZZ_0 = \alpha$ des wahren Zenites, bezogen auf das geodätische, oder durch das Azimut $S'Z_0Z = \alpha_0 = 180° + \alpha'$ des geodätischen Zenites, bezogen auf das wahre, wenn α' das von Z_0S gezählte Azimut der Verlängerung von ZZ_0 bedeutet, oder endlich durch den Stundenwinkel $\Delta\lambda$ zwischen den beiden größten Kreisen PZ und PZ_0, d. i. die Lotabweichung in Länge, während $\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$ die Lotabweichung in Breite ist.

* Beide Punkte auf einer für einen Moment völlig ruhend gedachten Himmelskugel verzeichnet.

Aus dem Dreiecke PZZ_0 folgt

$$\cos\zeta = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda = \\ = \cos(\varphi - \varphi_0) - 2\cos\varphi\cos\varphi_0 \sin\tfrac{1}{2}\Delta\lambda^2$$

oder

$$1 - \cos\zeta = 1 - \cos(\varphi - \varphi_0) + 2\cos\varphi\cos\varphi_0 \sin\tfrac{1}{2}\Delta\lambda^2,$$

demnach, wenn in dem Koeffizienten von $\sin\frac{1}{2}\Delta\lambda^2$ an Stelle von $\cos\varphi$ der davon wenig verschiedene Wert $\cos\varphi_0$ gesetzt wird:

$$2\sin\tfrac{1}{2}\zeta^2 = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)^2 + 2\cos\varphi_0{}^2 \sin\tfrac{1}{2}\Delta\lambda^2.$$

Ersetzt man hier die sehr kleinen Sinus durch die Bögen, so erhält man

$$\zeta^2 = \Delta\varphi^2 + \cos\varphi_0{}^2\,\Delta\lambda^2.$$

Weiter folgt aus den Neperschen Analogien

$$\cot\frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)}\cot\tfrac{1}{2}\Delta\lambda$$

$$\cot\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)}\cot\tfrac{1}{2}\Delta\lambda,$$

woraus infolge der Kleinheit von $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha - \alpha'}{2} = \operatorname{tang}\frac{\Delta\lambda}{2}\sin\frac{\varphi + \varphi_0}{2}$$

oder endlich, da α und α' nur wenig verschieden sein können,

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \Delta\lambda \sin\varphi_0 \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') &= \cos\varphi_0 \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

folgt. Es ist daher auch

$$\zeta^2 = \Delta\varphi^2\,(1 + \operatorname{tang}\alpha^2),$$

demnach

$$\zeta = \frac{\Delta\varphi}{\cos\alpha}$$

und daher wie in einem ebenen Dreiecke

$$\left.\begin{aligned} \zeta\cos\alpha &= \Delta\varphi \\ \zeta\sin\alpha &= \cos\varphi_0\,\Delta\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Für irgendeinen Punkt M, dessen Zenitdistanz z ist, werden das geodätisch übertragene Azimut* $A = \measuredangle SZM$ und das astronomische

* Auch die Zenitdistanz wird geändert. Die beobachtete Zenitdistanz wäre von dem wirklichen Zenit Z_0 zu rechnen, also $Z_0M = z_0$ und es ist

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z - z_0) = \frac{\sin\frac{1}{2}[(180° - \alpha' + A_0) - (\alpha - A)]}{\sin\frac{1}{2}[(180° - \alpha' + A_0) + (\alpha - A)]}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta,$$

demnach

$$z - z_0 = \frac{\zeta\cos(\alpha' - A_0)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha + A - A_0)}; \quad \Delta z = \zeta\cos(\alpha' - A_0).$$

Azimut $A_0 = \measuredangle SZ_0M$ voneinander verschieden sein und es wird aus dem Dreiecke MZZ_0

$$\cot(180^c - \alpha' + A_0) = \frac{\cos z \sin\zeta - \sin z \cos\zeta \cos(\alpha - A)}{\sin z \sin(\alpha - A)}$$

oder $\sin\zeta = \zeta$, $\cos\zeta = 1$ setzend:

$$-\cot(\alpha' - A_0) = \frac{\zeta \cot z}{\sin(\alpha - A)} - \cot(\alpha - A),$$

folglich

$$\cot(\alpha - A) - \cot(\alpha' - A_0) = \frac{\sin(\alpha' - \alpha + A - A_0)}{\sin(\alpha - A)^2} = \frac{\zeta \cot z}{\sin(\alpha - A)}$$

und daraus

$$\alpha' - \alpha + A - A_0 = \zeta \cot z \sin(\alpha - A_0)$$

oder endlich

$$\begin{aligned} A - A_0 &= \zeta \cot z \sin(\alpha - A_0) + (\alpha - \alpha') \\ &= \zeta \cot z \sin(\alpha - A_0) + \Delta\lambda \sin\varphi_0. \end{aligned}$$

Für Gegenstände nahe dem Horizonte kann das erste Glied wegen $\cot z$ nahe gleich Null vernachlässigt werden und es bleibt

$$\Delta A = A - A_0 = \Delta\lambda \sin\varphi_0. \quad \ldots\ldots (3a)$$

Es wird natürlich nicht die gesamte Lotabweichung ζ beobachtet, sondern $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$; dann bestimmt sich ζ und α nach den Gleichungen (2). Oft aber ist der Längenunterschied nicht beobachtet, so daß die geodätisch übertragene Länge nicht zur Bestimmung der Lotabweichung in Länge benutzt werden kann, dann kann aber das geodätisch übertragene Azimut mit einem auf astronomischem Wege ermittelten Azimute hierzu verwendet werden. Denn es ist

$$\zeta \sin\alpha = \Delta\lambda \cos\varphi = \Delta\lambda \sin\varphi \cot\varphi = \Delta A \cot\varphi$$

und man erhält somit die gesamte Lotabweichung aus

$$\begin{aligned} \zeta \cos\alpha &= \Delta\varphi \\ \zeta \sin\alpha &= \Delta A \cot\varphi, \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

sämtliche Abweichungen in dem Sinne

geodätisch übertragener Wert — astronomisch bestimmter Wert

genommen.*

Beispiel: Für den Triangulierungspunkt erster Ordnung Ragusa ($\varphi = 42° 38'$) ergaben sich die Unterschiede

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= -19{\cdot}75'' \\ \Delta\lambda &= -21{\cdot}48 \\ \Delta A &= -15{\cdot}71. \end{aligned}$$

* $\Delta\lambda$ ist nach Gleichung (3a) positiv, wenn $A > A_0$, d. h. wenn das astronomische Zenit westlich vom geodätisch übertragenen liegt, daher seine Länge kleiner, demnach $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$.

Daher wird

$$\begin{aligned}
\log \cos \varphi &= 9{\cdot}8667 \\
\log \Delta\lambda &= 1{\cdot}3320_n \\
\log \cot \varphi &= 0{\cdot}0359 \\
\log \Delta A &= 1{\cdot}1962_n \\
\log \zeta \sin \alpha &= 1{\cdot}2321_n \text{ aus } \Delta A \\
&= 1{\cdot}1987_n \text{ aus } \Delta\lambda \\
\log \zeta \sin \alpha &= 1{\cdot}2154_n \text{ im Mittel} \\
& \quad 9{\cdot}8859 \\
\log \zeta \cos \alpha &= 1{\cdot}2956_n \\
\log \operatorname{tang} \alpha &= 9{\cdot}9198 \\
\alpha &= 219^\circ\ 44' \\
\log \zeta &= 1\ 4097 \\
\zeta &= 25{\cdot}68''.
\end{aligned}$$

149. Die Größe der Schwerkraft ist gegeben durch die Strecke Mu (Fig. 273) $= g$, wenn wieder Mp, Mq die Größe der Fliehkraft beziehungsweise der Anziehungskraft der Erde darstellen. Es ist daher, wie man leicht findet, wenn man von u ein Perpendikel auf OM fällt und A die Größe der Attraktion bezeichnet:

$$\begin{aligned}
g \sin \alpha &= f \sin \psi \\
g \cos \alpha &= A - f \cos \psi.
\end{aligned}$$

Da α ein sehr kleiner Winkel ist, so folgt aus der zweiten Formel

$$g = A - f \cos \psi$$

oder, wenn wieder der Koeffizient p von Seite 333 eingeführt wird,

$$g = A\,(1 - p \cos \psi^2).$$

Die Attraktion A ist aber keine Konstante, da die Entfernungen der Punkte vom Erdmittelpunkte nicht konstant sind. Überdies ist die Attraktion eines Ellipsoides nicht dieselbe wie diejenige einer Kugel und es findet sich*

im Äquator: $$g_0 = \frac{M k^2}{a^2}\left(1 + \frac{3\,K}{2a^2}\right) - \omega^2 a$$

an den Polen: $$g_{90} = \frac{M k^2}{b^2}\left(1 - \frac{3\,K}{b^2}\right)$$

---

* Das Potential eines Körpers, dessen Punkte die (veränderlichen) Koordinaten x, y, z haben, auf einen Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1, ist

$$V_1 = k^2 \int \frac{dm}{\rho},$$

wobei

$$\rho = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

ist; das Potential der Fliehkraft ist, wenn die Rotationsachse die z-Achse ist,

$$V_2 = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2)\,\omega^2,$$

wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit und

$$K = \frac{C - \frac{1}{2}(A+B)}{M}$$

ist, wobei A, B, C die Hauptträgsmomente um drei aufeinander senkrechte Achsen sind, von denen die Achse der C mit der Rotationsachse zusammenfällt. Da nun mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$b = a(1-\alpha); \quad b^2 = a^2(1-2\alpha)$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2}(1+2\alpha)$$

---

wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit ist. Das Gesamtpotential wird

$$V = V_1 + V_2.$$

Die Entwicklung von $\frac{1}{\rho}$ gibt, wenn r_1 die Entfernung des angezogenen Maßenpunktes und r die (veränderliche) Entfernung der einzelnen anziehenden Maßenpunkte vom Koordinatenursprung bedeutet:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_1}\left[1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)P_1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 P_2 \ldots\ldots\right],$$

wobei $r_1 > r$ und die P aufeinanderfolgende Kugelfunktionen bedeuten, also

$$P_1 = \sin\varphi \sin\varphi_1 + \cos\varphi\cos\varphi_1\cos(\lambda-\lambda_1)$$

$$P_2 = \tfrac{9}{4}(\sin\varphi^2 - \tfrac{1}{3})(\sin\varphi_1{}^2 - \tfrac{1}{3}) + \\ + 3\sin\varphi\sin\varphi_1\cos\varphi\cos\varphi_1\cos(\lambda-\lambda_1) + \tfrac{3}{4}\cos\varphi^2\cos\varphi_1{}^2\cos 2(\lambda-\lambda_1)$$

oder

$$P_1 = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r r_1}$$

$$P_2\, r^2 = \tfrac{3}{2}(\sin\varphi_1{}^2 - \tfrac{1}{3})\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) \\ + 3\sin\varphi_1\cos\varphi_1(x z\cos\lambda_1 + y z\sin\lambda_1) + \tfrac{3}{4}\cos\varphi_1{}^2[(x^2-y^2)\cos 2\lambda_1 + 2xy\sin 2\lambda_1].$$

Integriert man hier, so erhält man unter der Voraussetzung, daß das Achsensystem im Schwerpunkt des anziehenden Körpers liegt und die Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, wegen

$$\int x\,dm = 0 \qquad \int xy\,dm = 0 \qquad \int (y^2+z^2)\,dm = A$$
$$\int y\,dm = 0 \qquad \int yz\,dm = 0 \qquad \int (z^2+x^2)\,dm = B$$
$$\int z\,dm = 0 \qquad \int xz\,dm = 0 \qquad \int (x^2+y^2)\,dm = C$$

$$V = \frac{k^2}{r_1}\left\{M + \frac{1}{2r_1{}^2}[C - \tfrac{1}{2}(A+B)](1-3\sin\varphi_1{}^2) + \frac{3}{4r_1{}^2}(B-A)\cos\varphi_1{}^2\cos 2\lambda_1\right\} + \tfrac{1}{2}\omega^2 r_1{}^2\cos\varphi_1{}^2.$$

Für das Rotationsellipsoid wird $B = A$ und setzt man

$$K = \frac{C - \frac{1}{2}(A+B)}{M},$$

so wird

$$V = \frac{Mk^2}{r_1}\left[1 + \frac{K}{2r_1{}^2}(1-3\sin\varphi_1{}^2)\right] + \frac{\omega^2 r_1{}^2}{2}\cos\varphi_1{}^2. \quad \ldots\ldots (1)$$

Daraus folgt für die Größe der Schwerkraft

$$g = -\frac{\partial V}{\partial r_1} = +\frac{Mk^2}{r_1{}^2}\left[1 + \frac{3K}{2r_1{}^2}(1-3\sin\varphi_1{}^2)\right] - \omega^2 r_1\cos\varphi_1{}^2, \quad (2)$$

woraus sich für $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_1 = 90°$ die oben angeschriebenen Ausdrücke ergeben.

ist, so wird

$$g_{90} = \frac{M k^2}{a^2}\left(1 + 2\alpha - \frac{3K}{a^2}\right)$$

$$g_{90} - g_0 = \frac{M k^2}{a^2}\left(2\alpha - \frac{9K}{2a^2}\right) + \omega^2 a$$

$$q = \frac{g_{90} - g_0}{g_0} = 2\alpha - \frac{9K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a}{g_0}.$$

K läßt sich aber in einfacher Weise durch die Abplattung ausdrücken;* es ist

$$\tfrac{3}{2}\frac{K}{a^2} = \alpha - \frac{\omega^2 a}{2 g_0}.$$

folglich wird

$$q = \frac{g_{90} - g_0}{g_0} = 2\alpha - 3\alpha + \frac{5\omega^2 a}{2 g_0}.$$

Es ist aber

$$\frac{\omega^2 a}{g_0} = \frac{f_0}{g_0} = p$$

das Verhältnis der Fliehkraft am Äquator zur Schwerkraft am Äquator. somit

$$\alpha + q = \tfrac{5}{2} p, \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

d. h.

$$\text{Abplattung} + \frac{\text{Zunahme der Schwerkraft vom Äquator bis zum Pol}}{\text{Schwerkraft am Äquator}} = \frac{5}{2}\frac{\text{Fliehkraft am Äquator}}{\text{Schwerkraft am Äquator}},$$

das Clairautsche Theorem.

---

* Da $V =$ Konst. die Niveauflächen ergibt, so erhält man aus dem Ausdrucke (1) (S. 377) für $V = V_0$ die Erdoberfläche; demnach, wenn man $r = a$, $\varphi = 0$ setzt:

$$V_0 = \frac{M k^2}{a}\left[1 + \frac{K}{2a^2}\right] + \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

und für $r = b$, $\varphi = 90°$:

$$V_0 = \frac{M k^2}{b}\left[1 - \frac{K}{b^2}\right],$$

daher durch Gleichstellung der beiden Ausdrücke

$$M k^2\left|\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) - K\left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{2a^3}\right)\right| - \frac{\omega^2 a^2}{2} = 0.$$

folglich wegen

$$b = a(1 - \alpha)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a}(1 + \alpha); \qquad \frac{1}{b^3} = \frac{1}{a^3}(1 + 3\alpha)$$

$$\alpha - \frac{K}{a^2}\left(\tfrac{3}{2} + 3\alpha\right) - \frac{\omega^2 a^3}{2 M k^2} = 0$$

$$\alpha = \tfrac{3}{2}\frac{K}{a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2 M k^2}; \qquad \tfrac{3}{2}\frac{K}{a^2} = \alpha - \frac{\omega^2 a}{2 g_0}.$$

Da die Schwerkraft g von $\cos\varphi^2 = 1 - \sin\varphi^2$ abhängig ist, so drückt sich die Schwerkraft der Bedeutung von q gemäß durch

$$g = g_0 (1 + q \sin\varphi^2)$$

aus. Beobachtet man daher die Längen des Sekundenpendels l_1 und l_2 an zwei Orten, deren geographische Breiten φ_1 und φ_2 sind, so folgen die Schwerkräfte

$$g_1 = \pi^2 l_1; \qquad g_2 = \pi^2 l_2$$

und man erhält aus den beiden Gleichungen

$$g_1 = g_0 (1 + q \sin\varphi_1^2)$$
$$g_2 = g_0 (1 + q \sin\varphi_2^2)$$
$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{1 + q \sin\varphi_1^2}{1 + q \sin\varphi_2^2},$$

demnach

$$q = \frac{g_1 - g_2}{g_2 \sin\varphi_1^2 - g_1 \sin\varphi_2^2}.$$

Infolge des Satzes (3) ist aber: $q = \frac{5}{2} p - \alpha$ oder da sehr nahe $p = \alpha$ ist: $q = \frac{3}{2}\alpha$. Ist daher q bestimmt, so erhält man α. Es können daher Pendelbeobachtungen ebenso zur Bestimmung der Abplattung herangezogen werden und wird man auch hier, um genaue Resultate zu erhalten, Pendelbeobachtungen an zahlreichen Orten vornehmen.*

An Stelle der absoluten Bestimmungen traten nach dem Vorschlage von Airy relative Bestimmungen, die leichter auszuführen sind und daher in größerer Zahl ausgeführt werden können. Aus solchen im letzten Jahrzehnt in größerer Zahl ausgeführten Bestimmungen ergaben sich aber bedeutende lokale Abweichungen, deren Diskussion auch manche interessante Resultate über die geologische Beschaffenheit der Erdkruste zu geben vermögen.**

Erst das System der Lotabweichungen und Schwerestörungen in ihrem gemeinsamen Verhalten vermag einen vollen Überblick über den Verlauf des Geoides und seine Abweichungen von der zugrunde gelegten geometrischen Figur der Erde, dem Ellipsoid, zu geben.

150. Das Präzisionsnivellement. Das Geoid ist eine Niveaufläche; der völlig ruhende Meeresspiegel würde eine solche darstellen und wenn man sich den ganzen Erdball von einem System von Kanälen durchzogen denken würde, so würde die Oberfläche derselben einer Niveaufläche angehören. Andere Niveauflächen, welche die Lotrichtungen ebenfalls normal schneiden, liegen über derselben, andere unter derselben. Als Geoid hat man jene dieser Niveauflächen anzusehen, deren Volumen demjenigen des physischen Erdballes gleich ist.

* Über diese Beobachtungen vgl. Bessel „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels". Abhandl. der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1826. Gesammelte Werke, Bd. III, S. 164; Clarke, Geodesy, S. 323—339; Helmert, „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Bd. II, S. 191—223.

** Vgl. z. B. Helmert, „Die Schwerkraft im Hochgebirge", Berlin, 1890.

Die Höhen aller Punkte über dem Geoid werden durch das Nivellement bestimmt. Würde man von Punkt zu Punkt horizontale Richtungen herstellen und in diesen weiterschreiten, so würde man stets auf derselben Niveaufläche bleiben und müßte, über die Kontinente hinüber, das Niveau zweier verschiedenen Meere, z. B. Nordsee und Adriatisches Meer, in derselben Niveaufläche liegend finden.

Die Ausführung des Nivellements zeigt aber einen Unterschied. Daß man die Flutbewegungen der Meere zu eliminieren hat, wurde schon früher erwähnt (Nr. 69). Vergleicht man aber die Höhen der „Mittelwässer", so zeigen sich dieselben nicht identisch. So scheint das Mittelwasser des Mittelmeeres bei Alicante um 66·6 *cm*, bei Genua um 2·2 *cm* höher als das Mittelwasser der Nordsee bei Amsterdam; das Mittelwasser des Atlantischen Ozeans bei Biarritz um 28·7 *cm* höher und bei Les Sables d'Olonnes um 28·8 *cm* tiefer als das Mittelwasser der Nordsee bei Amsterdam.

Aber selbst die Mittelwässer desselben Meeres sind an verschiedenen Stellen nicht identisch; das Mittelwasser des Adriatischen Meeres erscheint bei Triest um 17 *cm* höher als bei Fiume, bei Fano und Pesaro um 25 *cm* tiefer als bei Rimini.

Man bezieht daher gegenwärtig die Höhenkoten der durch das Nivellement bestimmten Punkte in jedem Staate auf einen vorläufig festgesetzten Nullpunkt.

Ein derartiger Höhenunterschied würde nicht stattfinden, wenn man stets in derselben Niveaufläche bliebe. Kommt man aber, wie dies beim Nivellieren in der Tat der Fall ist, in immer andere Niveauflächen (höhere oder tiefere), so wird sich jederzeit ein scheinbarer Niveauunterschied ergeben, wenn die Niveauflächen nicht parallel verlaufen. Dieses findet in der Tat statt* und die Folge ist, daß der Höhenunterschied sich auf verschiedenen Wegen verschieden ergibt und sich in „Nivellementsschleifen" (in denen sich das Nivellement zwischen zwei Punkten A und B auf zwei verschiedenen Wegen erstreckt) ein „Schlußfehler" ergibt. Auch das Nivellement muß daher ausgeglichen werden, wobei der theoretische Fehler aus den Veränderungen der Schwere bestimmt wird und der restliche Schlußfehler, als von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern herrührend, nach der Methode der kleinsten Quadrate weggeschafft wird.** Ein solcher Schlußfehler findet auch statt, wenn zwei Punkte derselben Niveaufläche (Meeresspiegel) verbunden werden, je nachdem man dieselben längs des Meeresniveaus selbst oder mittels eines kontinentalen Nivellements verbindet, daher das letztere einen Höhenunterschied ergibt.

---

* Da $g = \frac{\partial V}{\partial r}$ ist, so ist umgekehrt $\Delta r = \frac{\Delta V}{g}$, daher für einen konstanten Potentialunterschied ΔV zwischen zwei Niveauflächen ihr Abstand Δr umgekehrt proportional der Intensität der Schwerkraft; daher werden im allgemeinen die Niveauflächen gleichen Potentialunterschiedes in größeren Höhen weiter voneinander entfernt sein, da g kleiner ist. Schon infolge der normalen Schwereänderung auf dem Sphäroid müßte sich ein solcher Einfluß geltend machen und einen ähnlichen Einfluß haben auch Schwerestörungen lokaler Natur.

* Vgl. Zachariae, „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Koordinaten." Deutsch von E. Lamp, Berlin, 1878, S. 281; Helmert, l. c., Bd. II, S. 505.

151. Polhöhenschwankungen. Würde die Rotationsachse der Erde mit der Hauptträgheitsachse des größten Momentes* zusammenfallen und würden keine äußeren störenden Kräfte wirken, so würde dieser Zustand ein bleibender sein, d. h. die Rotationsachse behielte stets im Körper dieselbe Lage: sie würde immerwährend mit der Hauptträgheitsachse des größten Momentes zusammenfallen. Wenn aber auch keine äußeren, die Rotationsbewegung beeinflussenden Kräfte wirken, so wird dieser Zustand alteriert, wenn die Rotationsachse nicht genau mit der Hauptträgheitsachse des größten Momentes zusammenfällt. Schließen dieselben einen kleinen Winkel ein, so wird, wie schon Euler gezeigt hat, die Rotationsachse um die Hauptträgheitsachse einen kleinen Kegel beschreiben, und zwar ergibt sich für die Erde, daß die Dauer dieser Drehung 305 Tage beträgt. Der Winkel, den die beiden erwähnten Achsen einschließen, muß durch Beobachtungen ermittelt werden und wurde zuerst von Nyrén in Pulkowa, später von C. F. Peters und Downing ermittelt; er ergab sich zu nicht ganz 0·1″.

Die Lage der Hauptträgheitsachse im Erdkörper wäre nun zunächst als fest anzusehen; da die Rotationsachse nicht mit ihr zusammenfällt, so wird der Rotationspol in einem gegebenen Momente z. B. um 0·1″ näher gegen Europa zu liegen, infolge der Drehung um den Trägheitspol aber nicht in dieser Lage bleiben, sondern nach 152 Tagen auf die entgegengesetzte Seite, also gegen die Seite des Großen Ozeans (Beringsstraße) zu gerückt sein und dabei einen kleinen Kreis von etwa 3 *m* Halbmesser um den Trägheitspol beschreiben. Da aber der Erdäquator sowie der Himmelsäquator senkrecht auf der Rotationsachse stehen, so werden die von diesem gezählten geographischen Breiten nicht konstant sein, sondern würden eine Schwankung im Betrage von 0·2″ zeigen, und zwar würde die geographische Breite im ersten Falle, wenn der Pol gegen Europa zu gerückt ist, in Europa am größten, im Großen Ozean am kleinsten und nach 152 Tagen in Europa um 0·2″ kleiner, für Orte im Großen Ozean um denselben Betrag größer sein. Dabei sind allerdings nicht die Orte auf der Erdoberfläche verschoben, sondern die Lage des Äquators. Man spricht daher auch von einer instantanen Rotationsachse. Die Wirkung ist aber eben die, daß die von dem zugehörigen Äquator gerechneten Breiten nicht konstant sind.**

Aber auch die Hauptträgheitsachsen sind nicht im Erdkörper fest,

---

* In jedem noch so unregelmäßig gestalteten Körper gibt es drei aufeinander senkrechte gerade Linien, die durch den Schwerpunkt gehen, von der Eigenschaft, daß wenn der Körper um eine derselben rotiert, das Trägheitsmoment für eine derselben ein Maximum, für eine ein Minimum wird. Diese Richtungen heißen die Hauptträgheitsachsen. Für einen Rotationskörper fällt die eine der Hauptträgheitsachsen mit der geometrischen Rotationsachse zusammen; ist der Körper abgeplattet, so ist das Trägheitsmoment um diese Achse genommen ein Maximum. Aber die tatsächliche Rotation muß nicht um diese geometrische Achse erfolgen; dann ist die geometrische Achse nicht die wirkliche Rotationsachse für die Drehung, sondern sie ist nur als Rotationsachse für die Entstehung des Körpers durch Rotation eines Meridians um dieselbe zu denken.

** Die äußeren störenden Kräfte, die Anziehungen der Sonne und des Mondes bewirken Bewegungen der Rotationsachse im Raume, welche teilweise eine fortschreitende, säkulare ist, die Präzession, teilweise eine periodische, die Nutation genannt.

sondern werden infolge von Massenverschiebungen, die z. B. durch Anwachsen und Abschmelzen der Eismassen am Pole bewirkt werden, verschoben. Wie die mathematische Analyse zeigt, werden aber diese Verschiebungen der Hauptträgheitsachsen eine Drehung der Rotationsachse mit bedeutend größerer Amplitude und der Dauer der Periode von einem Jahre zur Folge haben. Die beiden Bewegungen kombinieren sich nun und es werden daraus Polhöhenschwankungen von bedeutend komplizierter Gestaltung entstehen, deren Amplitude bis zu 0·5″ ansteigen kann.* Hierzu trägt auch weiters der Umstand bei, daß man die Erde nicht als ein starres Gebilde ansehen kann, sondern als eine von einer festen Kruste umschlossene, in ihrem Inneren noch zähflüssige Masse. Im ganzen ist daher zu beachten, daß der Begriff „Polhöhe eines Ortes“ nicht als eine Konstante angesehen werden darf, sondern daß das, was wir als Polhöhe eines Ortes bezeichnen, eigentlich einen mittleren Wert derselben darstellt und die geographische Breite, gezählt von einer mittleren Lage des Äquators, vertritt.

---

* Vgl. hierfür: Albrecht, „Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariationen“, 1897 bis 1900, in den „Publikationen des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung“. H. G. van de Sande Bakhuyzen, „Variations of latitude, deduced from the observations of Polaris, made at Greenwich 1851—1899“. Monthly Notices, Vol. LI, Nr. 5. M. Chandler, Astronomical Journal, Bd. XI, XII und XIV. S. Newcomb, ibid., Bd. XII, und des Verfassers Artikel „Mechanik des Himmels, § 99 und 100“ in Valentiner „Handwörterbuch der Astronomie, Enzyklopädie der Naturwissenschaften“, Trewendt, Breslau.

ANHANG.

Anleitung zu astronomischen, geodätischen und kartographischen Arbeiten auf Forschungsreisen.

A. Die Ausrüstung.

Der Reisende, der ferne Länder zu erforschen unternimmt, geht einer Reihe von Gefahren entgegen, die seine Gesundheit, selbst sein Leben gefährden können, in vielen Fällen aber nach mühevoller und aufopfernder Tätigkeit das ganze bereits erhaltene wissenschaftliche Material, einschließlich der Ausrüstung vernichten. Aus zwei Gründen muß daher seine Ausrüstung sich auf das Notwendigste beschränken: Erstens darf er sich nicht zu sehr belasten, um möglichst freie Hand im Kampfe gegen die sich ihm entgegenstellenden Hindernisse zu haben und zweitens muß im Falle des Verlustes der Instrumente der daraus erwachsende Schaden auf das notwendigste Minimum reduziert werden. Meist werden auch für die ersten Aufnahmen kleinere Instrumente ausreichen, mit denen der sachkundige Beobachter bei einiger Übung allen an die Resultate zu stellenden Anforderungen gerecht werden kann.

1. Für astronomische sowie für viele geodätische Operationen ist ein kleiner Theodolit unerläßlich. Man kann mit einem Theodoliten, dessen Objektiv 25 *mm* Öffnung hat, dessen Kreise mittels Nonien 10″ abzulesen gestatten, sein Auskommen finden. Der ganze Theodolit ist in einer einzigen Kiste verpackt oder es ist der untere Teil (Dreifuß, Horizontalkreis mit Nonien, Azimutalachse und Träger für die Höhenachse) für sich und ebenso der obere Teil (Höhenachse, Höhenkreis und Fernrohr) für sich in einer zweiten Kiste verpackt. In den Kisten sind die Teile genügend sicher gegen die Erschütterungen durch mit Samt oder Tuch überzogene Holzklötzchen festgeklemmt.

Beim Auspacken müssen alle Befestigungen gelöst werden, worauf jeder Teil vorsichtig herausgehoben wird und der Oberteil mit der nötigen Vorsicht (Zurückschlagen der Nonien usw.) auf die Träger der Höhenachse aufgesetzt wird (vgl. S. 163).

Beim Verpacken hat man wohl darauf zu achten, daß alle Teile genügend sicher mit Vermeidung von Verspannungen gelagert sind, und muß daher das Instrument stets in derselben Weise eingelegt und befestigt werden.

Für weite Transporte kommt jedes Kästchen mit dem Instrumente noch, zwischen Heu, Stroh oder Holzwolle gelagert, in eine zweite Kiste, so daß Stöße, die diese treffen, durch das zwischenliegende Isolierungsmittel auf die eigentliche Instrumentenkiste nicht übertragen werden. Bei langem Transporte zur See werden die Kisten noch mit einem Überzug aus Zinkblech versehen, der luftdicht verlötet wird, um die Instrumente vor der schädigenden Wirkung der salzigen Seeatmosphäre zu schützen.

2. Jedenfalls wird man auch einen Prismenkreis oder doch wenigstens einen Sextanten nebst dem zugehörigen künstlichen Horizonte mitnehmen. Für die Messung von Sonnenhöhen sowohl für Polhöhen- als auch für Zeitbestimmungen ist derselbe wohl das zweckmäßigste Instrument.

3. Selbstverständlich gehört zu den Ausrüstungsgegenständen auch mindestens eine gute Uhr, ein Chronometer; wenn möglich soll man zwei derselben haben, da hierdurch eine Kontrolle für den Gang derselben gegeben ist und bei unvorhergesehenen Zufällen, welche den einen treffen, der andere in der Zwischenzeit verwendet werden kann. Am besten ist es, die Chronometer stets in derselben Lage in der Tasche zu tragen (Nr. 71), und zwar auch auf dem Seetransporte. Dabei sollen sie regelmäßig, jeden Tag zur selben Zeit, aufgezogen werden. Boxchronometer, die ihrer Größe wegen nicht in der Tasche getragen werden können, müssen auf dem Seetransporte gehemmt (Nr. 71) und ebenso wie andere Instrumente verpackt werden.

4. Für Höhenmessungen sowohl als auch für alle meteorologischen Beobachtungen ist ein Aneroid unerläßlich, dessen Standkorrektion von Zeit zu Zeit durch ein Siedethermometer (Nr. 58) bestimmt wird. Nebstdem ist ein besonderer Thermometer für die Beobachtungen der Lufttemperaturen erforderlich.

5. Zum Peilen der Richtungen dient ein Kompaß in Cardanscher Aufhängung; doch kann ein gewöhnlicher Kompaß (ohne Cardansche Aufhängung) ausreichen, wenn man sich nur gewöhnt, denselben bei den Beobachtungen so zu halten, daß die Nadel frei beweglich bleibt.

6. Die Beobachtungen werden in ein Manuale und die Skizzen auf den Blättern eines Zeichenblockes eingetragen; statt des letzteren können die Blätter auch auf ein Skizzenbrettchen aufgespannt werden. Über die Eintragungen im Manuale und die Zusammenstellung der Skizzen siehe Nr. 72 und 73.

7. Kann man einen guten Phototheodoliten mitnehmen, so wird dadurch viel Arbeit erspart. Aber auch einen einfachen Photographenapparat kann man sich in ganz zweckentsprechender Weise für photographische Aufnahmen herrichten (S. 168, Nr. 65). Gut ist es, wenn man die Aufnahmen sofort entwickeln kann, damit man die etwa nicht gelungenen durch neue ersetzen kann. Jedenfalls muß jede Platte eine Nummer bekommen, welche, wenn die Platte nicht entwickelt wird, beim Platten-

wechsel mit einem scharfen Stift in einer Ecke der Gelatineschicht eingerissen wird. Die nicht entwickelten Platten müssen, sorgfältig vor Licht und Feuchtigkeit geschützt, transportiert werden und jedenfalls in der nächsten Station, in welcher längerer Aufenthalt genommen wird, entwickelt werden.

8. Für die Messung von Stromgeschwindigkeiten wird man meist mit einer Schwimmkugel ausreichen oder man kann sich an Ort und Stelle ein Log selbst anfertigen. Für Tiefenbestimmungen kann ein einfaches Lot dienen; zur Einhaltung der Richtung bei Aufnahmen von Querprofilen ein Winkelspiegel.

B. Die Beobachtungen.

Auf den Forschungsreisen wird man mit den Beobachtungen sobald als möglich beginnen, um die neu aufzunehmenden Gebiete an bereits bekannte anzuschließen. In erster Linie kommen dabei die Itineraraufnahmen in Betracht. Die Skizzen und die zugehörigen Aufzeichnungen im Manuale werden nach der in Nr. 72 und 73 angegebenen Art angefertigt; die Zeichnungen werden durch Zuckerlösung oder schwache Alaunlösung fixiert.

Für die Lesungen des Aneroides ist zu beachten, daß man dasselbe vor dem Ablesen stets durch schwaches Aufklopfen mit dem Finger auf den Glasdeckel des Gehäuses aus der momentanen Lage, in welcher dasselbe infolge der Reibungswiderstände erhalten wird, befreit.

Genauere Zeichnungen erhält man durch Anwendung des Verfahrens des Rayonierens und Schneidens (Nr. 80); die direkte Aufnahme einzelner Fixpunkte aus zwei oder drei Ständen und Einzeichnen der übrigen Punkte aus freier Hand gibt recht gute Darstellungen. Photographische Aufnahmen einer Gegend aus drei Punkten lassen das Ziel rascher erreichen (Nr. 93); doch wird man auch in diesem Falle von dem Skizzieren nicht ganz Umgang nehmen können; die Skizzen sind zur Deutung der Photogramme von großem Vorteil, da die photographische Aufnahme gegenüber dem Vorteil der großen Kürze der erforderlichen Zeit hinwider den Nachteil hat, daß infolge des raschen Arbeitens der Beobachter einen nur allzu flüchtigen Blick auf das aufgenommene Gebiet wirft und sich dann infolgedessen manche Details auf den verschiedenen Bildern, deren Deutung eine längere Betrachtung erheischt, nicht mit genügender Deutlichkeit und Schärfe einprägen. So werden mitunter Straßenbiegungen und Straßensteigungen auf einzelnen Photographien zu Verwechslungen Anlaß geben können; desgleichen treten Grenzlinien von Böschungen, durch welche dahinter gelegene Objekte verdeckt werden, oft nicht genügend scharf hervor, wenn auch durch Vermehrung der Standpunkte in vielen Fällen die Zweideutigkeit behoben werden kann. Bei ungünstiger Beleuchtung können in größerer Entfernung befindliche stehende Gewässer oder gleichmäßig von der Sonne beschienene Sandflächen auf den Photographien nahe denselben Eindruck hervorrufen.

In allen Fällen werden daher Skizzen aufgenommen werden müssen, wenn sie auch durch die Photogramme zum großen Teile ersetzt werden; doch werden sie keineswegs so ins Detail ausgearbeitet werden müssen.

Beim Entwerfen derselben wird man sofort die Verschiedenheit der Terrainformationen, der Kulturarten durch Anwendung farbiger Stifte (s. Nr. 90) zum Ausdrucke bringen. Bei einiger Übung wird es auch nicht schwer die Isohypsen nach dem bloßen Augenschein genähert einzuzeichnen.

Endlich ist nicht zu übersehen, daß die Karte nicht nur die Zeichnung des aufgenommenen Gebietes geben soll, sondern zur vollständigen Darstellung auch die Anführung der Namen der Ortschaften, Weiler, Bäche usw. gehört. Diese können in die ersten Skizzen, wenn dieselben auch nur rohe Näherungen sind, eingetragen und später in die aus den Photogrammen erhaltenen genaueren Pläne übertragen werden.

Ein besonderes Augenmerk ist dabei auch auf die richtige Feststellung der Namen zu legen. Da man meist einheimische Träger verwendet, so wird es nicht schwer, die Namen der Ortschaften oder andere wichtige Besonderheiten von diesen zu erfahren.

Macht man an einem Orte eine längere Rast, so werden daselbst astronomische Beobachtungen angestellt. Über die Aufstellung und Verwendung der Instrumente ist hier nichts weiter hinzuzufügen; nur muß noch eine Vorsichtsmaßregel hier besonders erwähnt werden: jedes Instrument, namentlich aber Libellen müssen sorgfältig durch einen Schirm vor der direkten Sonnenstrahlung geschützt werden. Wird die Sonne selbst beobachtet, so wird der Schirm nur während der kurzen Zeit der Einstellung entfernt, während die notwendigen Ablesungen bereits im Schatten vorzunehmen sind.

Soll die Beobachtungszeit notiert werden, so wird die Uhr neben das Instrument gelegt, in dem Momente der Beobachtung (Fadenantritt, Ränderberührung usw.) mit „Null“ zu zählen begonnen, dann nach dem Schlage des Chronometers 1, 2, 3 . . . bis zur nächsten Minute weitergezählt und die Zahl der Schläge, in Sekunden verwandelt, abgezogen. Wurden z. B. an einem Halbsekundenchronometer 25 Schläge nach der Beobachtung bis $17^h\ 33^m$ weitergezählt, so war die Beobachtung um $17^h\ 33^m - (25 \times 0{\cdot}5)^s = 17^h\ 32^m\ 47{\cdot}5^s$ gemacht. Diese Reduktion wird aber nicht während der Beobachtung vorgenommen, sondern es wird in der Kolonne Uhrzeit (s. d. folgenden Schemata) notiert:

$$17^h\ 33^m - 25\ S.$$

Überhaupt werden bei oder während der Beobachtung nie Reduktionen oder Korrektionen angebracht; man hat stets die unmittelbar abgelesenen Zahlen zu notieren (vgl. S. 139 für die Aneroide) und erst später bei der Reduktion auf alle Korrektionen Rücksicht zu nehmen.

Von großer Wichtigkeit ist bei den astronomischen Beobachtungen die richtige Anordnung derselben. Für Polhöhenbestimmungen müssen Zenitdistanzen nahe dem Meridian genommen werden, weil sich daselbst die Höhe der Sterne am langsamsten ändert; Zeitbestimmungen hingegen werden möglichst sicher, wenn man die Zenitdistanzen möglichst weit weg vom Meridian beobachtet (vgl. Nr. 131). Man kann daher gleichzeitig beide Elemente erhalten, wenn man *a*) Zenitdistanzen eines Sternes (oder der Sonne) erst 2 bis $2^1/_2$ Stunden vor ihrer Kulmination mißt — zu welchem Zwecke

man 5 oder 10 Einstellungen mit dem Theodoliten oder Sextanten macht — dann wartet und die Zwischenzeit zu anderweitigen Beobachtungen benutzt, bis *b*) zur Zeit der größten Höhe wieder eine Reihe von Einstellungen vorgenommen werden.* Die Gruppe *b*), d. i. die Zirkum-Meridian-Zenitdistanzen, dienen zur Bestimmung der Polhöhe, die Gruppe *a*) zur Bestimmung der Zeit und daher in Verbindung mit der Uhrzeit des Ausgangsmeridians zur Bestimmung der Länge.

Die Zirkum-Meridian-Zenitdistanzen wird man zweckmäßig möglichst gleichmäßig vor und nach der Kulmination nehmen: etwa 5 vorher, 5 nachher. Läßt man inzwischen 10 bis 15^m Pause, so kann man inzwischen für die Bestimmung des Azimutes des Gestirnes 5 Einstellungen am Vertikalfaden mit Lesungen am Horizontalkreise (Nr. 132) und Notierung der Uhrzeiten vornehmen. Mit den aus den Beobachtungen der *a*)-Gruppe sich ergebenden Uhrkorrektionen folgt dann das Azimut des Gestirnes, welches in Verbindung mit einer Reihe von Einstellungen auf ein terrestrisches Objekt das Azimut dieses letzteren gibt. Beobachtet man gleichzeitig die Stellung der Magnetnadel, so ergibt sich daraus die Mißweisung derselben an dem Beobachtungsorte.

Für die Anordnung der Beobachtungen kann man sich der folgenden Schemata bedienen.

Schema I.

Messung von Zenitdistanzen.

Datum.....

Standpunkt..... Instrument..... Uhr.....

Aufstellungsart: (ob zentrisch; eventuell Zentrierungselemente)

Kreislage	Uhrzeit	Index	Mikroskop**		Libelle		Bemerkungen
			I	II	außen	innen	
							Äußere Umstände der Luft; Bilder Barometer äußeres und inneres Thermometer

Die meteorologischen Instrumente werden stets zweimal gelesen, und zwar vor Beginn und nach Schluß der Beobachtungen; bei längeren Beobachtungsreihen noch ein drittes Mal in der Zwischenzeit.

Für Messungen mit dem Prismenkreis oder Sextanten wird man dasselbe Schema verwenden; bei Beobachtungen der Sonne wird man in die erste Kolonne (statt der Kreislage) den Sonnenrand (oberer oder unterer) eintragen können; in die Kolonne Libelle kommen, falls man einen künst-

* Natürlich kann auch erst zur Zeit der Kulmination und dann 2 bis $2^1/_2$ Stunden nach derselben beobachtet werden. Auch können Zenitdistanzen eines Sternes nahe dem Meridian und unmittelbar vorher oder nachher Zenitdistanzen eines anderen Sternes in größerem Stundenwinkel beobachtet werden.

** oder Nonius.

lichen Horizont benutzt, die Bestimmungen der Neigungen des letzteren, und zwar ebenfalls „außen", d. h. gegen die Sonne zu, und „innen", gegen den Beobachter zu.

Schema II.

Durchgangsbeobachtungen.*

Datum: *1904, April 28.*

Standpunkt ..... Instrument ..... Uhr .....

Faden	Sternname		α *Virginis*	α *Bootis*		Bemerkungen
			h m s			
I			*11 38 40·5*			
II			*39 48·5*			
III	Uhrzeiten des Durchganges		*40 56*	$12^h 32^m 6^s$		Lesungen der Achsenlibelle
IV			*42 4·5*			
V			*43 12*			
Mittel			*11 40 56·3*	*12 32 6*		
		Raum für spätere Reduktionen				
α			*13 20 10·3*	*14 11 18*		
$\lambda - x$			*− 1 39 14·0*	*− 1 39 12*		
x			*− 5 30*	*− 5 30*		
λ			*− 1 44 44·0*	*− 1 44 42*		

Schema III.

Azimutbestimmungen.

Datum .....

Standpunkt ..... Instrument ..... Uhr .....

Aufstellungsart .....

Kreislage	Objekt	Uhrzeit	Index	Mikroskop I	Mikroskop II	Libelle links	Libelle rechts	Bemerkungen

Da man sich auf den Gang der Uhr nicht mit absoluter Sicherheit verlassen kann, so wird man von Zeit zu Zeit Längenbestimmungen durch Beobachtungen von Mondkulminationen vornehmen. Diese Durchgänge des

* Die in Kursiv eingesetzten Daten stellen ein in das Schema eingetragenes Beispiel dar.

Mondes durch den Meridian werden ebenfalls in das Schema II eingetragen. Sei beispielsweise am selben Tage beobachtet: *

	Mond I. Rand **	*Mond II. Rand*
Faden I	—	—
II	*11h 51m 42·5s*	—
III	*52 50·5*	*11h 55m 0·5s*
IV	*53 5·9*	*56 8*
V	—	—
Reduktion auf den	*11 52 50·7*	*11 55 0·5*
Mondmittelpunkt	+ *1 4·8*	— *1 4·8*
	11 53 55·5	*11 53 55·7*

Auch die mit dem Sextanten zu messenden Monddistanzen, d. h. Distanzen des Mondes von hellen Sternen können zur Verifikation des Uhrstandes und zur genaueren Bestimmung der Länge dienen. Zu diesem Zwecke braucht man aber die Höhe der Gestirne; diese werden daher für beide Gestirne kurz vor der Distanzmessung und unmittelbar nach derselben gemessen und aus den beobachteten Werten die Höhe zur Zeit der Distanzmessung interpoliert. Das Schema hierfür wäre

Schema IV.

Monddistanzen.

Datum .....

Standpunkt ..... Instrument ..... Uhr .....

Stern .....

Uhrzeit	Höhe des Sternes	Höhe des Mondes	Gemessene Distanz	Bemerkungen
10h 55m	*a*	—	—	
10 57	*b*	—	—	
11 4	—	*a'*	—	
11 6	—	*b'*	—	
11 10	. .	—	Δ_1	
11 12	.	—	Δ_2	
11 15	—	*c'*	—	
11 17	—	*d'*	—	
11 20	*c*	—	—	
11 22	*d*	—	—	

* Diese Beobachtungen fallen zwischen die Beobachtungen von α Virginis und α Bootis in Schema II und haben dort ihren Platz zu finden.

** Im allgemeinen wird nur ein Mondrand zu beobachten sein, und zwar vor dem

Aus den Beobachtungen der Sternhöhen a, b, c, d erhält man durch Interpolation die Höhe des Sternes zur Zeit $11^h\,11^m$; desgleichen aus den Mondhöhen a', b', c', d' die dieser Zeit entsprechende Mondhöhe. Aus diesen scheinbaren Höhen folgen die wahren Höhen durch Anbringung von Refraktion für den Stern und von Refraktion, Parallaxe und Halbmesser für den Mond und mit diesen die wahre Distanz des Mondes vom Sterne, zu welcher die zugehörige Greenwicher Zeit gesucht wird. Diese gibt durch Vergleichung mit der Uhrzeit den Stand der Uhr gegen Greenwicher Zeit oder durch Vergleichung mit der aus den Zeitbestimmungen gefolgerten Ortszeit sofort die Länge von Greenwich.

C. Die Reduktionen.

Die Reduktion der Beobachtungen wird erst später definitiv vorgenommen; doch ist es im Interesse des Forschungsreisenden gelegen, wenigstens genähert jederzeit die geographische Lage seines Beobachtungsortes zu kennen um eine Verifikation seiner Skizzen vornehmen zu können, oftmals auch um seine weiteren Dispositionen hiernach zu treffen.

Derartige vorläufige Reduktionen* können ohne große Schwierigkeit vorgenommen werden, wobei auf die Libellenlesungen in erster Näherung nicht Rücksicht genommen zu werden braucht.

I. Die Polhöhenbestimmungen aus Zirkum-Meridian-Zenitdistanzen. Hat man genügend nahe dem Meridian beobachtet, was sich durch die geringen Änderungen in den aufeinanderfolgenden beobachteten Zenitdistanzen kundgibt, so kann man leicht das Minimum der Zenitdistanz (das Maximum der Höhe) erschließen. Gegen grobe Fehler ist man durch das regelmäßige Anwachsen beziehungsweise Abnehmen der Zenitdistanzen gesichert. Wären z. B. die Zenitdistanzen in nahe gleichen Zeitintervallen (die Uhrzeit ist nicht angesetzt, muß aber für die wirkliche Beobachtung angegeben werden):

Uhrzeit	Zenitdistanz
. . . . .	45° 29′ 4″
. . . . .	27 56
. . . . .	26 35
. . . . .	25 20
	Pause von etwa 10 Minuten
. . . . .	45° 25′ 35″
. . . . .	27 4
. . . . .	28 44
. . . . .	31 15

Vollmonde der erste Rand, nach dem Vollmonde der zweite Rand; zur Durchgangszeit des ersten Randes ist $\frac{1}{15} r \sec\delta$ zu addieren, von der Durchgangszeit des zweiten Randes $\frac{1}{15} r \sec\delta$ zu subtrahieren, wenn r der Mondhalbmesser ist. Im vorliegenden Falle ist $r = 16'\,6''$ und die (fingierten) Beobachtungen beider Ränder wegen des Vollmondes möglich; ein Rand wird allerdings unscharf sein.

* Hier handelt es sich nur um eine rasche vorläufige Reduktion auf der Reise selbst; die Resultate können dabei noch um merkliche Beträge fehlerhaft sein, die aber für die weiteren Dispositionen des Reisenden belanglos sind.

so wird man als erste rohe Näherung für die Meridianzenitdistanz

$$\zeta = 45° 25{\cdot}4'$$

annehmen können und dann ist

$\varphi = \delta - \zeta$, wenn der Stern zwischen Pol und Zenit kulminiert und
$\varphi = \delta + \zeta$, wenn das Zenit zwischen dem Pol und dem Kulminationspunkt des Sternes liegt.

Ein Beobachter auf der südlichen Halbkugel wird dabei, um die Formeln zu vereinfachen, südliche Deklinationen und südliche Breiten positiv nehmen. Waren die oben angeführten Beobachtungen z. B. Zenitdistanzen des Sternes erster Größe α Crucis, dessen südliche Deklination 62° 34·0′ ist, und zwar südlich vom Zenit, d. h. so daß der Kulminationspunkt des Sternes zwischen dem Zenite und dem Pole (hier der Südpol) liegt,* so ergibt sich

$$\varphi = 62° 34{\cdot}0' - 45° 25{\cdot}4 = 17° 8{\cdot}6'$$

südlich.

II. Die Zeitbestimmungen aus gemessenen Zenitdistanzen. Da hierfür die Zenitdistanzen möglichst weit weg vom Meridian beobachtet werden, so werden dieselben nahe proportional der Zeit wachsen. Man wird daher für die vorläufige Reduktion das Mittel der Uhrzeiten und das Mittel der Zenitdistanzen nehmen und dann nach der Formel

$$s = \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta + z)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin(s-\varphi)\sin(s-\delta)}{\cos s \cos(s-z)}}$$

den Stundenwinkel des Sternes rechnen. Ist die Rektaszension des Sternes α, so ist

$$\theta = t + \alpha$$

die Sternzeit der Beobachtung am Beobachtungsorte und war das Mittel der Uhrzeiten u, also $u + x$ die zugehörige Greenwicher Zeit, wenn x der Stand der Uhr gegen Greenwicher Zeit ist, so wird

$$\lambda = u + x - \theta$$

die geographische Länge (positiv westlich, negativ östlich).

Wäre an dem oben angenommenen Orte das Mittel der Uhrzeiten (für die Beobachtungen außerhalb des Meridians) an einer nach Sternzeit gehenden Uhr, deren Stand gegen Greenwicher Sternzeit $x = -5^m 30^s$ ist,**

$$u = 13^h 1^m 36^s$$

---

* Ein Zweifel, ob man sich auf der nördlichen oder südlichen Halbkugel befindet, kann nie entstehen, da man selbst in der unmittelbarsten Nähe des Äquators den sichtbaren Pol stets an seinen Konfigurationen und aus der Bewegungsrichtung der Sterne erkennen wird.

** Dieser Stand wird bekannt, wenn man den Gang der Uhr kennt. Sei der Stand der Uhr z. B. 10 Tage nach dem Verlassen der letzten Beobachtungsstation benötigt; war derselbe bei der letzten Beobachtung $-5^m 5^s$ gefunden worden und durch fortgesetzte Beobachtungen ein tägliches Voreilen um $2{\cdot}5^s$ ermittelt, so wird nach 10 Tagen die Voreilung 25^s, daher der Stand $-5^m 30^s$ sein (der Stand in dem Sinne, daß: „wirkliche Zeit" = Uhrzeit + Stand ist).

das Mittel der Zenitdistanzen *

$$z = 51° 29{\cdot}4',$$

so wird die Rechnung mit dem oben gefundenen Wert der Polhöhe

$\varphi =$ 17° 8·6′	$\log \sin (s-\varphi) =$ 9·87416	$\frac{1}{2}t =$	17° 27·2′
$\delta =$ 62 34·0	$\log \sin (s-\delta) =$ 8·72359	$=$	1h 9m 48·8
$z =$ 51 29·4	$\log \cos s =$ 9·61606	$t =$	2 19 38
$2s = \varphi + \delta + z =$ 131° 12·0′	$\log \cos (s-z) =$ 9·98669	$\alpha =$	12 21 15
$s =$ 65 36·0	log Zähler = 8·59775	$\theta =$	14 40 53
$s - z =$ 14 6·6	log Nenner = 9·60275	$u + x =$	12 56 6
$s - \varphi =$ 48 27·4	$\log \text{tang} \frac{1}{2}t^2 =$ 8·99500	$\lambda =$	− 1h 44m 47s
$s - \delta =$ 3 2·0	$\log \text{tang} \frac{1}{2}t =$ 9·49750		

III. Die Zeitbestimmungen durch Meridiandurchgänge der Sterne werden nur ausführbar, wenn bereits die Richtung des Meridians sehr nahe richtig bestimmt ist und das Instrument in dieser Richtung aufgestellt wurde. Für diesen Fall wird es ausreichend sein, einen oder zwei Sterne, welche an allen Fäden beobachtet sind, etwa für einen andern Stern die Beobachtung des Mittelfadens mit der Rektaszension zu vergleichen. Da nämlich die Sternzeit des Meridiandurchganges gleich der Rektaszension des Sternes ist, so wird (vgl. das Beispiel in Schema II, S. 388) z. B. für den Stern α Virginis die Ortssternzeit der Beobachtung $13^h\ 20^m\ 10{\cdot}3^s$; hingegen gibt die Uhr die zugehörige Greenwicher Zeit aus dem Mittel der sämtlichen Fadenantritte $u = 11^h\ 40^m\ 56{\cdot}3^s$, daher mit dem angegebenen Uhrstande x die Greenwicher Zeit $11^h\ 35^m\ 26{\cdot}3^s$, also um $1^h\ 44^m\ 44^s$ kleiner; der Ort ist daher um $-1^h\ 44^m\ 44^s = 26° 11'$ östlich von Greenwich.

IV. Die Längenbestimmung aus einer beobachteten Mondkulmination erfordert die Vergleichung seiner Durchgangszeit mit der aus den Ephemeriden zu entnehmenden Rektaszension. Hierzu ist aber bereits die Kenntnis der Länge erforderlich; meist wird ein genäherter Wert bekannt sein. Im vorliegenden Falle $1^h\ 44^m\ 44^s$, wobei ein Fehler des Uhrstandes entstanden sein kann, wenn derselbe nur mittels des früher abgeleiteten Uhrganges extrapoliert wurde.

Man hat jetzt:

Durchgangszeit des Mondes	11h	53m	55·6s
Uhrstand $x =$	−	5	30
Greenwicher Sternzeit	11	48	25·6
Genäherte Längendifferenz	1	44	44
daher Ortssternzeit des Monddurchganges	13h	33m	9·6s

gleich der Rektaszension des Mondes. Aus den Ephemeriden entnimmt man, daß die Rektaszension des Mondes **

1904 April 28, 9^h Mittl. Zeit Greenwich $13^h\ 32^m\ 17{\cdot}5^s$

* Da man auf die Reduktion des Mittels der Uhrzeiten auf das Mittel der Zenitdistanzen bei dieser vorläufigen Reduktion nicht Rücksicht zu nehmen braucht, so genügt eine Rechnung auf Zehntelminuten, also mit 5 Dezimalen vollkommen.

** Die Reihenfolge der Beobachtungen an dieser Station war daher die folgende: Meridianzenitdistanzen von α Crucis für Polhöhenbestimmungen; Höhenbestimmungen

war, mit einer Änderung von $2{\cdot}308^s$ pro Minute. Die Rektaszension zur Zeit der Beobachtung war aber um $52{\cdot}1^s$ größer, welcher Zuwachs in

$$52{\cdot}1 : 2{\cdot}308 = 22^m\ 34{\cdot}4^s$$

stattfindet, so daß der Mond die angegebene Rektaszension um $9^h\ 22^m\ 34{\cdot}4^s$ Mittl. Greenwicher Zeit hatte. Diese Mittlere Zeit in Sternzeit verwandelt, gibt

Mittlere Zeit	9^h	22^m	$34{\cdot}4^s$
Reduktion auf Sternzeit		$+\ 1$	$32{\cdot}4$
Sternzeit im Mittl. Mittage	2	24	$6{\cdot}6$
Daher Greenwicher Sternzeit im Momente der Beobachtung	11	48	$13{\cdot}4$
Ortssternzeit der Beobachtung	13	33	$9{\cdot}6$
demnach Längendifferenz	1	44	$56{\cdot}2$

Der Unterschied von $12{\cdot}2^s$ rührt von dem unrichtigen Uhrstande her; in der Tat erhält man jetzt übereinstimmende Resultate, wenn man

$$x = -\ 5^m\ 42{\cdot}2^s$$

annimmt, mit welchem Uhrstande von da ab alle weiteren Beobachtungen zu reduzieren sind.

Von astronomischen Beobachtungen anderer Art wird man jede auffällige Erscheinung notieren. Werden Meteore gesehen, so wird man den Radiationspunkt, d. h. den Punkt, von welchem sie herzukommen scheinen, sodann den Weg, den sie am Himmel verfolgen, in eine Sternkarte eintragen. Diese mit einer entsprechenden Nummer versehene Beobachtung (z. B. Meteor Nr. 1, 2 . . . oder auch, wenn auffallende Beobachtungen verschiedener Art fortlaufend numeriert werden, z. B. Beobachtung Nr. 27, Meteor usw.) wird ebenfalls im Manuale notiert und daselbst auch Bemerkungen über Größe, Form, Farbe usw. angegeben.

Ebenso sind Angaben über das Zodiakallicht wichtig. Besonders auffallend tritt dasselbe auf der nördlichen Halbkugel im Februar und März des Abends am Westhimmel und im Oktober des Morgens am Osthimmel auf; auf der südlichen Hemisphäre umgekehrt des Abends im Oktober, des Morgens im Februar. In niedrigen Breiten (nahe am Äquator) ist es jederzeit gut sichtbar, da die Ekliptik (der Tierkreis), längs welcher es als ein weißlicher Lichtschimmer sich erstreckt hier nahe senkrecht zum Horizonte steht.

Die meteorologischen Beobachtungen schließen sich unmittelbar an die astronomischen an. Thermometer und Barometer müssen ohnedies zu jeder vollständigen Messung von Zenitdistanzen gelesen werden und werden auch zur Höhenbestimmung auf dem Marsche wiederholt notiert. Vollständig sind

---

und Distanzmessungen des Mondes von einem Sterne; Meridiandurchgänge für die Längenbestimmung von α Virginis, Mond, α Bootis; Zenitdistanzmessungen für die Zeit- und Längenbestimmung von α Crucis.

Die Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen desselben Sternes für die Zeit- und Polhöhenbestimmung wird immer etwa 2 Stunden betragen und inzwischen können stets Beobachtungen anderer Art vorgenommen werden. Die Anordnung derselben wird aber natürlich von Fall zu Fall verschieden sein können.

diese Beobachtungen natürlich nicht, denn der Barometerstand ist von zwei Faktoren abhängig: von der Änderung des Ortes und von der Änderung des Luftdruckes an demselben Orte. Der Natur der Sache nach können diese beiden Einflüsse bei Reisen nicht getrennt werden und erhält man daher stets nur relativ verläßliche Resultate. Selbst auffällig starke Barometerdepressionen können sich im Resultate verwischen, da sie beim Wechsel des Standpunktes ebensowohl infolge von Luftdruckänderungen als auch starker Erhebung auftreten können, worüber der Reisende ja außer dem Barometer selbst keine Anhaltspunkte hat. Es ergibt sich daraus die Wichtigkeit der Schleifen und der wiederholten Begehung derselben Route, wodurch Barometerschwankungen lokaler Natur wenigstens teilweise erkannt werden können. Ferner ist es wichtig, regelmäßige Barometer- und Thermometerlesungen (zu bestimmten Tageszeiten) vorzunehmen, namentlich dann, wenn man sich nicht allzuferne von festen Stationen (z. B. Küstenstationen) befindet, damit dieselben mit den entsprechenden Lesungen an diesen verglichen werden können.

Auffallende Erscheinungen anderer Art, Windrichtung und Stärke, Stürme usw., wennn dieselben auch an sich nur sporadische Beobachtungen geben, können durch Vergleichung mit den an anderen festen Stationen gemachten Beobachtungen wertvolle Aufschlüsse über die meteorologischen Verhältnisse zu derselben Zeit geben und bei längerem Aufenthalte in derselben Gegend (wenn auch nicht am selben Orte) immerhin einige Kenntnisse über die klimatischen Verhältnisse der Gegend vermitteln.

HILFSTAFELN.

Tafel I.

Länge der Kreisbogen für Grade, Minuten und Sekunden für den Halbmesser 1.

Erklärung.

Für den Halbmesser r ist der Kreisumfang $u = 2\pi r$; daher die Bogenlänge für den Winkel α°:

$$l = \frac{2\pi}{360}\,\alpha \,.\, r$$

und für $r = 1$:

$$l = \frac{2\pi}{360}\,\alpha.$$

Die Bogenlänge für den Winkel von 1° ist

$$l = \frac{2\pi}{360} = \frac{2 \times 3{\cdot}14159265}{360} = 0{\cdot}01745,$$

d. h. für $r = 1\,m$ ist arc $1^\circ = 0{\cdot}017\,m$; für $r = 1\,dm$ ist arc $1^\circ = 0{\cdot}017\,dm$ usw. Genauer ist:

$$\begin{aligned} \text{arc } 1^\circ &= 0{\cdot}017453292 \\ \text{arc } 1' &= 0{\cdot}0002908882 \\ \text{arc } 1'' &= 0{\cdot}000004848137 \end{aligned}$$

Die Tafel gibt die Bogenlängen für die einzelnen Grade, Minuten und Sekunden.

Beispiel: Wie groß ist die Bogenlänge eines Kreisbogens, der zum Zentriwinkel $27^\circ\ 36'\ 34{\cdot}6''$ gehört, wenn der Kreisradius $25{\cdot}62\ cm$ ist?

$$\begin{aligned} \text{arc } 27^\circ &= 0{\cdot}4712389 \\ \text{arc } 36' &= 0{\cdot}0104720 \\ \text{arc } 34'' &= 0{\cdot}0001648 \\ \text{arc } 0{\cdot}6'' &= 0{\cdot}0000029 \text{ (der zehnte Teil von arc } 6''). \\ \text{arc } 27^\circ\ 36'\ 34{\cdot}6'' &= 0{\cdot}4818786\ cm \text{ für } r = 1\ cm, \text{ daher} \\ \log \text{arc } 27^\circ\ 36'\ 34{\cdot}6'' &= 9{\cdot}682938 \\ \log r &= 1{\cdot}408579 \\ \log l &= 1{\cdot}091517 \end{aligned}$$

$$l = 12{\cdot}346\ cm.$$

Tafel I. Länge der Kreisbogen für den Halbmesser 1.

0°	0·000 0000	45°	0·785 3982	90°	1·570 7963	135°	2·356 1945
1	0·017 4533	46	0·802 8515	91	1·588 2496	136	2·373 6478
2	0·034 9066	47	0·820 3047	92	1·605 7029	137	2·391 1011
3	0·052 3599	48	0·837 7580	93	1·623 1562	138	2·408 5544
4	0·069 8132	49	0·855 2113	94	1·640 6095	139	2·426 0077
5	0·087 2665	50	0·872 6646	95	1·658 0628	140	2·443 4610
6	0·104 7198	51	0·890 1179	96	1·675 5161	141	2·460 9142
7	0·122 1730	52	0·907 5712	97	1·692 9694	142	2·478 3675
8	0·139 6263	53	0·925 0245	98	1·710 4227	143	2·495 8208
9	0·157 0796	54	0·942 4778	99	1·727 8760	144	2·513 2741
10	0·174 5329	55	0·959 9311	100	1·745 3293	145	2·530 7274
11	0·191 9862	56	0·977 3844	101	1·762 7825	146	2·548 1807
12	0·209 4395	57	0·994 8377	102	1·780 2358	147	2·565 6340
13	0·226 8928	58	1·012 2910	103	1·797 6891	148	2·583 0873
14	0·244 3461	59	1·029 7443	104	1·815 1424	149	2·600 5406
15	0·261 7994	60	1·047 1976	105	1·832 5957	150	2·617 9939
16	0·279 2527	61	1·064 6508	106	1·850 0490	151	2·635 4472
17	0·296 7060	62	1·082 1041	107	1·867 5023	152	2·652 9005
18	0·314 1593	63	1·099 5574	108	1·884 9556	153	2·670 3538
19	0·331 6126	64	1·117 0107	109	1·902 4089	154	2·687 8070
20	0·349 0659	65	1·134 4640	110	1·919 8622	155	2·705 2603
21	0·366 5191	66	1·151 9173	111	1·937 3155	156	2·722 7136
22	0·383 9724	67	1·169 3706	112	1·954 7688	157	2·740 1669
23	0·401 4257	68	1·186 8239	113	1·972 2221	158	2·757 6202
24	0·418 8790	69	1·204 2772	114	1·989 6753	159	2·775 0735
25	0·436 3323	70	1·221 7305	115	2·007 1286	160	2·792 5268
26	0·453 7856	71	1·239 1838	116	2·024 5819	161	2·809 9801
27	0·471 2389	72	1·256 6371	117	2·042 0352	162	2·827 4334
28	0·488 6922	73	1·274 0904	118	2·059 4885	163	2·844 8867
29	0·506 1455	74	1·291 5436	119	2·076 9418	164	2·862 3400
30	0·523 5988	75	1·308 9969	120	2·094 3951	165	2·879 7933
31	0·541 0521	76	1·326 4502	121	2·111 8484	166	2·897 2466
32	0·558 5054	77	1·343 9035	122	2·129 3017	167	2·914 6999
33	0·575 9587	78	1·361 3568	123	2·146 7550	168	2·932 1531
34	0·593 4119	79	1·378 8101	124	2·164 2083	169	2·949 6064
35	0·610 8652	80	1·396 2634	125	2·181 6616	170	2·967 0597
36	0·628 3185	81	1·413 7167	126	2·199 1149	171	2·984 5130
37	0·645 7718	82	1·431 1700	127	2·216 5682	172	3·001 9663
38	0·663 2251	83	1·448 6233	128	2·234 0214	173	3·019 4196
39	0·680 6784	84	1·466 0766	129	2·251 4747	174	3·036 8729
40	0·698 1317	85	1·483 5299	130	2·268 9280	175	3·054 3262
41	0·715 5850	86	1·500 9832	131	2·286 3813	176	3·071 7795
42	0·733 0383	87	1·518 4364	132	2·303 8346	177	3·089 2328
43	0·750 4916	88	1·535 8897	133	2·321 2879	178	3·106 6861
44	0·767 9449	89	1·553 3430	134	2·338 7412	179	3·124 1394
45	0·785 3982	90	1·570 7963	135	2·356 1945	180	3·141 5927

Tafel I. Länge der Kreisbogen für den Halbmesser 1.

0′	0·000 0000	30′	0·008 7266	0″	0·000 0000	30″	0·000 1454
1	0·000 2909	31	0·009 0175	1	0·000 0048	31	0·000 1503
2	0·000 5818	32	0·009 3084	2	0·000 0097	32	0·000 1551
3	0·000 8727	33	0·009 5993	3	0·000 0145	33	0·000 1600
4	0·001 1636	34	0·009 8902	4	0·000 0194	34	0·000 1648
5	0·001 4544	35	0·010 1811	5	0·000 0242	35	0·000 1697
6	0·001 7453	36	0·010 4720	6	0·000 0291	36	0·000 1745
7	0·002 0362	37	0·010 7629	7	0·000 0339	37	0·000 1794
8	0·002 3271	38	0·011 0538	8	0·000 0388	38	0·000 1842
9	0·002 6180	39	0·011 3446	9	0·000 0436	39	0·000 1891
10	0·002 9089	40	0·011 6355	10	0·000 0485	40	0·000 1939
11	0·003 1998	41	0·011 9264	11	0·000 0533	41	0·000 1988
12	0·003 4907	42	0·012 2173	12	0·000 0582	42	0·000 2036
13	0·003 7815	43	0·012 5082	13	0·000 0630	43	0·000 2085
14	0·004 0724	44	0·012 7991	14	0·000 0679	44	0·000 2133
15	0·004 3633	45	0·013 0900	15	0·000 0727	45	0·000 2182
16	0·004 6542	46	0·013 3809	16	0·000 0776	46	0·000 2230
17	0·004 9451	47	0·013 6717	17	0·000 0824	47	0·000 2279
18	0·005 2360	48	0·013 9626	18	0·000 0873	48	0·000 2327
19	0·005 5269	49	0·014 2535	19	0·000 0921	49	0·000 2376
20	0·005 8178	50	0·014 5444	20	0·000 0970	50	0·000 2424
21	0·006 1087	51	0·014 8353	21	0·000 1018	51	0·000 2473
22	0·006 3995	52	0·015 1262	22	0·000 1067	52	0·000 2521
23	0·006 6904	53	0·015 4171	23	0·000 1115	53	0·000 2570
24	0·006 9813	54	0·015 7080	24	0·000 1164	54	0·000 2618
25	0·007 2722	55	0·015 9989	25	0·000 1212	55	0·000 2666
26	0·007 5631	56	0·016 2897	26	0·000 1261	56	0·000 2715
27	0·007 8540	57	0·016 5806	27	0·000 1309	57	0·000 2763
28	0·008 1449	58	0·016 8715	28	0·000 1357	58	0·000 2812
29	0·008 4358	59	0·017 1624	29	0·000 1406	59	0·000 2860
30	0·008 7266	60	0·017 4533	30	0·000 1454	60	0·000 2909

Tafel II.

Sehnentafel.

Erklärung Seite 150.

Beispiel. Zur Übertragung eines Winkels von 56° 32′ entnimmt man der Tafel

$$\text{chord } 56° 32' = 0{\cdot}9471 \text{ für den Halbmesser } 1;$$

beschreibt man daher einen Kreisbogen mit dem Halbmesser 10 *cm*, so wird die zugehörige Sehne 9·47 *cm*, welche die Lage des zweiten Winkelschenkels bestimmt.

Tafel II. Sehnentafel.

0° 0′	0·0000	6° 0′	0·1047	12° 0′	0·2091	18° 0′	0·3129	24° 0′	0·4158
10	0·0029	10	0·1076	10	0·2119	10	0·3157	10	0·4187
20	0·0058	20	0·1105	20	0·2148	20	0·3186	20	0·4215
30	0·0087	30	0·1134	30	0·2177	30	0·3215	30	0·4244
40	0·0116	40	0·1163	40	0·2206	40	0·3244	40	0·4272
50	0·0145	50	0·1192	50	0·2235	50	0·3272	50	0·4300
1 0	0·0175	7 0	0·1221	13 0	0·2264	19 0	0·3301	25 0	0·4329
10	0·0204	10	0·1250	10	0·2293	10	0·3330	10	0·4357
20	0·0233	20	0·1279	20	0·2322	20	0·3358	20	0·4386
30	0·0262	30	0·1308	30	0·2351	30	0·3387	30	0·4414
40	0·0291	40	0·1337	40	0·2380	40	0·3416	40	0·4442
50	0·0320	50	0·1366	50	0·2409	50	0·3444	50	0·4471
2 0	0·0349	8 0	0·1395	14 0	0·2437	20 0	0·3473	26 0	0·4499
10	0·0378	10	0·1424	10	0·2466	10	0·3502	10	0·4527
20	0·0407	20	0·1453	20	0·2495	20	0·3530	20	0·4556
30	0·0436	30	0·1482	30	0·2524	30	0·3559	30	0·4584
40	0·0465	40	0·1511	40	0·2553	40	0·3587	40	0·4612
50	0·0494	50	0·1540	50	0·2582	50	0·3616	50	0·4641
3 0	0·0524	9 0	0·1569	15 0	0·2611	21 0	0·3645	27 0	0·4669
10	0·0553	10	0·1598	10	0·2639	10	0·3673	10	0·4697
20	0·0582	20	0·1627	20	0·2668	20	0·3702	20	0·4725
30	0·0611	30	0·1656	30	0·2697	30	0·3730	30	0·4754
40	0·0640	40	0·1685	40	0·2726	40	0·3759	40	0·4782
50	0·0669	50	0·1714	50	0·2755	50	0·3788	50	0·4810
4 0	0·0698	10 0	0·1743	16 0	0·2783	22 0	0·3816	28 0	0·4838
10	0·0727	10	0·1772	10	0·2812	10	0·3845	10	0·4867
20	0·0756	20	0·1801	20	0·2841	20	0·3873	20	0·4895
30	0·0785	30	0·1830	30	0·2870	30	0·3902	30	0·4923
40	0·0814	40	0·1859	40	0·2899	40	0·3930	40	0·4951
50	0·0843	50	0·1888	50	0·2927	50	0·3959	50	0·4979
5 0	0·0872	11 0	0·1917	17 0	0·2956	23 0	0·3987	29 0	0·5008
10	0·0901	10	0·1946	10	0·2985	10	0·4016	10	0·5036
20	0·0931	20	0·1975	20	0·3014	20	0·4044	20	0·5064
30	0·0960	30	0·2004	30	0·3042	30	0·4073	30	0·5092
40	0·0989	40	0·2033	40	0·3071	40	0·4101	40	0·5120
50	0·1018	50	0·2062	50	0·3100	50	0·4130	50	0·5148
6° 0′	0·1047	12° 0′	0·2091	18° 0′	0·3129	24° 0′	0·4158	30° 0′	0·5176

Tafel II. Sehnentafel.

30°	0′	0·5176	36°	0′	0·6180	42°	0′	0·7167	48°	0′	0·8135	54°	0′	0·9080
	10	0·5204		10	0·6208		10	0·7195		10	0·8161		10	0·9106
	20	0·5233		20	0·6236		20	0·7222		20	0·8188		20	0·9132
	30	0·5261		30	0·6263		30	0·7249		30	0·8214		30	0·9157
	40	0·5289		40	0·6291		40	0·7276		40	0·8241		40	0·9183
	50	0·5317		50	0·6319		50	0·7303		50	0·8267		50	0·9209
31	0	0·5345	37	0	0·6346	43	0	0·7330	49	0	0·8294	55	0	0·9235
	10	0·5373		10	0·6374		10	0·7357		10	0·8320		10	0·9261
	20	0·5401		20	0·6401		20	0·7384		20	0·8347		20	0·9287
	30	0·5429		30	0·6429		30	0·7411		30	0·8373		30	0·9312
	40	0·5457		40	0·6456		40	0·7438		40	0·8400		40	0·9338
	50	0·5485		50	0·6484		50	0·7465		50	0·8426		50	0·9364
32	0	0·5513	38	0	0·6511	44	0	0·7492	50	0	0·8452	56	0	0·9389
	10	0·5541		10	0·6539		10	0·7519		10	0·8479		10	0·9415
	20	0·5569		20	0·6566		20	0·7546		20	0·8505		20	0·9441
	30	0·5597		30	0·6594		30	0·7573		30	0·8531		30	0·9466
	40	0·5625		40	0·6621		40	0·7600		40	0·8558		40	0·9492
	50	0·5652		50	0·6649		50	0·7627		50	0·8584		50	0·9518
33	0	0·5680	39	0	0·6676	45	0	0·7654	51	0	0·8610	57	0	0·9543
	10	0·5708		10	0·6704		10	0·7681		10	0·8636		10	0·9569
	20	0·5736		20	0·6731		20	0·7707		20	0·8663		20	0·9594
	30	0·5764		30	0·6758		30	0·7734		30	0·8689		30	0·9620
	40	0·5792		40	0·6786		40	0·7761		40	0·8715		40	0·9645
	50	0·5820		50	0·6813		50	0·7788		50	0·8741		50	0·9671
34	0	0·5847	40	0	0·6840	46	0	0·7815	52	0	0·8767	58	0	0·9696
	10	0·5875		10	0·6868		10	0·7841		10	0·8794		10	0·9722
	20	0·5903		20	0·6895		20	0·7868		20	0·8820		20	0·9747
	30	0·5931		30	0·6922		30	0·7895		30	0·8846		30	0·9772
	40	0·5959		40	0·6950		40	0·7922		40	0·8872		40	0·9798
	50	0·5986		50	0·6977		50	0·7948		50	0·8898		50	0·9823
35	0	0·6014	41	0	0·7004	47	0	0·7975	53	0	0·8924	59	0	0·9848
	10	0·6042		10	0·7031		10	0·8002		10	0·8950		10	0·9874
	20	0·6070		20	0·7059		20	0·8028		20	0·8976		20	0·9899
	30	0·6097		30	0·7086		30	0·8055		30	0·9002		30	0·9924
	40	0·6125		40	0·7113		40	0·8082		40	0·9028		40	0·9950
	50	0·6153		50	0·7140		50	0·8108		50	0·9054		50	0·9975
36°	0′	0·6180	42°	0′	0·7167	48°	0′	0·8135	54°	0′	0·9080	60°	0′	1·0000

Tafel II. Sehnentafel.

60°	0′	1·0000	66°	0′	1·0893	72°	0′	1·1756	78°	0′	1·2586	84°	0′	1·3383
	10	1·0025		10	1·0917		10	1·1779		10	1·2609		10	1·3404
	20	1·0050		20	1·0942		20	1·1803		20	1·2632		20	1·3426
	30	1·0075		30	1·0966		30	1·1826		30	1·2654		30	1·3447
	40	1·0101		40	1·0990		40	1·1850		40	1·2677		40	1·3469
	50	1·0126		50	1·1014		50	1·1873		50	1·2699		50	1·3490
61	0	1·0151	67	0	1·1039	73	0	1·1896	79	0	1·2722	85	0	1·3512
	10	1·0176		10	1·1063		10	1·1920		10	1·2744		10	1·3533
	20	1·0201		20	1·1087		20	1·1943		20	1·2766		20	1·3555
	30	1·0226		30	1·1111		30	1·1966		30	1·2789		30	1·3576
	40	1·0251		40	1·1136		40	1·1990		40	1·2811		40	1·3597
	50	1·0276		50	1·1160		50	1·2013		50	1·2833		50	1·3619
62	0	1·0301	68	0	1·1184	74	0	1·2036	80	0	1·2856	86	0	1·3640
	10	1·0326		10	1·1208		10	1·2060		10	1·2878		10	1·3661
	20	1·0351		20	1·1232		20	1·2083		20	1·2900		20	1·3682
	30	1·0375		30	1·1256		30	1·2106		30	1·2922		30	1·3704
	40	1·0400		40	1·1280		40	1·2129		40	1·2945		40	1·3725
	50	1·0425		50	1·1304		50	1·2152		50	1·2967		50	1·3746
63	0	1·0450	69	0	1·1328	75	0	1·2175	81	0	1·2989	87	0	1·3767
	10	1·0475		10	1·1352		10	1·2198		10	1·3011		10	1·3788
	20	1·0500		20	1·1376		20	1·2221		20	1·3033		20	1·3809
	30	1·0524		30	1·1400		30	1·2244		30	1·3055		30	1·3830
	40	1·0549		40	1·1424		40	1·2267		40	1·3077		40	1·3851
	50	1·0574		50	1·1448		50	1·2290		50	1·3099		50	1·3872
64	0	1·0598	70	0	1·1472	76	0	1·2313	82	0	1·3121	88	0	1·3893
	10	1·0623		10	1·1495		10	1·2336		10	1·3143		10	1·3914
	20	1·0648		20	1·1519		20	1·2359		20	1·3165		20	1·3935
	30	1·0672		30	1·1543		30	1·2382		30	1·3187		30	1·3956
	40	1·0697		40	1·1567		40	1·2405		40	1·3209		40	1·3977
	50	1·0721		50	1·1590		50	1·2428		50	1·3231		50	1·3997
65	0	1·0746	71	0	1·1614	77	0	1·2450	83	0	1·3252	89	0	1·4018
	10	1·0771		10	1·1638		10	1·2473		10	1·3274		10	1·4039
	20	1·0795		20	1·1661		20	1·2496		20	1·3296		20	1·4060
	30	1·0819		30	1·1685		30	1·2518		30	1·3318		30	1·4080
	40	1·0844		40	1·1709		40	1·2541		40	1·3339		40	1·4101
	50	1·0868		50	1·1732		50	1·2564		50	1·3361		50	1·4121
66°	0′	1·0893	72°	0′	1·1756	78°	0′	1·2586	84°	0′	1·3383	90°	0′	1·4142

Tafel III.

Spannkraft des Wasserdampfes für die Temperaturen 88·5° C bis 100·5° C (Siedepunktstafel).

Erklärung Seite 140.

Beispiel: An einem Siedethermometer wurde der Siedepunkt des Wassers 92·4° beobachtet; die zugehörige Spannkraft des Wasserdampfes ist 575·3 *mm* Quecksilberdruck; zeigt das Aneroid 577 *mm*, so ist die Standkorrektion — 1·7 *mm*; alle Angaben sind um diesen Betrag zu korrigieren.

Tafel III. Siedepunktstafel.

C°	mm		C°	mm		C°	mm		C°	mm	
88·5	496·2	1·9	91·5	556·2	2·1	94·5	622·1	2·3	97·5	694·4	2·5
88·6	498·1	1·9	91·6	558·3	2·1	94·6	624·4	2·3	97·6	696·9	2·6
88·7	500·0	1·9	91·7	560·4	2·1	94·7	626·7	2·3	97·7	699·5	2·5
88·8	501·9	2·0	91·8	562·5	2·1	94·8	629·0	2·3	97·8	702·0	2·6
88·9	503·9	1·9	91·9	564·6	2·1	94·9	631·3	2·4	97·9	704·6	2·5
89·0	505·8	1·9	92·0	566·7	2·1	95·0	633·7	2·3	98·0	707·1	2·6
89·1	507·7	2·0	92·1	568·8	2·2	95·1	636·0	2·3	98·1	709·7	2·6
89·2	509·7	1·9	92·2	571·0	2·1	95·2	638·3	2·4	98·2	712·3	2·6
89·3	511·6	2·0	92·3	573·1	2·2	95·3	640·7	2·4	98·3	714·9	2·5
89·4	513·6	2·0	92·4	575·3	2·1	95·4	643·1	2·3	98·4	717·4	2·6
89·5	515·6	1·9	92·5	577·4	2·2	95·5	645·4	2·4	98·5	720·0	2·7
89·6	517·5	2·0	92·6	579·6	2·2	95·6	647·8	2·4	98·6	722·7	2·6
89·7	519·5	2·0	92·7	581·8	2·2	95·7	650·2	2·4	98·7	725·3	2·6
89·8	521·5	2·0	92·8	584·0	2·1	95·8	652·6	2·4	98·8	727·9	2·6
89·9	523·5	2·0	92·9	586·1	2·2	95·9	655·0	2·4	98·9	730·5	2·7
90·0	525·5	2·0	93·0	588·3	2·2	96·0	657·4	2·4	99·0	733·2	2·6
90·1	527·5	2·0	93·1	590·5	2·2	96·1	659·8	2·4	99·1	735·8	2·7
90·2	529·5	2·0	93·2	592·7	2·3	96·2	662·2	2·5	99·2	738·5	2·6
90·3	531·5	2·0	93·3	595·0	2·2	96·3	664·7	2·4	99·3	741·1	2·7
90·4	533·5	2·0	93·4	597·2	2·2	96·4	667·1	2·4	99·4	743·8	2·7
90·5	535·5	2·1	93·5	599·4	2·2	96·5	669·5	2·5	99·5	746·5	2·7
90·6	537·6	2·0	93·6	601·6	2·3	96·6	672·0	2·5	99·6	749·2	2·7
90·7	539·6	2·1	93·7	603·9	2·2	96·7	674·5	2·4	99·7	751 9	2·7
90·8	541·7	2·0	93·8	606·1	2·3	96·8	676·9	2·5	99·8	754·6	2·7
90·9	543·7	2·1	93·9	608·4	2·2	96·9	679·4	2·5	99·9	757·3	2·7
91·0	545·8	2·0	94·0	610·6	2·3	97·0	681·9	2·5	100·0	760·0	2·7
91·1	547·8	2·1	94·1	612·9	2·3	97·1	684·4	2·5	100·1	762·7	2·8
91·2	549·9	2·1	94·2	615·2	2·3	97·2	686·9	2·5	100·2	765·5	2·7
91·3	552·0	2·1	94·3	617·5	2·3	97·3	689·4	2·5	100·3	768·2	2·8
91·4	554·1	2·1	94·4	619·8	2·3	97·4	691·9	2·5	100·4	771·0	2·7
91·5	556·2		94·5	622·1		97·5	694·4		100·5	773·7	

Tafel IV.

Hypsometrische Tafeln.

Erklärung.

Sind b_1, b_2 die Barometerstände, t_1, t_2 die Temperaturen der beiden Orte, deren Höhenunterschied ermittelt werden soll, und ist φ die geographische Breite, so ist

$$\Delta h = K(\log b_1 - \log b_2)\,[1 + \tfrac{1}{2}\alpha(t_1 + t_2)]\,(1 + \beta\cos 2\varphi)\left(1 + \frac{h_1 + h_2}{R}\right),$$

$$= K(\log b_1 - \log b_2)\left[1 + \tfrac{1}{2}\alpha(t_1 + t_2) + \beta\cos 2\varphi + \frac{h_1 + h_2}{R}\right].$$

wenn h_1 und h_2 die Seehöhen der beiden Orte sind.

Tafel IV *A* gibt

$$h = K(\log b_1 - \log b_2),$$

d. i. die genäherte Seehöhe eines Ortes mit der Konstanten $K = 18400$ und $b_0 = 760\ mm$. Sind die beiden genäherten Seehöhen bekannt, so erhält man die korrigierte Höhendifferenz aus

$$\Delta h = (h_2 - h_1)\,(1 + s_1 + s_2 + s_3)$$

$$s_1 = \tfrac{1}{2}\alpha(t_1 + t_2) = 0{\cdot}003665 \,.\, \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

$$s_2 = \beta\cos 2\varphi = 0{\cdot}00260\cos 2\varphi$$

$$s_3 = \frac{h_1 + h_2}{R} = \frac{h_1 + h_2}{6370000}.$$

Für Tafel IV *C* ist zu bemerken, daß für $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 45°$: s_2 positiv ist, für $\varphi = 45°$ bis $\varphi = 90°$ hingegen negativ.

Beispiel. Die Beobachtungen wären in der geographischen Breite $\varphi = 48°\,10'$: Station unten: $b_1 = 718{\cdot}5\ mm$, $t_1 = +15{\cdot}4°$; Station oben: $b_2 = 608{\cdot}6\ mm$, $t_2 = +8{\cdot}2°$; es folgt

aus Tafel IV *A*: $h_1 = 448{\cdot}7$, $h_2 = 1775{\cdot}2$; dann aus Tafel IV *B*: $s_1 = +0{\cdot}0432$; „ „ IV *C*: $s_2 = -0{\cdot}0003$; „ „ IV *D*: $s_3 = +0{\cdot}0002$;

$$1 + s_1 + s_2 + s_3 = 1{\cdot}0431,$$

daher $\Delta h = 1326{\cdot}5 \times 1{\cdot}0431 = 1383{\cdot}6\ m.$

Tafel IV. Hypsometrische Tafeln.

A

mm	*m*	*mm*	*m*	*mm*	*m*	*mm*	*m*	*mm*	*m*	*mm*	*m*
760	0·0	720	432·1	680	888·8	640	1373·3	600	1889·0	560	2440·3
759	10·5	719	443·2	679	900·6	639	1385·8	599	1902·3	559	2454·6
758	21·0	718	454·3	678	912·3	638	1398·3	598	1915·7	558	2468·9
757	31·6	717	465·4	677	924·1	637	1410·8	597	1929·1	557	2483·2
756	42·2	716	476·6	676	935·9	636	1423·4	596	1942·5	556	2497·6
755	52·7	715	487·7	675	947·8	635	1435·9	595	1955·9	555	2512·0
754	63·3	714	498·9	674	959·6	634	1448·5	594	1969·3	554	2526·4
753	73·9	713	510·1	673	971·5	633	1461·1	593	1982·8	553	2540·8
752	84·6	712	521·4	672	983·4	632	1473·8	592	1996·3	552	2555·3
751	95·2	711	532·6	671	995·3	631	1486·4	591	2009·8	551	2569·8
750	105·9	710	543·8	670	1007·2	630	1499·1	590	2023·3	550	2584·3
749	116·5	709	555·1	669	1019·1	629	1511·8	589	2036·9	549	2598·8
748	127·2	708	566·4	668	1031·1	628	1524·5	588	2050·4	548	2613·4
747	137·9	707	577·7	667	1043·1	627	1537·2	587	2064·0	547	2628·0
746	148·6	706	589·0	666	1055·1	626	1550·0	586	2077·7	546	2642·6
745	159·3	705	600·3	665	1067·1	625	1562·8	585	2091·3	545	2657·3
744	170·0	704	611·6	664	1079·1	624	1575·6	584	2105·0	544	2671·9
743	180·8	703	623·0	663	1091·1	623	1588·4	583	2118·7	543	2686·6
742	191·5	702	634·4	662	1103·2	622	1601·2	582	2132·4	542	2701·4
741	202·3	701	645·8	661	1115·3	621	1614·1	581	2146·1	541	2716·1
740	213·1	700	657·2	660	1127·4	620	1627·0	580	2159·9	540	2730·9
739	223·9	699	668·6	659	1139·5	619	1639·9	579	2173·7	539	2745·7
738	234·7	698	680·0	658	1151·6	618	1652·8	578	2187·5	538	2760·6
737	245·6	697	691·5	657	1163·8	617	1665·7	577	2201·3	537	2775·4
736	256·4	696	703·0	656	1175·9	616	1678·7	576	2215·2	536	2790·3
735	267·3	695	714·5	655	1188·1	615	1691·7	575	2229·2	535	2805·3
734	278·2	694	726·0	654	1200·3	614	1704·7	574	2243·1	534	2820·2
733	289·1	693	737·5	653	1212·6	613	1717·7	573	2257·0	533	2835·2
732	300·0	692	749·0	652	1224·8	612	1730·8	572	2271·0	532	2850·2
731	310·9	691	760·6	651	1237·1	611	1743·8	571	2285·0	531	2865·2
730	321·8	690	772·2	650	1249·4	610	1756·9	570	2298·9	530	2880·3
729	332·8	689	783·7	649	1261·7	609	1770·0	569	2312·9	529	2895·4
728	343·8	688	795·3	648	1274·0	608	1783·1	568	2327·0	528	2910·5
727	354·7	687	807·0	647	1286·3	607	1796·3	567	2341·1	527	2925·7
726	365·7	686	818·6	646	1298·7	606	1809·5	566	2355·2	526	2940·8
725	376·8	685	830·3	645	1311·1	605	1822·7	565	2369·3	525	2956·0
724	387·8	684	841·9	644	1323·5	604	1835·9	564	2383·4	524	2971·3
723	398·8	683	853·6	643	1335·9	603	1849·1	563	2397·6	523	2986·6
722	409·9	682	865·3	642	1348·3	602	1862·4	562	2411·8	522	3001·9
721	421·0	681	877·1	641	1360·8	601	1875·7	561	2426·1	521	3017·2
720	432·1	680	888·8	640	1373·3	600	1889·0	560	2440·3	520	3032·5

Tafel IV. Hypsometrische Tafeln.

B Argument: $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$		*C* Arg.: Geogr. Breite		
$\frac{1}{2}(t_1+t_2)$	s_1	φ	s_2	φ
−10°	−0·03665	0°	+0·00260 —	90°
9	03298	1	0·00260	89
8	02932	2	0·00259	88
7	02565	3	0·00258	87
6	02199	4	0·00257	86
5	01832	5	+0·00256 —	85
4	01466	6	0·00254	84
3	01099	7	0·00252	83
2	00733	8	0·00250	82
− 1	−0·00366	9	0·00247	81
0	0·00000	10	+0·00244 —	80
+ 1	+0·00366	11	0·00241	79
2	00733	12	0·00238	78
3	01099	13	0·00234	77
4	01466	14	0·00230	76
5	01832	15	+0·00225 —	75
6	02199	16	0·00220	74
7	02565	17	0 00216	73
8	02932	18	0·00210	72
9	03298	19	0·00205	71
+10	+0·03665	20	+0·00199 —	70
11	04031	21	0·00193	69
12	04398	22	0·00187	68
13	04764	23	0·00181	67
14	05131	24	0·00174	66
15	05497	25	+0·00167 —	65
16	05864	26	0·00160	64
17	06230	27	0·00153	63
18	06597	28	0·00145	62
19	06963	29	0·00138	61
+20	+0·07330	30	+0·00130 —	60
21	07696	31	0·00122	59
22	08063	32	0·00114	58
23	08429	33	0·00106	57
24	08796	34	0·00097	56
25	09162	35	+0·00089 —	55
26	09529	36	0·00080	54
27	09895	37	0·00072	53
28	10262	38	0·00063	52
29	10628	39	0·00054	51
+30	+0·10995	40	+0·00045 —	50
		41	0·00036	49
		42	0·00027	48
		43	0·00018	47
		44	+0·00009 —	46
		45	0·00000	45

D Arg.: h_1+h_2

h_1+h_2	s_3
0 *m*	0·00000
1000	+0·00016
2000	+0·00031
3000	+0·00047
4000	+0·00063
5000	+0·00078

Tafel V.

Geodätische Übertragung auf dem Ellipsoide.

Erklärung Seite 354.

Tafel V*a*.

ν	S_0	Σ_0	S_1; Σ_1	S_2; Σ_2
0·0000	1·000 00000	1·000 00000		0·000 00000
0·0001	1·000 00000	0·999 90000		0·000 00000
0·0002	1·000 00001	0·999 79999		0·000 00001
0·0003	1·000 00002	0·999 69998		0·000 00002
0·0004	1·000 00004	0·999 59996		0·000 00004
0·0005	1·000 00006	0·999 49994		0·000 00006
0·0006	1·000 00009	0·999 39991		0·000 00009
0·0007	1·000 00012	0·999 29988		0·000 00012
0·0008	1·000 00016	0·999 19984		0·000 00016
0·0009	1·000 00020	0·999 09980		0·000 00020
0·0010	1·000 00025	0·998 99975		0·000 00025
0·0011	1·000 00030	0·998 89970		0·000 00030
0·0012	1·000 00036	0·998 79964		0·000 00036
0·0013	1·000 00042	0·998 69958		0·000 00042
0·0014	1·000 00049	0·998 59951		0·000 00049
0·0015	1·000 00056	0·998 49944		0·000 00056
0·0016	1·000 00064	0·998 39936		0·000 00064
0·0017	1·000 00072	0·998 29928		0·000 00072
0·0018	1·000 00081	0·998 19919		0·000 00081

Auf 8 Dezimalen gleich ν

Tafel V*b*.

ν	L_0	L_1	L_2
0·0000	1·001 67419		0·000 00000
0·0001	1·001 62418		0·000 00000
0·0002	1·001 57417		0·000 00001
0·0003	1·001 52416		0·000 00002
0·0004	1·001 47415		0·000 00004
0·0005	1·001 42412		0·000 00006
0·0006	1·001 37409		0·000 00009
0·0007	1·001 32406		0·000 00012
0·0008	1·001 27403		0·000 00016
0·0009	1·001 22398		0·000 00020
0·0010	1·001 17394		0·000 00025
0·0011	1·001 12388		0·000 00030
0·0012	1·001 07383		0·000 00036
0·0013	1·001 02376		0·000 00042
0·0014	1·000 97370		0·000 00049
0·0015	1·000 92362		0·000 00056
0·0016	1·000 87354		0·000 00064
0·0017	1·000 82346		0·000 00072
0·0018	1·000 77338		0·000 00081

Auf 8 Dezimalen gleich $\frac{1}{2}\nu$

Register.

Ablesemikroskop 47
Abstecken von Geraden 192, 195
— von Kreisbogen 195, 232
— von Normalen 194
— von Parallelen 194
Achsen 23
Achsenlibelle 110
Additamentenmethode 302
Additions- und Subtraktionslogarithmen 266
Äquilatituden 372
Äquilongituden 372
Äquivalentbrennweite von Linsenkombinationen 29
Alhidade 42
Alhidadenlibelle 113
Anallatischer Distanzmesser 90
Aneroide 137
Anschlagnadeln 148
Aufnahmssektion 9
Aufsteigung, gerade, der Gestirne 306
Auspflocken 191
Ausrüstung auf Forschungsreisen 383
Ausstecken von Winkeln 193
Azimut 95, 304
—, Bestimmung desselben, astronomisch 311
—, Bestimmung aus den Koordinaten der Endpunkte, auf der Kugel 284
— — auf dem Ellipsoide 358

Barometer 136
Barometrisches Höhenmessen 261
Basis 5
—, Reduktion auf den Meereshorizont 287
Basisapparate 78
— mit Endmaßen 78
Basisapparate mit Strichmaßen 82
Basisbänder 135
Basisgleichungen 293
Basisentwicklungsnetz 288
Basismessung 212, 285
Beobachtungen auf Forschungsreisen 385
Bergwage 57
Bipolarmethode 198
Breite, geographische 304
— —, Bestimmung derselben 308
— geozentrische 331
— reduzierte 334
Breitengradmessungen 330
— zur Bestimmung der Erddimensionen 342
Bussole 95

Chronometer 183
Celerimensura 141
Clairautsches Theorem 378

Deklination der Gestirne 306
— der Magnetnadel 95
Deklinationskreise 306
Dendrometer 122
Detaillierbrettchen 158, 185
Diopter 25
Diopterlineal 154
Distanz, Bestimmung aus den rechtwinkligen Koordinaten auf der Kugel 332
— — auf dem Ellipsoide 358
Distanzlatten 134
Distanzmesser 84
— mit Latte 87
— ohne Latte 85
Distanzmessung 224, 258

Doppellibelle 61
Doppelsenkel 54
Dosenlibelle 61
Drehlatte 77
Dreieck, geodätisches 345
Dreiecksnetz, Dreieckspunkte 5
Dreifuß 18
Durchgangsinstrument 119

Einschneidetransporteur 203
Einschneidezirkel 202
Entwickler für Photogramme 174
Erddimensionen nach Bessel 337
— nach Clarke 344
—, Bestimmung derselben aus Gradmessungen 342
Erdmeridiane 304
Exzentrizität des Fernrohres 237
— der Kreise 228
Exzeß, sphärischer 294

Fadennetze 34
—, Aufziehen der Fäden 42
Fadenparallaxe 35
Fehler, mittlerer, der Beobachtungen 242
Fehlerausgleichung in Polygonzügen, graphische 213, 215
— — durch Rechnung 280
Fehlerdreieck 203
Feinbewegung 13
Feldbeleuchtung 53
Feldbussole 108
Feldzirkel 77
Fernrohr 33
—, gebrochenes 52
Fernrohrlotapparat 56
Figurierfahnen 70
Flächennivellement 217
Flügel, hydrometrischer 177
Flying Survey 210, 274

Gang, toter, der Schrauben 49
Geodätisches Dreieck 345
Geodätische Linie 345
— Übertragung auf der Kugel 326
— — auf dem Ellipsoide 355
Geoid 369
Gerüstsignale 71
Glasmikrometer 47
Gnomon 95
Goniograph 203
Grad im Meridian 340
Grad im Parallel 342
Gradbogen, der Markscheider 60
Gradkartenblatt 8
Gradmessungen 329
Grubensignale 70
Grubentheodolit 110

Halbsekundenpendel 181
Hängebogen, der Markscheider 60
Hängeniveau 61
Hängezeug 96
Heliotrop 73
Herzschraube 19, 23
Hilfsdreieck, sphärisches 345
Hodometer 186
Höhe 94
Höhendarstellung durch Schraffierung und Schummerung 219
Höhenkreise 121
Höhenmarken 72
Höhenmessung, barometrische 261
— trigonometrische 120
Höhenwinkel 94
Holosterikbarometer 137
Horizont, angequickter 107
— künstlicher 107
— scheinbarer und wahrer 94
Horizontabschluß 244
Horizontalwinkel 94
Hydrometrischer Flügel 177

Illuminatoren 53
Indexfehler des Sextanten 104
Integratoren 161
Isohypsen 8
—, Zeichnen derselben 216

Justierschrauben 12

Kanalwage 60, 124
Kernpunkte der Photogramme 224
Kimmtiefe 94
Kippregel 154
Kippschraube 127
Klemmung 13
Klepszykel 142
Klitometer 57
Kollimationslinie 34
Kollimationsfehler des Fernrohres 34
— des Sextanten 104
— beim Theodolit 233
—, Wegschaffung desselben 36, 236

Komparatoren 80
Kompaß 95
Kompensation bei Uhren und Chronometern 183
Kompensationslatten 135
Kontrollschnitte 199
Konvergenz der Lotlinien 249
— der Meridiane 325
Koordinaten, geographische 304
— Berechnung derselben aus den rechtwinkligen 325
— rechtwinklige; Berechnung derselben, in der Ebene 278
— — sphärisch 318
Koordinatenmethode 215
Korrektionsschrauben 12
Kreisbogen, Abstecken derselben 282
Kreuzlibellen 63
Kulmination, obere, untere, der Gestirne 305
Kurvimeter 76

Länge, geographische 304
— Bestimmung derselben 309
Längengradmessung 330
— zur Bestimmung der Erddimensionen 343
Lateralrefraktion 318
Latten 134
—, logarithmische 144
Legendresches Theorem 299
Libellen 61
—, Füllen derselben 69
—, Rektifikation 65
Libellenprüfer 63
Lichtsignale 70
Limbus 42
Linearplanimeter 162
Linie, geodätische 345
Linsen 25
Linsengleichung 27
Log 175
Lot 54
Lotabweichungen 367
Lotgabel 56
Lotstörungen 370
Lotungsapparate 54
— mit Fernrohr 55
Lupe 31

Maßstab von Karte und Plan 3
Meridian, astronomischer 94
— magnetischer 95
Meridiane auf der Erde 304
Meridiangrad 339
Meridiankonvergenz 325
Meridiankreis 120
Meßbänder 77
Meßfahnen 70
Meßkeil 79
Meßkette 76
Meßlatten 76
Meßpflöcke 70
Meßrad 78
Meßstangen 78
—, Ausdehnungskoeffizienten derselben 287
Meßtisch 150
Meßtischarbeiten 195
Metallbarometer 137
Mikrometer 39
Mikrometerschraube 17
Mikroskop 32
Mikroskoptheodolit 113
Mißweisung der Magnetnadel 95
Mittelbare Messungen 194
Mittelwässer, relative Höhe derselben 380

Nachtbogen der Gestirne 305
Neigung der Achsen 233
Netze der I., II., III., IV. Ordnung 5
Niveau 61
Nivellierbänder 135
Nivellierdiopter 124
Nivellieren 122, 257
Nivellierinstrumente 125
—, Berichtigung derselben 132
Nivellierlatten 134
Nonien 44
Nordpunkt 94
Nußgelenk 19

Okulare 35
—, prismatische 51
Orientieren des Meßtisches 196
Orientierungsbussole 96
Ostpunkt 95

Pantograph 159
Pantometrum Paceccianum 85
Parallelkreise auf der Erde 304
Passageninstrument 119
Pedometer 186
Pegel 178
Peilungen 187
Pendel 179
Pendelnivellierinstrument 124

Pendelwage 124
Perspektivlineal 154
Pflocksignale 69
Photogrammetrie 165, 221
Phototheodolit 171
Pikiernadeln 148
Planimeter 161
Planzeichnen 217
Polarmethode 196
Polarplanimeter 163
Poldistanz der Gestirne 306
Polhöhe 304
Polhöhenschwankungen 381
Potential 376
Präzisionsnivellement 124, 379
Prismenkreis 106
Prismenkreuz 101
Problem der 4 Punkte 207, 270
— der 6 Punkte 210, 274
— der 8 Punkte 275
Profilaufnahmen 217
Proportionalzirkel 159

Radiusvektor des Beobachtungsortes 337
Rayonieren und Messen 196
— und Schneiden 198
Rechenschieber, logarithmischer 143
Reduktion schiefer Winkel auf den Horizont 239
—, vorläufige, auf Forschungsreisen 390
Reduktionszirkel 159
Refraktionen, astronomische 256
— terrestrische 247
Rektaszension 306
Rektifizierschrauben 12
Relèvement sous voiles 210, 274
Repetitionsbeobachtungen 119, 241
Repetitionstheodolit 117
Reversionslibelle 61
Reversionspendel 180
Richtungsbeobachtungen 241
Richtungswinkel 319
—, Berechnung aus den rechtwinkligen Koordinaten 322
Röhrenlibelle 61
Rückwärtseinschneiden 200, 269
Run 50

Satzbeobachtungen 241
Schätzungsmikroskop 47
Scheibenstativ 20
Schichtenlinien 3
Schichtenlinien, Zeichnen derselben 216
Schiebekreuz des Meßtisches 151
Schlittenführung 14
Schnellmesser 141
Schraffierung der Höhen 219
Schraube 11
Schraubenmikroskop 46
—, Berichtigung desselben 49
Schummerung der Höhen 219
Schwalbenschwanzführung 14
Schwerkraft, Größe derselben 376
Schwimmkugel 175
Sehnendreieck 302
Seitengleichungen 290
Seitwärtsabschneiden 199
Seitwärtseinschneiden 199
Setzniveau 61
Setzwage 57
Siedethermometer 139
Signale 69
Situationsinstrument 158
Skizzierbrettchen 158, 185
Skizzieren 185
Sphärisches Hilfsdreieck 345
Sphärischer Exzeß 294
Sphärische Trigonometrie, Formeln derselben 297
Spiegelkreuz 99
Spiegellineal 97
Spiegelsextant 102
Springstandmethode 198
Staffelmessung 213
Stand der Uhr 309
Standlinienmethode 198
Stangenzirkel 148
Stationieren 200
Stative 20
Stellschrauben 18
Sterntag 306
Stimmung des Mikroskops 50
Stockstativ 20
Storchschnabel 159
Stundenkreis 306
Stundenwinkel 306
Stromquadrant 176
Subtraktionslogarithmen 266
Südpunkt 94

Tachymeter 141
Tachymeterkippregel 156
Tagebogen der Gestirne 305
Tangentenschraube 127

Tangentenschraube zum Nivellieren und Distanzmessen 258
Taschennivellierdiopter 125
Teilungsfehler 226
Theodolit 110
Thermobarometer 139
Tiefenwinkel 94
Tote Gang der Schraube 49
Transporteur 148
Transversalmaßstäbe 44
Triangulation 5
—, Berechnung derselben 268, 299
Triangulierungssektion 8
Trommelkippschraube 127

Übertragung, geodätische, auf der Kugel 326
— auf dem Ellipsoid 355
Uhren 182
Uhrkorrektion 309
Umfangsmethode 197
Universalinstrument 113
Universalnivellierinstrument 130
Urhöhenmarken 72

Vermessungen 224
Versicherungslibelle 113
Vertikalschnitt 362
Visieren und Messen 196
Visieren und Schneiden 198
Vorwärtsabschneiden 198

Wasserwage 61
Wendescheibe des Meßtisches 152
Westpunkt 95
Winkelgleichungen 289
Winkelmessung 225
Winkelkreuz 96
Winkelprisma 100
Winkelrohr 98
Winkelscheibe 96
Winkelspiegel 98
Winkeltrommel 97

Zapfen und Zapfenlager 23
Zapfenstativ 20
Zenit 94
—, astronomisches 373
—, geodätisches 373
Zenitdistanz 94
— Messung derselben 113
Zentralpolygone 292
Zentralschraube 19, 23
Zentrieren der Horizontalwinkel 245
— der Vertikalwinkel 251
Zirkumpolarsterne 305

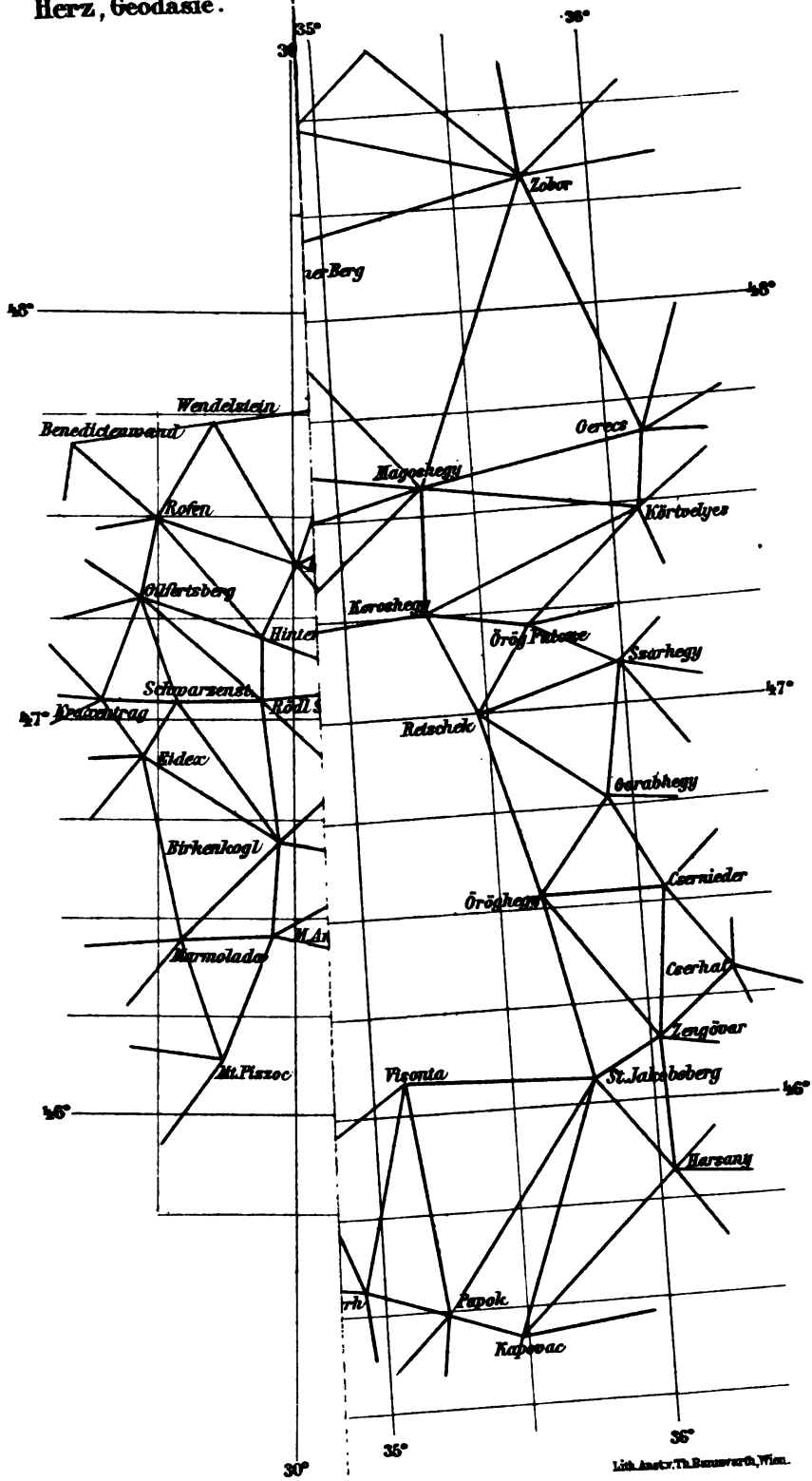
Druckfehler.

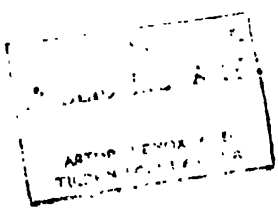
Seite	51,	Zeile	3	v. u.	statt: Fig. 53 lies: Fig. 52
„	73,	„	11	v. o.	„ Spiegel bb_1 so, daß lies: Spiegel aa_1 so, daß
„	139,	„	7	v. u.	„ schließlichen Beobachtungen lies: schließlichen Reduktionen
„	160,	„	2	v. u.	„ wie BC und lies: wie BS und
„	171,	„	3	v. u.	„ der Kamera lies: die Kamera
„	175,	„	2	v. o.	„ dann mit altem lies: dann mit neuem
„	219,	„	11	v. u.	„ Schattierung lies: Schraffierung
„	220,	„	15	v. o.	„ $\frac{nd}{100}$ lies: $\frac{nd}{1000}$
„	287,	„	3	v. u.	„ Keillänge lies: Keilbreite
„	303,	„	20	v. u.	„ als 6·3120 ist jedoch lies: als 5·3120 ist jedoch

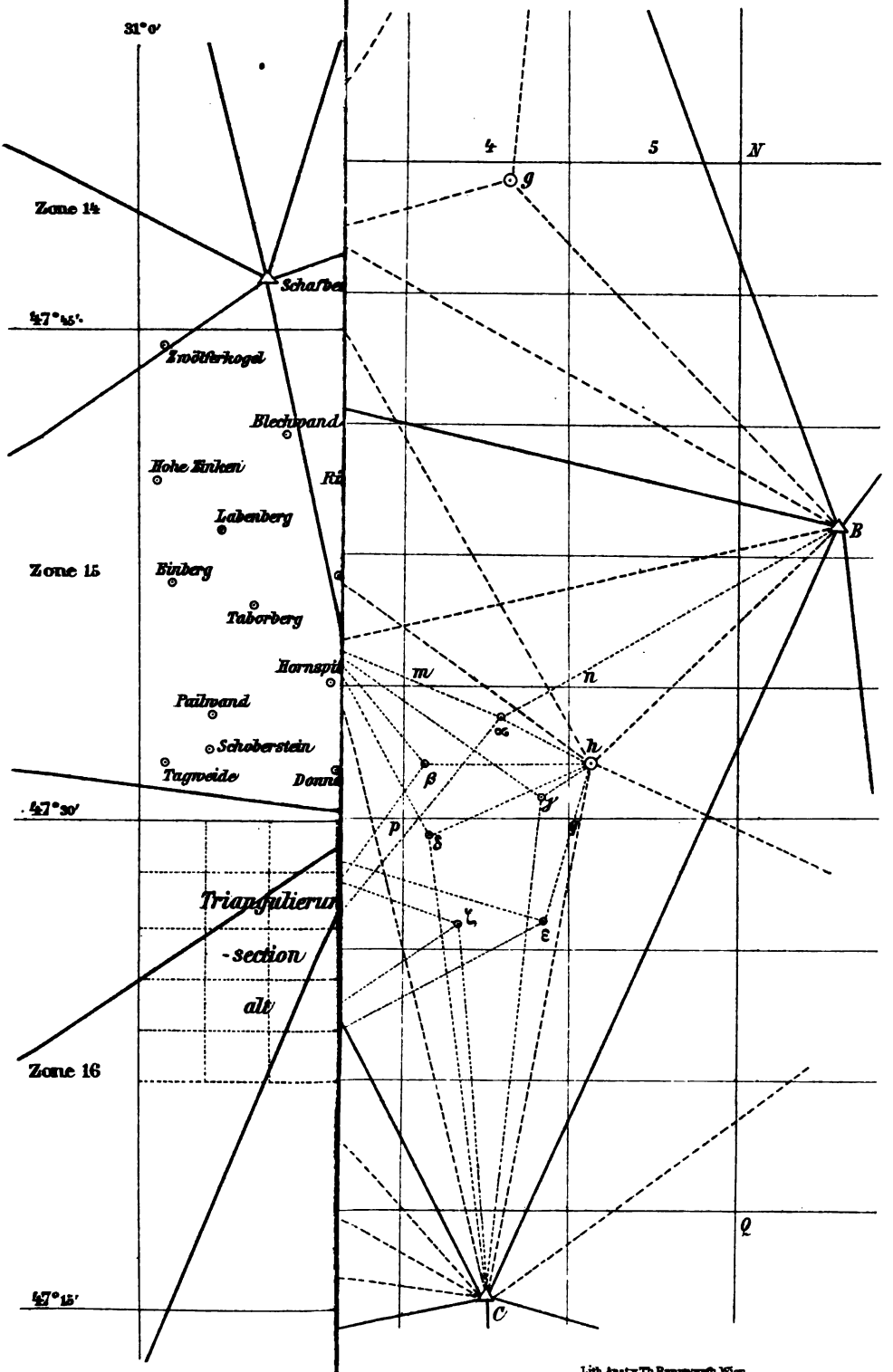
74-

Herz, Geodäsie.

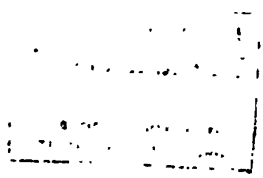
Taf I.





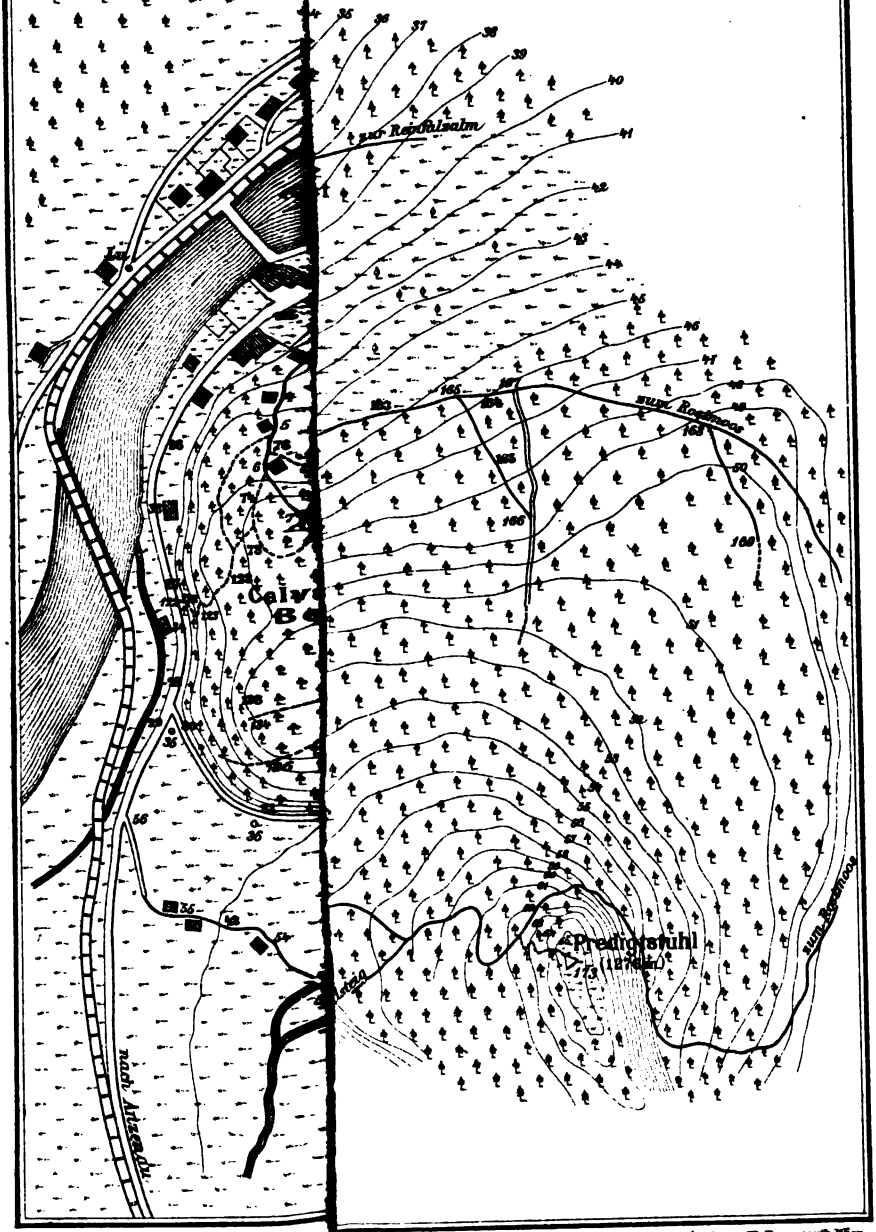


Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

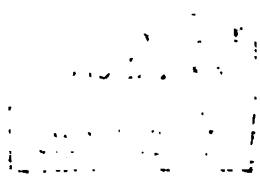


EM PREDIGTSTUHL.

.000.



Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.



(Fortsetzung von der zweiten Umschlagseite.)

III. **Methodik des geographischen Unterrichtes.**
Von Dr. Anton Becker, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Wien, VIII.
Subskriptionspreis K 3·— = M. 2·50, geb. K 4·20 = M. 3·50.
Einzelpreis K 3·60 = M. 3·—, geb. K 4·80 = M. 4·—.

IV. **Der heimatkundliche Unterricht.**
Von Dr. Julius Mayer, Professor am k. k. Franz Josef-Staatsgymnasium in Freistadt.

Nebst einem Anhange: **Das Relief der Heimat.**
Von Maximilian Klar, Professor an der niederösterreichischen Landes-Real- und höheren Gewerbeschule in Wiener-Neustadt.

V. **Kunsttopographie.**
Von Dr. Cyriak Budenstein, a. o. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

VI. **Astronomische Erdkunde.**
Von Schulrat Dr. Wilhelm Schmidt, Professor am k. k. Elisabeth-Staatsgymnasium in Wien.
Subskriptionspreis K 7·20 = M. 6·—, geb. K 8·40 = M. 7·—.
Einzelpreis K 8·40 = M. 7·—, geb. K 9·60 = M. 8·—.

VII. **Die astronomische Bestimmung der geographischen Koordinaten.**
Von Regierungsrat Eugen Gelcich, Zentralinspektor für den kommerziellen Unterricht und Inspektor der nautischen Schulen.
Subskriptionspreis K 4·80 = M. 4·—, geb. K 6·— = M. 5·—.
Einzelpreis K 6·— = M. 5·—, geb. K 7·20 = M. 6·—.

VIII. **Die nautischen Wissenschaften.**
Von Arthur Vital, Professor an der k. k. Handels- und nautischen Akademie in Triest.

IX. **Chronologie.**
Von Dr. Robert Schram, Privatdozent an der k. k. Universität und Leiter des k. k. Gradmessungsbureaus in Wien.

X. **Physische Geographie.**
Von Schulrat Dr. Wilhelm Schmidt, Professor am k. k. Elisabeth-Staatsgymnasium in Wien.

Nebst einem Anhange: **Der Erdmagnetismus.**
Von Dr. Wilhelm Trabert, o. ö. Professor an der k. k. Universität in Innsbruck.

XI. **Die Erdrinde.** Ein geologischer Leitfaden für Geographen.
Von Dr. Ferdinand Löwl, o. ö. Professor an der k. k. Universität in Czernowitz.

XII. **Die Gewässer des Festlandes und das Meer.**
Von Dr. W. Meinardus, Privatdozent an der Universität in Berlin.

XIII. **Meteorologie und Klimatologie.**
Von Dr. Wilhelm Trabert, o. ö. Professor an der k. k. Universität in Innsbruck.

XIV. **Grundriß einer botanischen Geographie mit besonderer Rücksicht auf Nutzpflanzen.**
Von Dr. Franz Rimmer, Direktor des niederösterreichischen Landes-Lehrerseminars in Wiener-Neustadt.

XV. **Die Verbreitungsbezirke der Tiere.**
Von Hugo Lanner, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Floridsdorf.

XVI. **Völkerkunde.**
Von Dr. Heinrich Schurtz, Bremen.
Subskriptionspreis K 7·20 = M. 6·—, geb. K 8·40 = M. 7·—.
Einzelpreis K 8·40 = M. 7·—, geb. K 9·60 = M. 8·—.

XVII. **Die Volkskunde,** ihre Bedeutung, ihre Ziele und ihre Methode mit besonderer Berücksichtigung ihres Verhältnisses zu den historischen Wissenschaften. Ein Leitfaden zur Einführung in die Volksforschung.
Von Dr. R. F. Kaindl, a. ö. Professor an der k. k. Universität in Czernowitz.
Subskriptionspreis K 4·80 = M. 4·—, geb. K 6·— = M. 5·—.
Einzelpreis K 6·— = M. 5·—, geb. K 7·20 = M. 6·—.

(Fortsetzung siehe auf der vierten Umschlagseite.)

XVIII. **Geographische Namenkunde.** Methodische Anwendung der namenkundlichen Grundsätze auf das allgemeiner zugängliche topographische Namenmaterial.
Von Dr. Joh. Wilhelm Nagl, Privatdozent an der k. k. Universität in Wien.
Subskriptionspreis *K* 4·80 = *M.* 4·—, geb. *K* 6·— = *M.* 5·—.
Einzelpreis *K* 6·— = *M.* 5·—, geb. *K* 7·20 = *M.* 6·—.

XIX. **Historische Geographie.** Beispiele und Grundlinien.
Von Dr. Wilhelm Götz, Professor an der königl. technischen Hochschule in München.
Subskriptionspreis *K* 10·80 = *M.* 9·—, geb. *K* 12·— = *M.* 10·—.
Einzelpreis *K* 12·60 = *M.* 10·50, geb. *K* 13·80 = *M.* 11·50.

XX. **Grundzüge der politischen Geographie.** Das Verhältnis der Staaten zum Erdboden und zu dessen besonderen Gestaltungen in vergleichender Übersicht.
Von Dr. Hermann Walser, Lehrer der Geographie am städt. Obergymnasium in Bern.

XXI. **Wirtschafts-, Handels- und Verkehrsgeographie.** Eine Einführung in den Stoff und die Methode dieser Disziplinen.
Von Dr. Karl Peßler, Professor an der Handelsakademie in Graz.

XXII. **Methodik der Länderkunde.**
Von Dr. Alfred Kirchhoff, o. ö. Professor an der Universität in Halle a. d. S.

XXIII. **Geodäsie.** Eine Darstellung der Methoden für die Terrainaufnahme, Landesvermessung und Erdmessung.
Mit einem Anhange: **Anleitung zu astronomischen, geodätischen und kartographischen Arbeiten auf Forschungsreisen.**
Von Dr. Norbert Herz, Professor an der k. k. Franz Josef-Staatsrealschule, Privatdozent für Astronomie und Geodäsie an der k. k. Universität in Wien.
Subskriptionspreis *K* 14·40 = *M.* 12·—, geb. *K* 15·60 = *M.* 13·—.
Einzelpreis *K* 16·80 = *M.* 14·—, geb. *K* 18·— = *M.* 15·—.

XXIV. **Das Gelände und seine Darstellung.**
I. **Geländekunde.** Der Autor wird später bekannt gegeben werden.
II. **Geländedarstellung.**
Von Vinzenz Haardt von Hartenthurn, Vorstand 1. Klasse des k. u. k. militär-geographischen Instituts in Wien.

XXV. **Landkartenkunde.**
Von Vinzenz Haardt von Hartenthurn, Vorstand 1. Klasse des k. u. k. militär-geographischen Institutes in Wien.

XXVI. **Die Kartenentwurfslehre.**
Von Arthur Vitzthum, Professor an der k. k. Handels- und nautischen Akademie in Triest.
Subskriptionspreis *K* 4·— = *M.* 3·60, geb. *K* 5·20 = *M.* 4·60.
Einzelpreis *K* 5·— = *M.* 4·20, geb. *K* 6·20 = *M.* 5·20.

XXVII. **Landkartenerzeugung.** Nebst einer Darstellung des heutigen Standes der Kartographie in den einzelnen Staaten.
Von Vinzenz Haardt von Hartenthurn, Vorstand 1. Klasse des k. u. k. militär-geographischen Institutes in Wien.
Mit einem Anhange: **Die Erzeugung geographischer Reliefs.**
Von Maximilian Klar, Professor an der niederösterreichischen Landes-Real- und höheren Gewerbeschule in Wiener-Neustadt.

XXVIII. **Die Landkarte und das Relief als Lehrbehelfe im geographischen Unterrichte.** Nebst einer Darstellung des heutigen Standes der Schulkartographie.
Von Maximilian Klar, Professor an der niederösterreichischen Landes-Real- und höheren Gewerbeschule in Wiener-Neustadt.

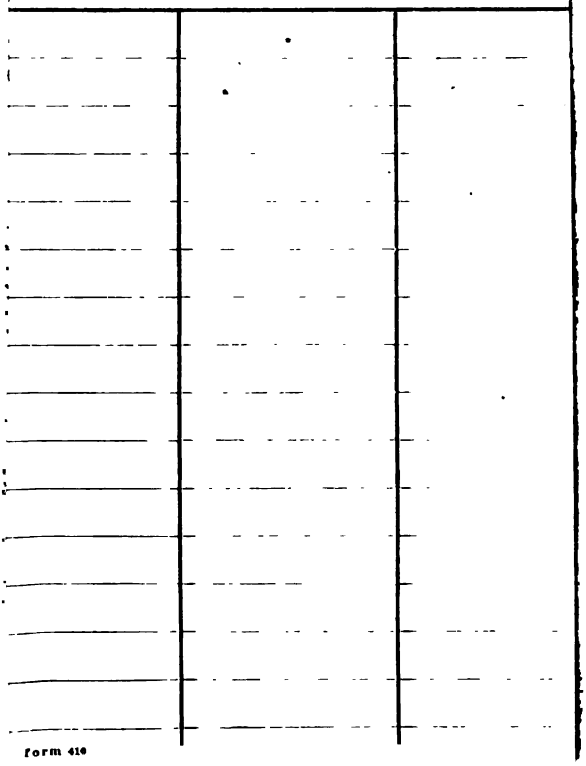
XXIX. **Aufgabensammlung über die einzelnen Zweige des geogr. Unterrichtes.**
In Verbindung mit sämtlichen Mitarbeitern zusammengestellt von Dr. Julius Mayer, Professor am k. k. Franz Josef-Staatsgymnasium in Freistadt und Maximilian Klar, Professor an der niederösterreichischen Landes-Real- und höheren Gewerbeschule in Wiener-Neustadt.

XXX. **Die geographische Schulsammlung.**
Unter Mitwirkung mehrerer Fachmänner herausgegeben von Maximilian Klar, Professor an der niederösterreichischen Landes-Real- und höheren Gewerbeschule in Wiener-Neustadt und Hugo Launer, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Floridsdorf.

Druck von Brüder Hollinek in Wien.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building



Form 416

B'D JUN 1 1915